ПМТФ, № 4, 1965

# ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ФОКУСИРОВКА ЛЕНТОЧНОГО ПУЧКА

*В. А. Сыровой*

*(Москва)*

Получение решения уравнений пучка, удовлетворяющего некоторым условиям на эмиттере, составляет, как известно, лишь часть задачи. Всякое такое решение определяет течение в неограниченной области, в то время как действительные пучки имеют конечные размеры. Для реализации течения, описываемого полученным решением, необходимо рассмотреть вопрос о системе фокусирующих электродов, обеспечивающих существование пучка данной конфигурации. Решение этого вопроса сводится к задаче об аналитическом продолжении потенциала, заданного на границе пучка вместе со своей нормальной производной, в область, свободную от зарядов, т. е. к задаче Коши для уравнения Лапласа. Впервые применительно к проблеме формирования ленточного пучка при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, она была поставлена и решена в [1]. В работах [2—4] идеи [1] обобщены на случай плоских криволинейных траекторий. В [5] рассмотрены математические основы метода электростатической фокусировки (проблемы существования, единственности и корректности). Для ряда течений решение получено в терминах интегралов по контуру, достаточно трудно поддающихся оценке [6]. В работе [7] приводится аналитическое решение задачи о формировании произвольных осесимметричных пучков. Переход в комплексную область и преобразование уравнения Лапласа к гиперболическому виду позволили дать решение в более удобной для получения конечных результатов форме. Известно лишь несколько аналитических решений в элементарных функциях и в замкнутой форме задачи о фокусировке стационарных потоков [1,4,8—15] (плоский диод [1,13,15], плоский магнетрон [4,8,9], гиперболический [10] и эллиптический [11,12] пучки, течение по окружностям и спиралям в некоторых неоднородных магнитных полях [14]). В [16] формирующие электроды определены для нескольких нестационарных пучков.

В работе [17] исследованы режимы, которые могут иметь место для моноэнергетических нерелятивистских потоков одноименно заряженных частиц при течении между параллельными плоскостями. В [15] обсуждался вопрос о фокусировке ленточного пучка при произвольных условиях на эмиттере и монотонном изменении потенциала. Ниже рассматривается случай (случай С — по терминологии [14]), когда потенциал между электродами имеет экстремум (минимум для электронов) (§ 1). Точное решение сравнивается с приближенным, приведенным в [18]. В § 2 показано, как результаты предыдущего параграфа могут быть использованы для получения точного аналитического решения задачи о периодической фокусировке ленточного пучка [19,20]. Дано сравнение результатов § 2 и работ [20,21], в которых приведено приближенное решение этой задачи.

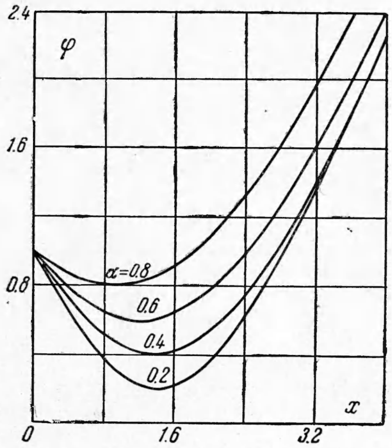
§ 1. Рассмотрим случай, когда потенциал между электродами имеет экстремум. Будем считать, что $\varphi_1$ — потенциал эмиттера $x = 0$ и что скорость на нем равна $(-2\eta\varphi_1)^{1/2}$. Перейдем к безразмерным переменным $x^\circ$, $\varphi^\circ$, измеряя длины вдоль оси $x$ в единицах $a$ и относя потенциалы к $\varphi_1$

$$x = ax^\circ, \qquad \varphi = \varphi_1 \varphi^\circ, \qquad a = \left(\sqrt{2\,|\,\eta\,|}\,/\,9\pi\,|\,j_0\,|\right)^{1/2} \varphi_1^{3/4}$$

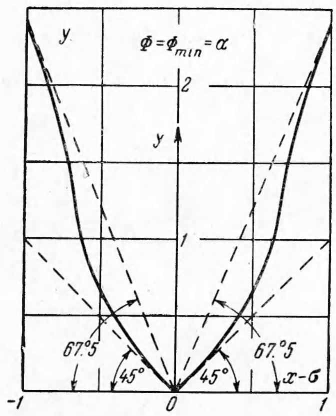
Под $a$ понимается расстояние, при котором (в соответствии с решением Чайлда — Лэнгмюра) разность потенциалов $\delta\varphi = \varphi_1$ обеспечивает ток плотности $j_0$; $\eta$ — удельный заряд частицы. Решение уравнений пучка в этом случае в безразмерных переменных (символ безразмерной величины опущен) определяется формулой [17]

$$x = \mp (\varphi^{1/2} + 2\alpha^{1/2}) \sqrt{\varphi^{1/2} - \alpha^{1/2}} + (1 + 2\alpha^{1/2}) \sqrt{1 - \alpha^{1/2}} \tag{1.1}$$

При знаке минус выражение (1.1) определяет решение в интервале $1 \geqslant \varphi \geqslant \alpha$, $0 \leqslant x \leqslant \sigma$, знак плюс имеет место для $\varphi \geqslant \alpha$, $x \geqslant \sigma$; здесь $\alpha = \varphi(\sigma) = \varphi_{\min}$. Распределение потенциала $\varphi = \varphi(x)$ типа C при различных значениях $\alpha$ показано на фиг. 1.




Фиг. 1




Фиг. 2

Будем считать, что заряды занимают область $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$. Для того чтобы получить уравнения фокусирующих электродов, заменим $x$ в (1.1) на $z = x + iy$, а $\varphi$ представим в виде $\varphi = \Phi + i\Psi$. Отделяя затем действительную и мнимую части, приходим к выражениям вида

$$x = x(\Phi, \Psi; \alpha), \qquad y = y(\Phi, \Psi; \alpha)$$

Полагая $\Phi = \Phi_0$, получим параметрическое уравнение формирующего электрода с потенциалом $\Phi = \Phi_0$

$$x = x(\Phi_0, \Psi; \alpha), \qquad y = y(\Phi_0, \Psi; \alpha)$$

Для течения, описываемого формулами (1.1), эквипотенциальные поверхности в области, внешней к пучку, определяются уравнениями

$$x - (1 + 2\alpha^{1/2})\sqrt{1 - \alpha^{1/2}} = x - \sigma =$$

$$= \mp 2^{-1/2}\left[\left(\sqrt{{}^1/_2(r + \Phi)} + 2\alpha^{1/2}\right)\sqrt{R + \sqrt{{}^1/_2(r + \Phi)} - \alpha^{1/2}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{{}^1/_2(r - \Phi)}\sqrt{R - \sqrt{{}^1/_2(r + \Phi)} + \alpha^{1/2}}\right]$$

$$y = 2^{-1/2}\left[\left(\sqrt{{}^1/_2(r + \Phi)} + 2\alpha^{1/2}\right)\sqrt{R - \sqrt{{}^1/_2(r + \Phi)} + \alpha^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{{}^1/_2(r - \Phi)}\sqrt{R + \sqrt{{}^1/_2(r + \Phi)} - \alpha^{1/2}}\right] \qquad (1.2)$$

$$r = \sqrt{\Phi^2 + \Psi^2}, \qquad R = \sqrt{r - \sqrt{2\alpha(r + \Phi)} + \alpha}$$

При $\Psi \to \infty$ формулы (1.2) дадут для $x$ и $y$ следующие выражения:

$$x - \sigma = \mp {}^1/_2\left(\sqrt{1 + {}^1/_2\sqrt{2}} - \sqrt{1 - {}^1/_2\sqrt{2}}\right)\Psi^{3/4}$$

$$y = {}^1/_2\left(\sqrt{1 - {}^1/_2\sqrt{2}} + \sqrt{1 + {}^1/_2\sqrt{2}}\right)\Psi^{3/4}$$

Таким образом, прямые $y = \mp(1 + \sqrt{2})(x - \sigma)$, подходящие к границе пучка под углом в 67°.5, являются асимптотами семейства эквипотенциальных кривых $\Phi = \mathrm{const}$. Учитывая, что нулевому значению параметра $\Psi$ соответствует граница пучка $y = 0$, получим, что все электроды с потенциалом $\Phi > \alpha$ подходят к ней под прямым углом, так как при малых $\Psi$

$$x = \lambda + \mu \Psi^2, \qquad y = \nu \Psi$$

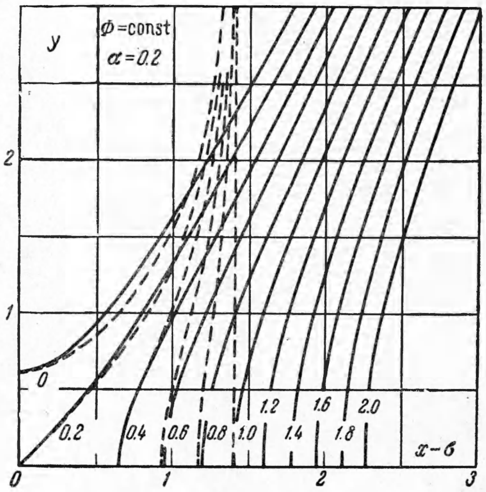
$$(\lambda,\ \mu,\ \nu = \mathrm{const})$$

При $\Phi = \alpha$ и малых $\Psi$ формулы (1.2) дают [1]

$$x - \sigma = \mp {}^3/_2\, \alpha^{1/4} \sqrt{\Psi}$$

$$y = {}^3/_2\, \alpha^{1/4} \sqrt{\Psi}$$

Следовательно, эквипотенциальные поверхности $\Phi = \alpha$ составляют с границей пучка 45°. На фиг. 2 дана схема электрода с минимальным потенциалом $\Phi = \alpha$.

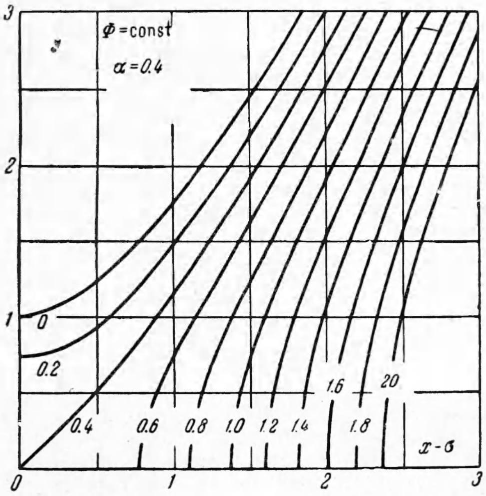



Фиг. 3

В силу симметрии потенциала $\varphi(x)$ относительно неособой точки $x = \sigma$ в интервале $0 \leqslant x \leqslant 2\sigma$ для электродов с потенциалом $\Phi < \alpha$ имеем

$$dy \,/\, dx = 0 \quad \text{при} \quad x = \sigma, \quad \Phi < \alpha$$

Для случая, когда между электродами образуется виртуальный эмиттер ($\alpha = 0$) и ток частично отражается [17], формирующие электроды по обе стороны от $x = \sigma$ совпадают с определенными в [1]. Точка $x = \sigma$ является особой $(d^n\varphi/dx^n|_{x=\sigma} = \infty,\ n = 2, 3, \ldots)$ и при аналитическом продолжении потенциала порождает линию $x = \sigma$, на которой $\Phi$ и $\partial\Phi \,/\, \partial x$ терпят разрыв.




Фиг. 4

Кривые $\Phi = \mathrm{const}$ (сплошные кривые) для различных значений $\alpha$ изображены на фиг. 3—6. Эквипотенциальные поверхности $\alpha \leqslant \Phi \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant \sigma$ получаются отражением поверхностей $\alpha \leqslant \Phi \leqslant 1$ при $x \geqslant \sigma$ относительно оси $y$.

Итак, при ненулевой скорости и поле на эмиттере $u_0, \varepsilon_0 \neq 0$ [15] и эмиссии, ограниченной температурой $u_0 = 0$, $\varepsilon_0 \neq 0$ [13,15], нулевая эквипотенциаль подходит к границе пучка под прямым углом; при $u_0 \neq 0$, $\varepsilon_0 = 0$ (или в случае минимума потенциала) — под углом в 45°; при $u_0 = \varepsilon_0 = 0$ — под углом в 67°.5 [1]. Непрерывная зависимость угла наклона нулевой эквипотенциали от $u_0$, $\varepsilon_0$ отсутствует.

Можно показать, что углы в 45° и 90°, подобно [5] углу в 67°.5, будут характерными не только для плоского диода, но и при эмиссии с произ-

---

[1] При $u_0 \neq 0$, $\varepsilon_0 = 0$ (случай 2, рассмотренный в [15]) $x$ и $y$ ведут себя при малых $\Psi$ точно так же; поэтому кривая $\Phi = 0$ (фиг. 6) подходит к границе пучка под углом в 45°, а не под прямым углом.

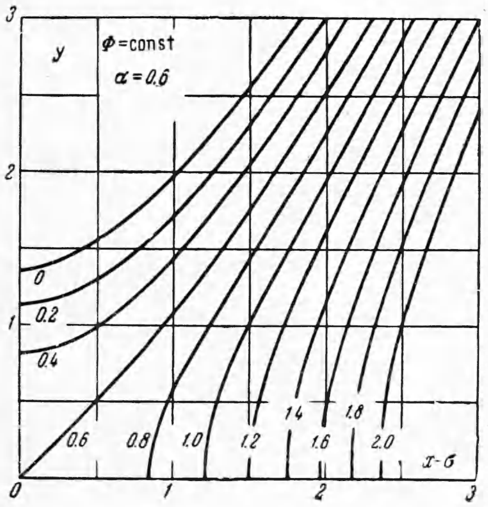
вольной поверхности. Дискретная зависимость угла наклона $\vartheta_0$ нулевой эквипотенциали от $u_0$, $\varepsilon_0$ сохраняется и при релятивистских скоростях вопреки утверждению [22] о непрерывном изменении $\vartheta_0$ с изменением потенциала коллектора.

В работе [18] было дано приближенное решение рассмотренной задачи для случая, когда минимум потенциала приходится на середину межэлектродного промежутка. Оно основывалось на аппроксимации потенциала на границе пучка квадратной параболой, причем при $\alpha > 0.71$ ошибка составляла не более 0.5%. Центральный электрод оказался плоскостью, подходящей к границе пучка под углом в 45°.

На фиг. 7 в координатах $x - \sigma$, $y$ построены кривые $\Phi = \alpha$ для различных $\alpha$. Видно, что отличие точного решения от приближенного $y_a = x - \sigma$ скоро становится заметным. Для сравнения этих решений при $\alpha = 0.8$ приводим значения $\delta = 1 - y_a/y$, где $y_a$ — приближенное, а $y$ — точное значение ординаты формирующего электрода, вычисленные для некоторых значений $x - \sigma$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - \sigma =$ | 0.142 | 0.283 | 0.316 | 0.446 | 0.545 | 1.07 | 1.65 | 2.11 |
| $\delta$, % = | 0.175 | 0.377 | 0.585 | 1.04 | 1.57 | 5.67 | 12.4 | 17.3 |

Центральный электрод $\Phi = 0.8$ определен с той же точностью, что и потенциал на границе пучка, при $x - \sigma < 0.3$.



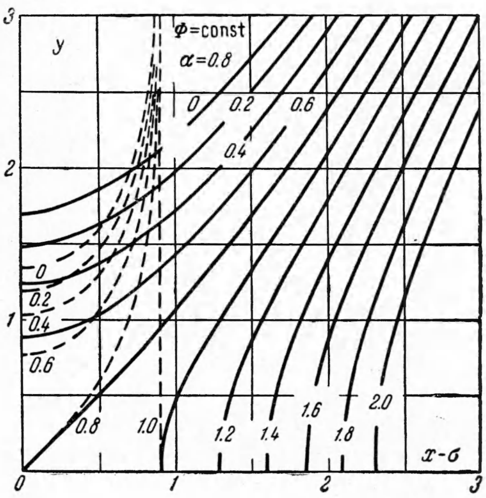

Фиг. 5

Как известно, задача Коши для уравнения Лапласа является некорректной: малое возмущение начальных условий на границе вызывает изменение решения, неограниченно нарастающее при удалении от нее [5,23,24]. Эта неустойчивость затрудняет численное интегрирование и отыскание решения при помощи разложения начальных условий в ряды или их приближенного задания [25—27 ]. В [25] рассмотрен случай, когда потенциал на границе $\varphi = (1 + x^2)^{-1}$ аппроксимируется с ошибкой не более 1.5% полиномом десятой степени. Сравнение приближенного и точного решений задачи Коши обнаруживает чрезвычайно сильное различие между двумя семействами эквипотенциалей; точное решение имеет особую точку (0,1), которая, естественно, не сохраняется при указанной аппроксимации; в приближенном решении появляется точка ветвления, отсутствующая у точного решения. В [26] показано, что эквипотенциальные поверхности, определенные по трем и шести членам разложения, сильно отличаются друг от друга. В [28] был предложен численный метод решения задачи Пирса, в котором уравнение Лапласа записывалось в конечных разностях. В [27] вычисления [28] были повторены с большей точностью, причем оказалось, что решение сильно осциллирует: при стремлении шага к нулю численное решение не стремится к точному. В [29] оценивается скорость роста ошибки и предложены схемы счета, которые должны быть устойчивыми. В [30] указана еще одна причина, объясняющая, по крайней мере отчасти, результаты [27]: в [28] при решении используются старшие производные, в то время как значение потенциала и его нормальной производной на границе однозначно определяет решение во всей области. Конечноразностная схема интегрирования может быть успешно применена, если переходом в комплексную область уравнение Лапласа приводится к гиперболическому типу [31,32].

Проведенное выше рассмотрение дает еще один пример неустойчивости решения для задачи, представляющей интерес с практической точки зрения.

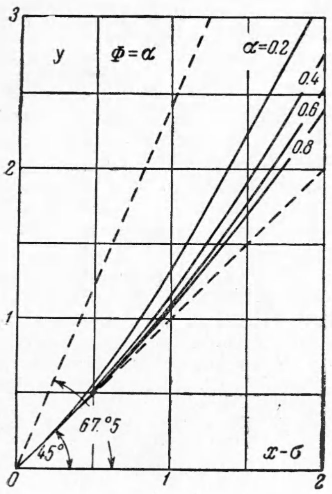
В ряде работ для отыскания решения используется разложение потенциала вблизи границы пучка в степенные ряды [26,33—38]. Доказательство абсолютной сходимости этих рядов в силу нелинейности уравнений пучка не представляется возможным. Поэтому построить решение в заданной области с заданной точностью [5] также не удается. При получении решений указанным способом следует иметь в виду, что они мало отличаются от точного решения лишь в достаточной близости от границы пучка.

§ 2. Результаты предыдущего параграфа могут быть использованы для точного аналитического решения задачи о периодической фокусировке ленточного пучка [19–21]. Распределение потенциала в интервале $2k\sigma \leqslant x \leqslant 2(k+1)\sigma$ ($k = 0, 1, \ldots$) задается формулами (1.1), причем $\varphi(0) = \varphi(2\sigma) = 1$, а $\varphi(\sigma) = \alpha$ (фиг. 1). Разрыв $d\varphi / dx$ на концах каждого из интервалов требует наличия в пучке сеток, находящихся под потенциалом, равным 1. Частным случаем задачи § 1 будет определение электродов для одного из элементов периодической фокусирующей системы $2k\sigma \leqslant x \leqslant 2(k+1)\sigma$. Остается исследовать сопряжение двух таких элементов, так как решение в § 1 не было периодическим.




Фиг. 6

Аналогичная ситуация имеет место в задаче о фокусировке произвольного числа параллельных ленточных пучков. В работах [5,39] показано, что в области между двумя пучками не может существовать решения $\Phi = \Phi(x, y)$, непрерывного вместе с первыми производными. При этом в [5] эта задача приведена в качестве примера невыполнения теоремы единственности для случая, когда условия Коши заданы на неаналитической границе. В [39] доказательство основано на том, что аналитическое продолжение потенциала, заданного на границе одного пучка, не обязано совпадать с продолжением потенциала с границы второго пучка, что ведет к физически недопустимой многозначности решения. Невозможность непрерывного решения вытекает также и из следующего рассуждения. Потенциал $\Phi(x, y)$ будет непрерывной вместе со своими производными функцией, если существует конформное отображение плоскости с одной выброшенной полосой на плоскость с системой таких вырезов. Распределение потенциала вдоль границ пучков должно быть инвариантным относительно этого отображения, так как обе плоскости — физические. При определении фокусирующих электродов в случае плоских криволинейных траекторий [2,4] это требование было лишним, ибо плоскость $u, v$, получаемая при отображении границы пучка на действительную ось $v = 0$, была вспомогательной и не имела физического смысла. Ясно, что отображения, удовлетворяющего двум сформулированным требованиям, не существует. Для поддержания двух параллельных пучков необходимо сообщить плоскости, параллельной их границам и равноотстоящей от них, заряд с поверхностной плотностью




Фиг. 7

$$q = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big|_{y=h} \qquad (\lim_{x\to\infty} q(x) = 0)$$

($2h$ — расстояние между пучками)

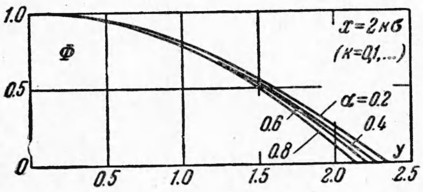
Точно так же решается вопрос о сопряжении элементов периодической фокусирующей системы. В [20] дано приближенное решение задачи о периодической фокусировке. В основе этого решения лежит аппроксимация потенциала на границе пучка выражением, которое в принятых в § 1 безразмерных переменных имеет вид

$$\varphi = 1 - (1 - \alpha)\cos(\pi x / 2\sigma) \tag{2.1}$$

Соответствующее приближенное решение уравнения Лапласа определяется так:

$$\Phi(x, y) = 1 - (1 - \alpha)\cos(\pi x / 2\sigma)\,\mathrm{ch}(\pi y / 2\sigma) \tag{2.2}$$

Ошибка при пользовании выражением (2.1) вместо точного решения (1.1) при $\alpha = 0.25$ не превышает 3%. Представление потенциала формулой (2.1) обеспечивает периодический характер решения. Кривые $\Phi(x, y) = \text{const}$, определяемые формулой (2.2), изображены пунктиром на фиг. 3, 6 для $\alpha = 0.2$ и $\alpha = 0.8$. Видно, что электроды с потенциалом $\Phi = 1$ являются плоскостями $x = 2\sigma$.




Фиг. 8

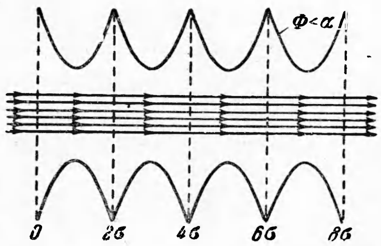
В соответствии со сказанным выше, при точном решении плоскость $x = 2\sigma$ должна быть не эквипотенциальной поверхностью, а заряженной плоскостью. Закон изменения потенциала на ней определяется выражениями

$$\begin{aligned} \sigma &= 2^{-1/2}\left[\left(\sqrt{{}^1/_2(r+\Phi)} + 2\alpha^{1/2}\right)\sqrt{R + \sqrt{{}^1/_2(r+\Phi)} - \alpha^{1/2}} -\right. \\ &\left. - \sqrt{{}^1/_2(r-\Phi)}\sqrt{R - \sqrt{{}^1/_2(r+\Phi)} + \alpha^{1/2}}\right] \\ y &= 2^{-1/2}\left[\left(\sqrt{{}^1/_2(r+\Phi)} + 2\alpha^{1/2}\right)\sqrt{R - \sqrt{{}^1/_2(r+\Phi)} + \alpha^{1/2}} +\right. \\ &\left. + \sqrt{{}^1/_2(r-\Phi)}\sqrt{R + \sqrt{{}^1/_2(r+\Phi)} - \alpha^{1/2}}\right] \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Кривые $\Phi(y)$, задаваемые формулами (2.3), для разных значений $\alpha$ представлены на фиг. 8. Плотность поверхностного заряда плоскости $x = 2\sigma$

$$q = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{x=2\sigma} \qquad (\lim_{y\to\infty} q(y) = 0)$$

где $\Phi$ определяется выражениями (1.2).




Фиг. 9

Результаты, представленные на фиг. 3, 6, позволяют сравнить точное и приближенное решения. Видно, что различие между ними увеличивается по мере приближения $\Phi$ к единице. Здесь действует искусственно введенная в [20] периодичность приближенного решения. На фиг. 9 изображена одна из возможных схем периодической фокусировки. В качестве низковольтных электродов используются поверхности $\Phi = \text{const} < \alpha$. Плоскости $x = 2k\sigma$ с переменным потенциалом, осуществляющие экранировку одного элемента системы от другого, могут быть выполнены в виде достаточно густой сетки, потенциал на которой меняется в соответствии с выражением (2.3).

Приближенное решение [18] также может быть использовано при построении периодической фокусирующей системы, что и было сделано в работе [21]. При этом высоковольтный электрод имеет вид двояковыпуклой линзы, причем относительно ее толщины не дается каких-либо рекомендаций. Ясно, что такие электроды будут вносить значительные возмущения не только вдали от пучка, но и на самой его границе. По-видимому, точное решение для периодической фокусировки цилиндрического пучка, которое может быть построено на основании результатов [5,7], также будет значительно отличаться от приближенного решения [20]. При этом плоскости $x = 2k\sigma$, как и выше, не будут эквипотенциальными поверхностями.

Поступила 13 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. P i e r c e J. R. Rectilinear Electron Flow in Beams. J. Appl. Phys., 1940, vol. 11.
2. L o m a x R. J. Exact Electrode Systems for the Formation of a Curved Space-Charge Beam. J. Electr. Contr., 1957, vol. 3, No. 4.
3. L o m a x R. J. Exact Electrode Systems for the Formation of a Curved Space-Charge Beam. J. Electr. Contr., 1959, vol. 7, No. 6.
4. K i r s t e i n P. T. On the Determination of the Electrodes Required to Produce a Given Electric Field Distribution Along a Prescribed Curve. Proc. IRE, 1958, vol. 46.
5. R a d l e y D. E. The Theory of the Pierce Type Electron Gun. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 2.
6. R a d l e y D. E. Electrodes for Convergent Pierce-Type Guns. J. Electr. Contr., 1963, vol. 15, No. 5.

7. Harker K. J. Solution of the Cauchy Problem for Laplace's Equation in Axially Symmetric Systems. J. Math. Phys., 1963, vol. 4, No. 7.
8. Kino G. S. A Design Method for Crossed-Field Electron Guns. IRE Trans. Electr. Dev., 1960, vol. ED — 7, No. 3.
9. Kino G. S., Taylor N. J. The Design and Performance of a Magnetron Injection Gun. IRE Trans. Electr. Dev., 1962, vol. ED — 9, No. 1.
10. Rosenblatt J. Three-Dimensional Space-Charge Flow. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 8.
11. Kent G. Generalized Brillouin Flow. Communication and Electronics, 1960, vol. 79, No. 48
12. Pöschl K., Veith W. Generalized Brillouin Flow. J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, No. 3.
13. Sugata E., Terada M., Hamada H., Pack H. Analytical Design of Electron Gun with Temperature-Limited Cathode. Technology Rep. Osaka Univ., 1962, vol. 12, No. 495.
14. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений плоского стационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1962, № 4.
15. Сыровой В. А. Решение задачи Пирса для ленточного пучка при произвольных условиях эмиссии. ПМТФ, 1964, № 2.
16. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений нестационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1964, № 1.
17. Fay C. E., Samuel A. L., Shockley W. On the Theory of Space Charge Between Parallel Plane Electrodes. Bell System Techn. J., 1938, vol. 17, No. 1.
18. Молоковский С. И. Аналитический расчет геометрии электродов для электростатической фокусировки ленточного пучка. Радиотехн. и электрон., 1962, т. 7, № 6.
19. Siekanowicz W. W., Vaccaro F. E. Periodic Electrostatic Focusing of Laminar Parallel-Flow Electron Beams. Proc. IRE, 1959, vol. 47, No. 3.
20. Siekanowicz W. W. Derivation of Ideal Electrode Shapes for Electrostatic Beam Focusing. RCA Rev., 1962, vol. 23, No. 1.
21. Molokovsky S. I. Electrostatic Focusing Systems for Intense Electron Beams. J. Instn Telecommunic. Engrs, 1963, vol. 9, No. 4.
22. Игнатенко В. П. Формирование релятивистского ленточного пучка заряженных частиц. Радиотехн. и электрон., 1963, т. 8, № 1.
23. Hadamard J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. Dover Publication, New York, 1952.
24. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Физматгиз, 1961.
25. Berz F. Note on the Potential Derived from Axial Values in Electron Optics. Philos. Mag., 1950, vol. 41, No. 314.
26. Hechtel R. Zur Bestimmung der Elektrodenformen von Elektronenkanonen nach Pierce. Telefunken Zeitung, 1955, B 28, H 110.
27. Brewer G. R. Note on the Determination of Electrode Shapes for a Pierce-Type Electron Gun. J. Appl. Phys., 1957, vol. 28, No. 5.
28. Ho Kuo-Chu, Moon R. J. Electrostatic Potential Plotting for Use in Electron Optical Systems. J. Appl. Phys., 1953, vol. 24, No. 9.
29. Meltzer B. The Stability of Computation of the Pierce-Cauchy Problem. J. Electr. Contr., 1960, vol. 8, No. 6.
30. Meltzer B., Dinnis A. R. A Note on Pierce Electrode Design. J. Electr. Contr., 1958, vol. 4, No. 5.
31. Harker K. J. Determination of Electrode Shapes for Axially Symmetric Electron Guns. J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 12.
32. Harker K. J. Electrode Design for Axially Symmetric Electron Guns. J. Appl. Phys., 1962, vol. 33, No. 5.
33. Harrison E. R. Approximate Electrode Shapes for Cylindrical Electron Beam. Brit. J. Appl. Phys., 1954, vol. 5, No. 1.
34. Daykin P. N. Electrode Shapes for Cylindrical Electron Beam. Brit. J. Appl. Phys., 1955, vol. 6, No. 7.
35. Sugai I. Numerical Analysis for Design of Electron Guns with Curved Electron Trajectories. Proc. IRE, 1959, vol. 47, No. 1.
36. Hechtel J. R. Electrostatic Focusing of Microwave Tubes. Microwave J., 1960, vol. 3, No. 12.
37. Игнатенко В. П. Получение сходящихся ленточных пучков заряженных частиц с большой плотностью тока. Ж. техн. физ., 1962, т. 31, № 1.
38. Zepp G. Production de faisceaux électroniques denses en régime relativiste. C. R. Acad. Sci., 1963, tome 256, No. 16.
39. Kirstein P. T. Comment on a Paper of D. E. Radley, «The Theory of the Pierce Type Electron Gun». J. Electr. Contr., 1958, vol. 5, No. 2.