ПМТФ, № 2, 1963

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НАЧАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Г. С. Голицын

(Москва)

Решена задача о распространении малого начального возмущения параметров среды, обладающей произвольной проводимостью и находящейся в однородном магнитном поле. Исследование асимптотического поведения решения для больших значений времени показывает, что возмущение превращается в ряд одиночных волн, движущихся со скоростью распространения низкочасточных колебаний.

В проводящей среде с магнитным полем, как хорошо известно, существует ряд волн нового типа. Длинноволновые (низкочастотные) возмущения могут распространяться со скоростями быстрых и медленных магнитозвуковых волн и с альфвеновской скоростью. Скорости этих волн зависят от величины напряженности магнитного поля H и от угла θ между направлением волнового вектора $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}$. Коротковолновые (высокочастотные) возмущения слабо взаимодействуют с магнитным полем и распространяются со скоростью обычного звука. Магнитное поле влияет только на их затухание. Какие волны можно называть короткими, а какие — длинными, в каждом конкретном случае определяется свойствами среды, ее проводимостью и скоростью звука. Учет конечной проводимости приводит к затуханию возмущений. Это затухание было подсчитано как для коротковолновой части спектра [1, 2], так и для длинноволновой [3], когда оно мало и не влияет на скорость распространения колебаний. В промежуточной части спектра существуют сильное затухание и дисперсия скоростей.

Представляет интерес исследовать распространение в произвольно проводящей среде импульса — возмущения, составленного из набора волн с различными длинами (волнового пакета). Каждая из этих волн будет распространяться со своей скоростью и затухать по своему закону. В линейном приближении решение соответствующей задачи оказывается возможным получить в виде квадратур. Асимптотически для больших значений времени закономерности распространения импульса оказываются достаточно общими, независимо от его начальной формы. Некоторые суждения такого рода можно высказать и без аналитического решения поставленной задачи.

Через достаточно большое время из пространственных гармоник, составляющих волновой пакет, будут существенны только самые длинноволновые и самые коротковолновые (если только интенсивность последних не мала уже для начального импульса). Промежуточные гармоники вследствие сильного поглощения успеют затухнуть. Таким образом, следует ожидать, что первоначальное возмущение какого-либо одного или нескольких параметров среды превратится через некоторое время в последовательность возмущений, бегущих со скоростями низко- и высокочастотных волн. Из-за различного характера затухания волн в разных частях спектра надо ожидать и различного характера изменения в процессе распространения этих отдельных импульсов, на которые разделится первоначальное возмущение. Дальнейший детальный анализ подтверждает эту картину.

1. Линеаризированная система уравнений магнитной гидродинамики для покоящейся среды может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H}_0 \times \operatorname{rot} \mathbf{h}) = 0 \qquad \left(c_0 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}\right) \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0) - \nu_m \Delta \mathbf{h} = 0 \qquad \left(\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right)$$

Здесь c_0 — скорость звука, ρ — плотность среды, p — давление $\mathbf{h}$ — возмущение магнитного поля, ν_m — магнитная вязкость среды индексом 0 помечены невозмущенные величины.

Будем изучать движение импульса, составленного из плоских волн. Направление волнового вектора к примем за ось x, т. е. $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$. Направление остальных осей координат выберем так, чтобы вектор $\mathbf{H}_0$ находился в плоскости xy, т. е. $\mathbf{H}_0 = (H_x, H_y, 0)$. Векторы возмущений $\mathbf{v}$ и $\mathbf{h}$ будут иметь все три компоненты. Пусть в начальный момент заданы возмущения плотности, компонент скорости и магнитного поля, которые можно разложить в интеграл Фурье по координате

$$\rho(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho^\circ(k)\, e^{ikx}\, dk, \qquad v_x(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^\circ(k)\, e^{ikx}\, dk \quad \text{и т. д.} \tag{1.2}$$

Решение задачи будем искать в виде суперпозиции бегущих волн

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho^\circ(k)\, e^{i(kx - \omega(k)t)}\, dk \quad \text{и т. д.} \tag{1.3}$$

2. Подставляя выражения (1.3) в (1.1), получим однородную систему уравнений относительно амплитуд Фурье. Эту систему можно разбить на три подсистемы, в каждую из которых входит своя группа амплитуд Фурье

$$\omega v_z^\circ + \frac{kH_x}{4\pi\rho_0} h_z^\circ = 0, \qquad \omega h_z^\circ + kH_x v_z^\circ + ik^2\nu_m h_z^\circ = 0 \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered}\omega\rho^\circ - \rho_0 k v_x^\circ = 0, \qquad -\omega v_x^\circ + \frac{c_0^2}{\rho_0} k\rho^\circ + \frac{kH_y}{4\pi\rho_0} h_y^\circ = 0 \\ \omega v_y^\circ + \frac{kH_x}{4\pi\rho_0} h_y^\circ = 0, \qquad \omega h_y^\circ + kH_x v_y^\circ - kH_y v_x^\circ + ik^2\nu_m h_y^\circ = 0\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\omega h_x^\circ + ik^2\nu_m h_x^\circ = 0 \tag{2.3}$$

Разбиение на независимые группы является отражением того факта, что учет конечной проводимости не приводит к взаимодействию различного типа волн. Первая группа уравнений описывает волны альфвеновского типа; вторая — магнитозвукового, третья, включающая лишь одно уравнение, — диффузию продольной компоненты магнитного поля.

Как условие нетривиального решения этих групп уравнений получим хорошо известные дисперсионные уравнения, дающие связь между частотой ω и волновым числом k. Амплитуды Фурье определим из условия удовлетворения начальным данным. Таков общий план решения задачи для каждой из групп уравнений (2.1), (2.2) и (2.3).

Приведем сразу решение для продольной компоненты возмущения магнитного поля. Из (2.3) следует, что $\omega = -ik^2\nu_m$. Подставляя эту зависимость в соответствующее выражение для h_x из формул (1.3) и используя теорему о свертке, получим

$$h_x(x,t) = \frac{1}{2(\pi\nu_m t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} h_x(x', 0) \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{4\nu_m t}\right) dx' \tag{2.4}$$

Это есть обычное решение начальной задачи для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой в форме интеграла Пуассона.

3. Рассмотрим распространение возмущений компонент скорости и магнитного поля, перпендикулярных к основному полю H_0, т. е. возмущений альфвеновского типа, описываемых системой (2.1). Дисперсионное уравнение здесь следующее:

$$\omega^2 + i\omega\nu_m k^2 - (k^2 H_0^2 / 4\pi\rho_0) \cos^2\theta = 0 \tag{3.1}$$

Введем безразмерные величины

$$\Omega = \omega / kc_0, \qquad \beta = \nu_m k / c_0, \qquad \eta = H_0^2 / 4\pi\rho_0 c_0^2 \tag{3.2}$$

Безразмерная частота Ω представляет собой отношение фазовой скорости возмущения к скорости звука; η — квадрат альфвеновского числа Маха, β — число, пропорциональное обратному магнитному числу Рейнольдса для волны длиной $\lambda = 2\pi / k$. Безразмерному волновому числу β соответствуют безразмерные длина ξ и время τ

$$\xi = c_0 x / \nu_m, \qquad \tau = c_0^2 t / \nu_m \tag{3.3}$$

В безразмерных переменных (3.2) дисперсионное уравнение примет вид

$$\Omega^2 + i\beta\Omega - \eta \cos^2 \theta = 0$$

Откуда

$$\Omega_{1,2} = - i\beta / 2 \pm (\eta \cos^2 \theta - \beta^2 / 4)^{1/2} = - i\beta / 2 \pm \Theta \tag{3.4}$$

При $\beta \ll 1$ (длинноволновые возмущения)

$$\Omega_{1,2} = \pm \sqrt{\eta} \cos \theta$$

т. е. имеем две альфвеновские волны; при $\beta \gg 1$

$$\Omega_1 = -\frac{i\eta \cos^2 \theta}{\beta}, \quad \omega_1 = -\frac{iH_0^2 \cos \theta}{4\pi\rho_0\nu_m}, \quad \Omega_2 = - i\beta, \quad \omega_2 = - ik^2\nu_m$$

Таким образом, одна часть частот соответствует возмущению, просто затухающему со временем экспоненциально с декрементом, равным $i\omega_1$, а вторая — волнам скинового типа, т. е. так же затухает быстро.

Из однородности системы (2.1) следует, что амплитуда Фурье скорости v_z° пропорциональна амплитуде магнитного поля:

$$v_z^\circ = \frac{kH_0 \cos \theta}{4\pi\rho_0\omega} h_z^\circ \tag{3.5}$$

Дисперсионное уравнение (3.1) второго порядка относительно ω, т. е. каждому k соответствует два значения ω. Поэтому общее решение поставленной задачи следует искать в виде

$$h_z (x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \{h_{1z}^\circ (k) e^{-i\omega_1(k)t} + h_{2z}^\circ (k) e^{-i\omega_2(k)t}\} dk \tag{3.6}$$

Аналогичное выражение с учетом (2.9) можно написать и для $v_z (x, t)$. Амплитуды Фурье h_{1z}° и h_{2z}° определим из требования удовлетворения выражений типа (3.6) начальным данным; отсюда имеем

$$\frac{kH_0 \cos \theta}{4\pi\rho_0} \left(\frac{h_{1z}^\circ}{\omega_1} + \frac{h_{2z}^\circ}{\omega_1} \right) = v_z^\circ, \qquad h_{1z}^\circ + h_{2z}^\circ = h_z^\circ \tag{3.7}$$

Определяемые отсюда амплитуды h_{1z}° и h_{2z}° вместе с формулами (3.4) и (3.6) дают решение начальной задачи для возмущений альфвеновского типа.

Перейдем к анализу полученного решения. Для простоты пусть $v_z^\circ = 0$, т. е. в начальный момент имеем лишь возмущение магнитного поля. Общее решение для магнитного поля в безразмерных переменных (3.2) и (3.3) можно записать в виде

$$\frac{\nu_m}{c_0} h_z (\xi, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h_z^\circ (\beta)}{\Omega_1 - \Omega_2} (\Omega_1 e^{-i\beta\Omega_1\tau} - \Omega_2 e^{-i\beta\Omega_2\tau}) e^{i\beta\xi} d\beta \tag{3.8}$$

Предполагая для простоты начальное возмущение $h_z (x, 0)$ четной функцией координаты, после ряда преобразований формулу (3.8) можно записать в действительной форме

$$\frac{\nu_m}{c_0} h_z (\xi, \tau) = \int_0^{\vartheta} h_z^\circ (\beta) \exp\left(-\frac{\beta^2\tau}{2}\right) \cos \beta\xi \left(2 \cos (\beta\tau\Theta) - \frac{\beta \sin (\beta\tau\Theta)}{\Theta}\right) d\beta + \tag{3.9}$$

$$+ \int_{\nu}^{\infty} h_z^\circ (\beta) \exp\left(-\frac{\beta^2\tau}{2}\right) \cos \beta\xi \left(2 \operatorname{ch} (i\beta\tau\Theta) - \frac{\beta \operatorname{sh} (i\beta\tau\Theta)}{i\Theta}\right) d\beta \qquad (\vartheta = 2\sqrt{\eta} \cos \theta)$$

Определим асимптотику $h_z(\xi, \tau)$ для значений времени $\tau \gg 1$. При этом величина подынтегральной функции в (3.6) определяется в основном множителем $\exp(-\beta^2\tau/2)$ и при интегрировании по β основным является лишь участок пути, где значение экспоненты существенно отлично от нуля, т. е. $\beta \approx (2\tau)^{-1/2+\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < 1/2)$; а вне этого участка экспонента равномерно (по β) стремится к нулю. Оценивая в этом интервале величины остальных сомножителей, убеждаемся, что достаточно рассмотреть лишь первый интеграл в (3.9), причем для получения асимптотики можно пределы интегрирования распространить до бесконечности. В результате, для $\tau \gg 1$ главный член асимптотики будет определяться интегралом:

$$\frac{\nu_m}{c_0} h_z (\xi, \tau) = \int_0^{\infty} h_z^\circ (\beta) \exp\left(-\frac{\beta^2\tau}{2}\right) \cos \beta\xi \cos (\beta\tau \sqrt{\eta} \cos\theta)\, d\beta \tag{3.10}$$

причем это выражение справедливо только для углов θ, подчиняющихся условию

$$\cos \theta \gg (2\eta\tau)^{-1/2} = (2\pi\rho_0\nu_m / H_0^2 t)^{1/2}$$

Предполагая, что спектр начального возмущения $h_z^\circ(\beta)$ спадает не быстрее, чем $\exp(-\beta^2\tau/2)$, после некоторых операций из (3.10) получим

$$\frac{\nu_m}{c_0} h_z (\xi, \tau) = \frac{1}{2} h_z^\circ (0) \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{1/2} \left\{\exp\left[-\frac{(\xi - \tau\sqrt{\eta}\cos\theta)^2}{2\tau}\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[-\frac{(\xi + \tau\sqrt{\eta}\cos\theta)^2}{2\tau}\right]\right\}$$

или в размерной форме

$$h_z(x, t) = \frac{1}{2} h_z^\circ(0) \left(\frac{\pi}{2\nu_m t}\right)^{1/2} \left\{\exp\left[-\frac{1}{2\nu_m t}\left(x - \frac{H_0\cos\theta}{\sqrt{4\pi\rho_0}} t\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[-\frac{1}{2\nu_m t}\left(x + \frac{H_0\cos\theta}{\sqrt{4\pi\rho_0}} t\right)^2\right]\right\} \tag{3.11}$$

Таким образом, первоначальное возмущение магнитного поля через время $t \gg \nu_m / c_0^2$ превращается в две одиночные волны колоколообразной формы, бегущие в разные стороны с фазовой скоростью альфвеновских волн. Амплитуда волн определяется лишь нулевой гармоникой спектра начального возмущения. Эти волны расплываются, их ширина растет $\sim (\nu_m t)^{1/2}$, а амплитуда падает $\sim (\nu_m t)^{-1/2}$.

Определим асимптотику (3.6) для $\theta = \pi/2$. Аналогично получим

$$h_z (x, t) = h_z^\circ (0) \left(\frac{\pi}{\nu_m t}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4\nu_m t}\right) \tag{3.12}$$

Для направлений, близких к перпендикулярной к H_0 плоскости, когда $\cos\theta \approx (2\eta\tau)^{-1/2}$, необходимо рассматривать оба интеграла в (3.6), в которых при этом невозможно сделать какие-либо упрощения.

Если в формуле (3.9) положить $(c_0/\nu_m)\, \overset{\circ}{h_z}\,(k) = {}^1/_2\, \pi$, т. е. считать, что начальное возмущение имеет δ-образную форму, то эта формула будет представлять функцию Грина для рассматриваемой задачи, а формулы (3.11) и (3.12) будут ее асимптотиками.

Аналогично определяется z-компонента скорости, для которой основные закономерности распространения остаются теми же. Если задано также начальное возмущение и скорости, то в силу линейности задачи ее можно решать по частям, положив теперь $h_z(x,0)=0$ и сложив оба решения в общем результате. Такое подробное рассмотрение не меняет основных выводов о форме и скорости импульсов, образующихся из начальных возмущений через достаточно большой промежуток времени.

4. Обратимся к системе (2.2), описывающей распространение возмущений магнитозвукового типа. Дисперсионное уравнение здесь будет:

$$(c_0^2k^2 - \omega^2)\left[\omega\,(\omega + ik^2\nu_m) - \frac{k^2H_0^2\cos^2\theta}{4\pi\rho_0}\right] + \frac{\omega^2k^2H_0^2\sin^2\theta}{4\pi\rho_0} = 0 \qquad (4.1)$$

В безразмерных параметрах (3.2), это уравнение имеет вид

$$\Omega^4 + i\beta\,\Omega^3 - (1+\eta)\,\Omega^2 - i\beta\Omega + \eta\cos^2\theta = 0 \qquad (4.2)$$

$$\Omega_{1,2,3,4} = \pm\left\{\tfrac{1}{2}\left[1+\eta \pm \sqrt{(1+\eta)^2 - 4\eta\cos^2\theta}\right]\right\}^{1/2} = \pm\, c_\pm \qquad (\beta \ll 1)$$

где отношение скоростей быстрых и медленных магнитозвуковых волн к скорости звука обозначено $c_\pm$. При малых β учет проводимости влияет только на затухание:

$$\Omega_{1,2,3,4} = \pm\, c_\pm + \frac{i\beta}{2}\,\frac{1-c_\pm^2}{2c_\pm^2 - 1 - \eta} = c_+ + \frac{i\beta}{2}\,a_\pm \qquad (4.3)$$

$$\Omega_{1,2} = \pm 1 + \frac{i\eta\sin^2\theta}{2\beta}, \qquad \Omega_3 = -\,i\beta, \qquad \Omega_4 = -\,\frac{i\eta\cos^2\theta}{\beta} \quad (\beta \gg 1) \qquad (4.4)$$

Частоты $\Omega_{1,2}$ соответствуют двум звуковым волнам, частота Ω_3 — волне скинового типа, частота Ω_4 вполне аналогична частоте Ω_1 для волн альфвеновской ветви при $\beta \gg 1$. Перейдем к решению начальной задачи. Система (2.2) однородна, поэтому все амплитуды Фурье можно выразить, например, через амплитуду плотности

$$v_x{}^\circ = \frac{\omega}{k\rho_0}\,\rho^\circ, \qquad h_y{}^\circ = \frac{4\pi\rho^\circ}{H_0\sin\theta}\left(\frac{\omega^2}{k^2} - c_0^2\right), \qquad v_y{}^\circ = \frac{k\operatorname{ctg}\theta}{\omega\rho_0}\left(c_0^2 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)\rho^\circ \qquad (4.5)$$

Общее решение ищем в виде

$$\rho\,(x,t) = \sum_{j=1}^{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho_j{}^\circ\,(k)\,e^{i(kx-\omega_j(k)t)}dk \qquad (4.6)$$

где сумма берется по всем корням уравнения (4.1). Аналогичные выражения с учетом (4.5) можно написать и для остальных переменных. При помощи начальных условий получаем следующую систему уравнений для определения амплитуд $\rho_j{}^\circ$

$$\rho_1{}^\circ + \rho_2{}^\circ + \rho_3{}^\circ + \rho_4{}^\circ = \rho^\circ \qquad (4.7)$$

$$\Omega_1\rho_1{}^\circ + \Omega_2\rho_2{}^\circ + \Omega_3\rho_3{}^\circ + \Omega_4\rho_4{}^\circ = V_x{}^\circ \qquad \left(V_x{}^\circ = \frac{\rho_0}{c_0}\,v_x{}^\circ\right)$$

$$\frac{1-\Omega_1^2}{\Omega_1}\rho_1{}^\circ + \frac{1-\Omega_2^2}{\Omega_2}\rho_2{}^\circ + \frac{1-\Omega_3^2}{\Omega_3}\rho_3{}^\circ + \frac{1-\Omega_4^2}{\Omega_4}\rho_4{}^\circ = V_y{}^\circ \qquad \left(V_y{}^\circ = \frac{\rho_0}{c_0}\,v_y{}^\circ\operatorname{ctg}\theta\right)$$

$$(\Omega_1^2-1)\,\rho_1{}^\circ + (\Omega_2^2-1)\,\rho_2{}^\circ + (\Omega_3^2-1)\,\rho_3{}^\circ + (\Omega_4^2-1)\,\rho_4{}^\circ = H_y{}^\circ \left(H_y{}^\circ = \frac{H_0\sin\theta}{4\pi c_0^2}\,h_y{}^\circ\right)$$

Определитель этой системы сводится к известному определителю Вандермонда следующим образом: надо к третьей строке прибавить вторую, к четвертой — первую, из каждого j-го столбца вынести множитель Ω_j^{-1} и переставить строки.

Для простоты ограничимся изучением случая, когда в начальный момент задано лишь возмущение магнитного поля, а остальные величины не возмущены. При этом общее решение для плотности среды будет иметь вид

$$\rho(\xi,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overset{\circ}{H_y}(\beta)\,e^{i\beta\xi}\left[\frac{-\Omega_1 e^{-i\beta\Omega_1\tau}}{(\Omega_2-\Omega_1)(\Omega_3-\Omega_1)(\Omega_4-\Omega_1)}+\frac{\Omega_2 e^{-i\beta\Omega_2\tau}}{(\Omega_2-\Omega_1)(\Omega_3-\Omega_2)(\Omega_4-\Omega_2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Omega_3 e^{-i\beta\Omega_3\tau}}{(\Omega_3-\Omega_1)(\Omega_4-\Omega_3)(\Omega_3-\Omega_2)}+\frac{\Omega_4 e^{-i\beta\Omega_4\tau}}{(\Omega_4-\Omega_1)(\Omega_4-\Omega_2)(\Omega_4-\Omega_3)}\right]d\beta \qquad (4.8)$$

Исследуем асимптотику этого выражения при $\tau \gg 1$. Для больших значений времени из спектра начального возмущения останутся существенными лишь самые низкочастотные и самые высокочастотные гармоники, а остальные успеют затухнуть. Исходя из этих соображений, исследуем подинтегральное выражение для больших и малых значений β. Оценим сначала вклад в возмущение плотности магнитозвуковых частот, определяемых формулой (4.3). Исследование, аналогичное проведенному при получении асимптотики в альфвеновской ветви частот, дает следующее выражение:

$$\rho_1(\xi,\tau)=\frac{(2\pi/\tau)^{1/2}\overset{\circ}{H_y}(0)}{[(1+\eta)^2-4\eta\cos^2\theta]^{1/2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{a_+}}\left[\exp\left(-\frac{(\xi-c_+\tau)^2}{2a_+\tau}\right)+\exp\left(-\frac{(\xi+c_+\tau)^2}{2a_+\tau}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{a_-}}\left[\exp\left(-\frac{(\xi-c_-\tau)^2}{2a_-\tau}\right)+\exp\left(-\frac{(\xi+c_-\tau)^2}{2a_-\tau}\right)\right]\right\} \qquad (4.9)$$

где обозначения даются (4.3).

Здесь уже имеется по две одиночные волны колоколообразной формы, распространяющиеся в каждую сторону, причем со скоростью быстрых магнитозвуковых волн движется положительное возмущение плотности, а со скоростью медленных — отрицательное. Аналогичный вид имеют решения и для остальных переменных.

Исследуем вклад в выражение для плотности высокочастотных гармоник, причем для простоты положим $H_y^\circ(k)={}^1/_2\,\pi$. В остальных случаях вклад этих гармоник будет меньше просто из-за малой их роли в спектре начального возмущения. Интеграл (4.8) следует рассмотреть на участке изменения $|\beta|$, начиная с некоторого достаточно большого β_0 (так сказать, нижней границы звуковых гармоник) до бесконечности. Привлекая формулы (4.4), можно показать, что этот вклад равен

$$\rho_2(\xi,\tau)=-\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}\tau\eta\sin^2\theta\right)[\mathrm{si}\,\beta_0(\xi-\tau)+\mathrm{si}\,\beta_0(\xi+\tau)]+ \qquad (4.10)$$

$$+\left(\frac{2}{\pi}\right)\eta\cos^2\theta\exp(-\tau\eta\cos^2\theta)\,\xi\,\mathrm{si}\beta_0\xi \qquad \left(si\,x=-\int\limits_x^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt\right)$$

Таким образом, звуковые гармоники дают вклад, экспоненциально затухающий со временем. Этот вклад состоит из бегущей и «стоячей» части. Бегущая часть представляет собой последовательность волн с уменьшающейся амплитудой, распространяющихся со скоростью (размерной), равной скорости звука $\pm\, c_0$. Можно вычислить величину возмущения плотности в главном максимуме бегущей волны, она оказывается равной

$$\rho_2(\xi = \pm\tau,\tau) = -\frac{1}{4}\exp\left(-\frac{1}{2}\tau\eta\sin^2\theta\right)$$

или, в размерном виде,

$$\rho_2(x = \pm c_0 t, t) = -\frac{H_0^2\sin\theta}{16\pi c_0^2}\exp\left(-\frac{H_0^2\sin^2\theta}{4\pi\rho_0\nu_m}t\right) \qquad (4.11)$$

Различие в степени затухания со временем вкладов от магнитозвуковых и чисто звуковых гармоник возникает из-за разного характера их поглощения в магнитном поле, обусловленного проводимостью среды. Затухание первых пропорционально квадрату частоты, а поглощение звуковых волн не зависит от частоты, т. е. самые низкочастотные колебания затухают медленно, в то время как все достаточно высокочастотные колебания затухают с одинаковой интенсивностью.

Исследования для остальных величин, а также вычислений с другими начальными данными, здесь проводиться не будут, так как они приводят к аналогичным результатам.

Отметим, что асимптотика (4.9) не годится, так же как и в альфвеновском случае, для углов θ, близких к $\pi/2$. Можно показать, что она справедлива для углов, подчиняющихся условию

$$\cos\theta \gg [(1+\eta)/\eta\tau]^{1/2} \qquad (4.12)$$

Это связано с тем обстоятельством, что мы приближенно находим корни уравнения четвертого порядка (4.2) при $\beta \ll 1$ и не имеем равномерной асимптотики корней этого уравнения, если одновременно $\beta \to 0$ и $\cos^2\theta \to 0$, которую давали бы аналитические формулы для корней уравнения четвертого порядка. Если в (4.2) положить с самого начала $\cos^2\theta = 0$, то корни $\Omega_{1,2}$ непрерывно перейдут в корни этого укороченного уравнения, а для двух других корней этого не будет. В результате для практически важного частного случая распространения возмущений поперек внешнего магнитного поля асимптотику надо искать отдельно.

Общее решение для плотности в случае $\theta = \pi/2$ получается, если положить $\Omega_4 = 0$ в формуле (4. 8). Асимптотика получающегося при этом выражения для $\tau \gg 1$ имеет вид

$$\rho(\xi,\tau) = H_y{}^\circ(0)\left(\frac{\pi}{\tau(1+\eta)}\right)^{1/2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\eta}}\left[\exp\left(-\frac{(1+\eta)(\xi-\tau\sqrt{1+\eta})^2}{2\eta\tau}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\exp\left(-\frac{(1+\eta)(\xi+\tau\sqrt{1+\eta})^2}{2\eta\tau}\right)\right]-\exp\left(-\frac{(1+\eta)\xi^2}{4\tau}\right)\right\} \qquad (4.13)$$

Таким образом, имеем две бегущие в разные стороны со скоростью ускоренного звука одиночные волны с максимумом возмущения. Вблизи нуля плотность имеет минимум. Характерно, как и для случая произвольного θ, что острота бегущего максимума определяется не только проводимостью среды, как для случая волн альфвеновского типа, но и величиной внешнего магнитного поля.

Корни уравнения (4.2) для $\beta \gg 1$ непрерывно переходят при $\theta \to \pi/2$ в корни этого же уравнения при $\cos^2\theta = 0$, поэтому асимптотика (4.10) верна при всех значениях угла θ.

5. Оценим, что значит критерий $\tau \gg 1$ ($t \gg \nu_m/c_0^2$) для некоторых реальных систем. Для дейтериевой плазмы при $T \approx 100$eV скорость звука $c_0 \approx 5\cdot10^6$ *смсек*$^{-1}$, $\nu_m \approx 10^4$*см*$^2\cdot$*сек*$^{-1}$, т. е. $t \gg 4\cdot10^{-10}$ *сек*. Для плазмы воздуха при $T \approx 3000°$ скорость звука $c_0 \approx 10^5$ *смсек*$^{-1}$ и $\sigma \approx 10^{12}$ *сек*$^{-1}$ (с присадкой щелочных металлов). При этом должно быть $t \gg 7\cdot10^{-3}$ *сек*. Путь, проходимый возмущением, может быть оценен умножением полученного времени на скорость быстрого звука. Для воздушной плазмы таким «критическим» размером в приведенных выше условиях служит длина порядка 7 *м*.

На больших расстояниях от места возникновения возмущения начинает действовать полученная здесь асимптотическая картина.

В средах с дисперсией и сильным поглощением бывает трудно определить скорость передачи сигнала, так как понятие групповой скорости здесь теряет смысл. Это исследование показывает, что скорость передачи начального возмущения через некоторое время после его возникновения можно отождествить со скоростями распространения максимумов (минимумов) возмущения, которые двигаются со скоростями низкочастотных колебаний. Экстремумом, связанным с высокочастотными колебаниями, обычно можно пренебречь. Такие выводы применимы не только к магнитной гидродинамике, но и к другим объектам, например, в теории нестационарного одномерного течения с трением в реках [4], или к средам с большой теплопроводностью [5]. В последнем случае дисперсионное уравнение полностью совпадает с уравнением (4.1) при $\cos\theta = 0$, причем роль обычного звука здесь играет изотермический (высокочастотный) звук, а роль ускоренного — адиабатический (низкочастотный) звук.

Несколько слов о начальной стадии распространения возмущения для $\tau \ll 1$. При этом поведение возмущения будет сильно определяться начальными данными. В принципе задачу можно решать, разлагая в ряд Тейлора по τ вблизи $\tau = 0$ общее решение (3.9) или (4.8). Однако, даже для функции Грина нахождение уже первого члена разложения представляет значительные трудности. Можно лишь сказать, что эти члены разложения будут описывать какую-то деформацию начального импульса, и если определять скорость распространения возмущения по скорости распространения его экстремумов, то в моменты $\tau \ll 1$ такая скорость будет равна нулю. Для получения ясности в этом вопросе необходимо иметь полное решение задачи для любых значений τ, что требует большого численного счета.

Отметим, что близкие вопросы изучаются в работе Уитема [6], где дано подробное решение граничной задачи для случая распространения возмущений поперек магнитного поля, причем с учетом токов смещения. Задача решена методом преобразования Лапласа. Для больших значений времени в предположении, что граничное возмущение достаточно быстро затухает со временем, характер его решения совпадает с нашим в соответствующем частном случае. Именно получено, что «главное» возмущение движется со скоростью ускоренного звука, а возмущения по звуковой и световой характеристикам затухают экспоненциально. Картина несколько усложняется наличием «пограничного слоя», возникающего вблизи места действия источника. В этой статье основное внимание отводится математической стороне дела, а физической интерпретации результатов уделяется меньше внимания. В целом можно считать, что работа [6] и данная взаимно дополняют одна другую в вопросе о распространении возмущений в средах с сильной дисперсией и поглощением, рассматривая его с разных точек зрения.

В заключение автор благодарит Л. А. Дикого, К. Б. Павлова и К. П. Станюковича за советы и обсуждения.

Поступила 24 XI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Голицын Г. С., Станюкович К. П. Некоторые вопросы магнитогазодинамики с учетом конечной проводимости. ЖЭТФ, 1957, т. 33, вып. 6 (12).
2. Брагинский С. И. Магнитная гидродинамика слабо проводящей жидкости. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 5 (11).
3. Сиротина Е. П., Сыроватский С. И. Структура ударных волн слабой интенсивности в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ. 1960, т. 39, вып. 3 (9).
4. Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves. I Flood movements in long rivers. Proc. Roy. Soc. 1955, A229, p. 281.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, § 77. М., Гостехиздат, 1953.
6. Whitham G. B. Some comments on wave propagation and shock wave structure with applications to magnetohydrodynamics. Comm. Pure Appl. Math. 1959, XII, No. 1.