

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТА ХОЛЛА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ М.Г.Д.
ГЕНЕРАТОРА С ДВУМЯ ПАРАМИ ЭЛЕКТРОДОВ

Е. Б. Холщевникова

(Москва)

В настоящее время уделяется большое внимание изучению характеристик м. г. д. генераторов с секционированными электродами при наличии эффекта Холла. Рассматривается несколько видов электрического соединения электродов: обычный м. г. д. генератор с секционированными электродами, м. г. д. генератор Холла, м. г. д. генератор смешанного типа и м. г. д. генератор Монтарди. Исследование указанных схем ведется по нескольким направлениям. В ряде работ используется предположение о бесконечно мелком секционировании [1-4]. В таких работах считается, что плотность тока \mathbf{j} в канале всюду однородна; определяются суммарные характеристики или наиболее выгодный угол соединения электродов. В другой группе работ решаются периодические задачи, когда считается, что процессы, происходящие в одной элементарной ячейке, повторяются в остальных ячейках; эффекты на концах канала не учитываются. В этих работах обычно предполагают, что длины электродов и изоляторов конечны, но малы по сравнению с высотой канала [5-7]. Наконец, в последней группе работ рассматриваются непериодические задачи. В работе [8] решена задача о распределении тока в канале с одной парой электродов, заключенных между бесконечно длинными изоляторами. В работе [8] найдено общее выражение для функции плотности тока в случае произвольного числа пар электродов и для любой схемы их электрического соединения при конечных размерах электродов и изоляторов. Однако численные расчеты были проведены только для периодической задачи, решение которой также получено в работе [8]; изучено влияние шага секционирования на характеристики генератора Монтарди.

В настоящей работе исследуется влияние эффекта Холла на характеристики м. г. д. генератора с двумя парами электродов в случае их симметричного и перекрестного соединений. Хотя совершенно очевидно, что на практике будут осуществляться только многосекционные каналы, рассмотрение м. г. д. генератора с двумя парами электродов позволяет качественно проанализировать различные эффекты, имеющие место в каналах с секционированными электродами, соединенными по различным электрическим схемам. В работе по формулам, полученным в результате решения соответствующих задач, проведены численные расчеты на ЭВМ М-20. Получены интегральные характеристики м. г. д. генераторов рассмотренных схем в зависимости от длин электродов и изоляторов, внешних нагрузок и параметра Холла $\omega \tau$.

§ 1. Будем искать решение задачи о распределении тока в плоском канале м.г.д. генератора с двумя парами электродов для следующих двух случаев их электрического соединения: а) каждая пара симметрично расположенных электродов соединяется через свою внешнюю нагрузку (фиг. 1, а); б) верхний электрод каждой пары соединяется через внешнюю нагрузку с нижним электродом соседней пары (фиг. 1, б). Для удобства задачу о распределении тока в канале с электрическим соединением по схеме а) назовем задачей А, а задачу о распределении тока в канале с электрическим соединением по схеме б) — задачей Б. В обоих случаях электроды одной пары KN и PQ отделяются от электродов другой пары ML и BC изоляторами NM и QB . На входе в канал и на выходе из него электроды граничат с бесконечно длинными изоляторами. В области комплексного переменного $z = x + iy$ координаты начальных и конечных точек электродов равны

$$K(-\lambda - l + i\delta), \quad N(-\lambda + i\delta), \quad M(\lambda + i\delta), \quad L(\lambda + l + i\delta) \\ C(\lambda + l), \quad B(\lambda), \quad Q(-\lambda), \quad P(-\lambda - l)$$

Здесь l — длина электрода, 2λ — длина изолятора, δ — высота канала. Токи, протекающие через нагрузки r_1 и r_2 , будем обозначать через I_1 и I_2 .

Задачи А и Б будем решать при следующих предположениях: площадь поперечного сечения канала, скалярная проводимость рабочего тела σ , магнитное поле $\mathbf{B} = (0, 0, -B)$, перпендикулярное направлению движения, и параметр Холла $\omega\tau$ постоянны; $\omega_i\tau_i \ll \omega_e\tau_e$, т. е. эффект проскальзывания ионов можно не учитывать; магнитное число Рейнольдса мало $R_m \ll 1$, и индуцированным магнитным полем можно пренебречь; течение плоское и установившееся; скорость среды является известной (например, из решения в первом приближении уравнений газодинамики) функцией координат $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y)$; размер канала в направлении магнитного поля принимается равным единице.

Плотность электрического тока \mathbf{j} и потенциал ϕ при сделанных предположениях определяются из системы уравнений.

Обобщенный закон Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \left(-\nabla\phi + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\omega\tau}{B} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.1)$$

Уравнение неразрывности тока

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (1.2)$$

В работе [9] показано, что если магнитное поле однородно ($\mathbf{B} = B_0 > 0$) и компоненты скорости можно представить в виде

$$\begin{aligned} V_x &= \partial\psi / \partial y \\ V_y &= -\partial\psi / \partial x \end{aligned} \quad (1.3)$$

то можно ввести аналитическую функцию

$$W(z) = j_y(z) + ij_x(z) \quad (1.4)$$

Представление (1.3) всегда возможно для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ (тогда ψ — функция тока) и при произвольной скорости $\mathbf{V} = \mathbf{V}(y)$ в канале постоянного сечения. В последнем случае

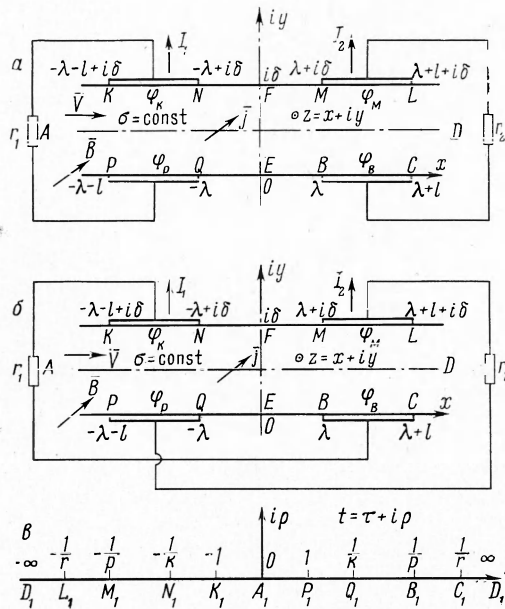
$$\psi = \int_0^y V dy$$

Пусть в нашем случае представление (1.3) возможно. Отобразим конформно полосу z на полуплоскость t при помощи преобразования

$$t = \tau + i\rho = e^{\pi(\lambda+l+z)/\delta} \quad (1.5)$$

При этом функция $W(z)$ перейдет в функцию $F(t)$, а граница канала в области z перейдет в вещественную ось в плоскости t . Отображение (1.5) показано на фиг. 1, в. Для параметров k , p и r , через которые определяются координаты конечных точек электродов в плоскости t , из (1.5) получим соотношения

$$k = e^{-\pi l/\delta}, \quad q = e^{-2\pi\lambda/\delta}, \quad p = kq, \quad r = kp = k^2q \quad (1.6)$$



Фиг. 1

Граничные условия, соответствующие рассматриваемым схемам, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, & j_x &= \omega \tau j_y & (KN, ML, BC, PQ) \\ j_y &= 0 & (-\infty K, NM, L\infty, \infty C, BQ, -P\infty) \\ j_x &= j_y = 0 & (F(t) = 0) & (x = \pm \infty) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} I_1 r_1 &= \varphi_K - \varphi_P, & I_1 &= \int_{-1}^{-1/k} j_y(\tau, 0) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau = \int_1^{1/k} j_y(\tau, 0) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau \quad (A) \\ I_2 r_2 &= \varphi_M - \varphi_B, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} I_1 r_1 &= \varphi_K - \varphi_B, & I_1 &= \int_{-1}^{-1/k} j_y(\tau, 0) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau = \int_{1/p}^{1/r} j_y(\tau, 0) \frac{\partial x}{\partial \tau} d\tau \quad (B) \\ I_2 r_2 &= \varphi_M - \varphi_P, \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь потенциалы на электродах KN , ML , BC и PQ , которые считаются идеальными проводниками, обозначены соответственно через φ_K , φ_M , φ_B и φ_P . Граничные условия (1.7) для области t можно записать в виде

$$a(\tau) j_y(\tau) + b(\tau) j_x(\tau) = c(\tau) \quad (1.10)$$

где $a(\tau)$, $b(\tau)$ и $c(\tau)$ — заданные функции τ .

Задача о нахождении аналитической в верхней полуплоскости функции (1.4), удовлетворяющей граничному условию (1.10), есть краевая задача Римана—Гильберта. Общий вид решения этой задачи для произвольного числа пар электродов и произвольной схемы их электрического соединения получен в работе [8]. Для нашего конкретного случая (канал с двумя парами электродов) функция $F(t)$, полученная из общего решения, равна

$$\begin{aligned} F(t) &= j_y(t) + i j_x(t) = i(t - L_1)^{-\nu/\pi-1} (t - M_1)^{\nu/\pi} (t - N_1)^{-\nu/\pi-1} \bar{t} - \bar{K}_1)^{\nu/\pi} \times \\ &\times (t - P_1)^{-\nu/\pi-1} (t - Q_1)^{\nu/\pi} (t - B_1)^{-\nu/\pi-1} (t - C_1)^{\nu/\pi} t (R_1 + R_2 t + R_3 t^2) \\ &\left(\nu = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{\omega \tau} \right), \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{\nu}{\pi} < 0 \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Константы R_1 , R_2 , и R_3 , входящие в (1.11), определяются для задачи А из условий (1.8), а для задачи Б — из условий (1.9). Буквами L_1 , M_1, \dots, C_1 обозначены концы электродов в плоскости t (фиг. 1, в). При пользовании формулой (1.11) вместо этих букв нужно подставлять координаты соответствующих точек в плоскости t .

После довольно громоздких преобразований можно получить следующие формулы для интегральных характеристик генератора:

$$\begin{aligned} I_1^\circ &= \frac{r_2^\circ + \beta e^\circ}{\Lambda}, & I_2^\circ &= \frac{r_1^\circ + \beta g^\circ}{\Lambda}, & N^\circ &= I_1^{\circ 2} r_1^\circ + I_2^{\circ 2} r_2^\circ \\ Q &= \int_0^{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j^2}{\sigma} dx dy = E(I_1 + I_2) - N, & \eta &= \frac{N}{N + Q} = \frac{N^\circ}{I_1^{\circ 2} + I_2^{\circ 2}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь r° — безразмерная нагрузка, I° — безразмерный ток, N° — безразмерная мощность, η — эффективность, E — э. д. с. м. г. д. генератора, Q — джоулева диссипация, Ω — объемный расход:

$$E = \frac{B}{c} \int_0^{\delta} V_x dy = \frac{B}{c} \Omega = \operatorname{const}, \quad r^\circ = \sigma r, \quad I^\circ = \frac{I}{\sigma E}, \quad N^\circ = \frac{N}{\sigma E^2}$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= r_1^\circ r_2^\circ + \beta b^\circ r_1^\circ + \beta c^\circ r_2^\circ + \beta^2 d^\circ, & \beta &= \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \\ b^\circ &= \frac{b}{a}, & c^\circ &= \frac{c}{a}, & d^\circ &= \frac{d}{a}, & e^\circ &= \frac{e}{a}, & g^\circ &= \frac{g}{a} \end{aligned}$$

Коэффициенты a, b, c, d, e и g для задач А и Б различны и представляют собой совокупности определенных интегралов, которые получаются при записи функции $F(t)$ (1.11) на различных участках границы канала в плоскости t . Указанные определенные интегралы, а следовательно и коэффициенты a, b, c, d, e и g , зависят от параметров k, q, p, r и v , т. е. от геометрических размеров канала l/δ и λ/δ и параметра Холла $\omega \tau$. Всего таких интегралов 21. Для исследования влияния внешних нагрузок, относительных размеров электродов и изоляторов и параметра Холла на характеристики м. г. д. генератора необходимо вычислить значения этих интегралов при различных значениях параметров $l/\delta, \lambda/\delta$ и $\omega \tau$. Вычисление интегралов является наиболее сложной частью задачи. Это связано с тем, что необходимо вычислить большое количество интегралов, подынтегральные функции которых определяются довольно громоздкими выражениями, а объем машинной памяти относительно невелик. Кроме того, подынтегральные функции имеют особенности при верхнем и нижнем пределах интегрирования, вследствие чего в процессе счета возник ряд трудностей, которые, тем не менее, удалось преодолеть. Метод расчета интегралов достаточно подробно изложен ниже в § 2.

§ 2. Все интегралы, входящие в решение, можно свести к интегралам, у которых нижний предел интегрирования равен нулю, а верхний — единице:

$$J_i = \int_0^1 f_i(x) dx \quad (i = 1, \dots, 21) \tag{2.1}$$

Подынтегральные функции $f_i(x)$ обращаются в бесконечность при верхнем и нижнем пределах интегрирования. Выпишем для примера одну из них

$$f_1(x) = \left\{ x^{-\frac{v}{\pi}} (1-x)^{\frac{v}{\pi}+1} (1-k)^3 \left[\left(\frac{1-r}{1-k} - px \right) \left(\frac{2k}{1-k} + x \right) \left(\frac{1+p}{1-k} + qx \right) \right]^{\frac{v}{\pi}+1} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{1-p}{1-k} - qx \right) \left(\frac{1+k}{1-k} + x \right) \left(\frac{1+r}{1-k} + px \right) \right]^{-\frac{v}{\pi}-1} \right\}$$

Интегралы (2.1) будем находить, интегрируя систему обыкновенных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x) \quad \left(y_i(x) = \int_0^x f_i(t) dt \right) \tag{2.2}$$

удовлетворяющих граничным условиям $y_i(x=0) = 0$, до значения $x = 1$. Чтобы избавиться от особенностей в правых частях дифференциальных уравнений, произведем замену переменных по формуле

$$ds = \left(\sum_i f_i^2(x) + 1 \right)^{1/2} dx \tag{2.3}$$

Подставляя выражения $f_i(x)$ в (2.3), после преобразований получим

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{L} \left[x^{\frac{v}{\pi}+1} (1-x)^{\frac{v}{\pi}+1} \right] \tag{2.4}$$

Здесь L — сложная функция x и параметров k, q, p, r и v , не имеющая особенностей на интервале $[0, 1]$. Подставляя (2.4) в (2.2), будем иметь

$$\frac{dy_i}{ds} = \frac{1}{L} \left[f_i(x) x^{\frac{v}{\pi}+1} (1-x)^{\frac{v}{\pi}+1} \right] \quad (i = 1, \dots, 21) \tag{2.5}$$

Пусть $s(x=0) = 0$. При интегрировании системы уравнений (2.4), (2.5), эквивалентной (2.2), независимая переменная s будет меняться от значения $s = 0$ до значения $s = s^*$, при котором x становится равным 1. Граничные условия примут вид

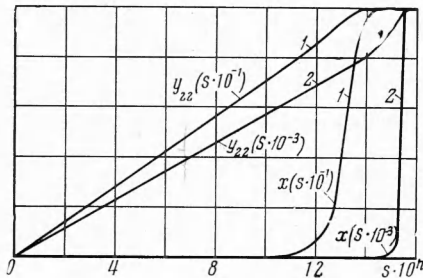
$$y_i(s=0) = 0, \quad y_i(s=s^*) = J_i \tag{2.6}$$

Если интегрировать систему (2.4), (2.5) методом Рунге — Кутты, то, давая приращение аргументу s , нельзя отойти от начальной точки $x_0 = 0$, так как $(dx/ds)_{x=x_0} = 0$. Поэтому уравнение (2.4) приведем к виду

$$\frac{dy_{22}}{ds} = \frac{1}{L} \left[-\frac{v}{\pi} (1-x)^{\frac{v}{\pi}+1} \right] \quad (y_{22} = x^{-v/\pi}) \tag{2.7}$$

Итак, необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (2.5), (2.7), удовлетворяющую граничным условиям (2.6). Правые части системы (2.5), (2.7) не содержат никаких особенностей на всем интервале интегрирования, поэтому система допускает численное интегрирование на электронно-вычислительной машине по известным стандартным программам.

Заметим, что после замены переменной интегрирования x на переменную s правые части некоторых уравнений системы (2.5), (2.7) оказались зависящими от сомножителей вида $(1-x)^\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$), а правые части других уравнений оказались не зависящими от таких сомножителей. Вследствие этого производные некоторых функций по s при подходе к концу участка интегрирования, когда $x \rightarrow 1$, стремятся к нулю (будем называть эти функции функциями первой группы); производные других функций (будем называть эти функции функциями второй группы) при $x \rightarrow 1$ стремятся к конечным, не равным нулю значениям. По результатам предварительных расчетов системы (2.5), (2.7) на ЭВМ М-20 методом Рунге—Кутты для двух случаев были построены зависимости $x(s)$ и $y_{22}(s)$ (фиг. 2). Кривые 1 соответствуют значениям параметров $l/\delta = 0.4$, $\lambda/\delta = 0.01$, $\omega\tau = 5$ ($x = y_{22}^{15.9}$); кривые 2 соответствуют значениям параметров $l/\delta = \lambda/\delta = 1$, $\omega\tau = 10$ ($x = y_{22}^{31.5}$); $\epsilon_1 = 10^{-8}$. Из формул (2.7) и фиг. 2 видно, что $x(s)$ и $y_{22}(s)$ являются функциями первой группы. Так как величины s^* , при которых нужно заканчивать счет, для различных значений параметров l/δ , λ/δ и $\omega\tau$ различны и заранее не известны, то счет системы (2.5), (2.7) производился с автоматическим выбором шага и стандартной оценкой относительной погрешности. После каждого шага вычисленное значение x сравнивалось с единицей; момент окончания счета наступал тогда, когда выполнялось условие $|1-x| < |\epsilon_1|$, где ϵ_1 — заданная погрешность. Из предыдущего ясно, что небольшое отличие конечного значения x от единицы может привести к значительной погрешности при определении конечного значения s . Будем обозначать эту погрешность через Δs^* . Погрешности функций y_i , связанные с неточным определением s^* , можно определить по формуле:



Фиг. 2

$$\Delta y_i = \left(\frac{dy_i}{ds} \right)_{s^*} \Delta s^*$$

Отсюда видно, что погрешности функций первой группы близки к нулю, а погрешности функций второй группы конечны и пропорциональны Δs^* . Предварительные расчеты показали, что при минимально допустимом для ЭВМ М-20 значении ϵ_1 погрешности функций второй группы недопустимо велики.

Кроме того, в результате предварительных расчетов выяснилось, что автоматический выбор шага при счете системы (2.5), (2.7) с максимально возможной для М-20 точностью не всегда обеспечивает заданную точность (до пятого знака) определения функций y_i . Это можно объяснить следующим образом. Из фиг. 2 видно, что функция y_{22} меняется достаточно равномерно по s ; функция $x(s)$ является, напротив, очень неравномерной: на большей части интервала интегрирования x меняется крайне незначительно, а затем резко возрастает до единицы. При этом зависимость $x(s)$ тем более неравномерна и тем сильнее отличается от характера зависимости $y_{22}(s)$, чем больше $\omega\tau$ (см. (2.7)).

В связи с тем, что для выбора нового шага оценка погрешности счета производится только для функций y_i ($i = 1, \dots, 22$), входящих в систему (2.5), (2.7), при автоматическом выборе шага не происходит измельчения шага в области резкого изменения x . Это приводит к тому, что зависимость $x(s)$, а следовательно, и функции y_i в ряде случаев находятся неточно. Поэтому необходимо ввести искусственное измельчение шага интегрирования в соответствии с характером кривой $x(s)$.

Для более точного определения функций y_i можно производить счет в следующей последовательности. По кривой $x(s)$, построенной в результате предварительного расчета наиболее благоприятного случая, соответствующего максимальным значениям¹ параметров l/δ , λ/δ , и $\omega\tau$ находится ряд опорных точек, при переходе через которые шаг должен измельчаться. Следует иметь в виду, что для различных значений l/δ , λ/δ и $\omega\tau$ величина s , вблизи которой x начинает резко возрастать, различна и смещается в

¹ Произведенная оценка величин интегралов при различных значениях l/δ и λ/δ показала, что при $l/\delta > 1$ или $\lambda/\delta > 1$ может происходить машинное переполнение, поэтому $(l/\delta)_{\max} = (\lambda/\delta)_{\max} = 1$. При $\omega\tau > 10$ эффект проскальзывания ионов становится заметным, поэтому $\omega\tau_{\max} = 10$.

сторону больших s при увеличении $\omega\tau$; при малых $\omega\tau$ участка резкого изменения x может не быть вообще. Исходя из сказанного, были выбраны три опорных значения x , с которыми происходило сравнение значений x , вычисляемых на каждом шаге интегрирования. Счет, как и раньше, производился методом Рунге — Кутты. Шаг h определялся следующим образом: h выбирается автоматически при $x < 0.0001$

$$\begin{aligned} h &= 0.02 s_{-} & (0.0001 < x < 0.1) \\ h &= 0.001 s_{+} & (0.1 < x < 0.7) \\ h &= 0.0002 s_{+} & (0.7 < x < 1.0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь s_{+} — то значение аргумента, при котором величина x в первый раз превысила 0.0001. Момент окончания счета наступал при выполнении условия $|1-x| < |\varepsilon_1|$. Функции первой группы $y_i(s^*)$ принимались равными значениям искомым интегралов J_i . Для устранения погрешности счета функций второй группы на конце интервала интегрирования был применен следующий метод. Вычисляемые на каждом шаге значения x сравнивались с некоторой величиной x^* , близкой к единице. Предварительные расчеты показали, что заданная точность счета достигается в том случае, когда x^* находится в пределах $0.999 \leq x^* \leq 0.9999$. При выполнении условия $|x^* - x| < |\varepsilon_2|$, где ε_2 — заданная погрешность, значения функций $y_i(x^*)$ запоминались в определенном массиве ячеек. После окончания счета системы (2.5), (2.7) при помощи метода Симпсона находилось значение одного из интегралов второй группы, например J_1 . По этому значению корректировались значения остальных интегралов второй группы. Интеграл J_1 можно представить как сумму двух интегралов

$$J_1 = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^{x^*} f_1(x) dx + \int_{x^*}^1 f_1(x) dx = y_1(x^*) + Y_1$$

Интеграл Y_1 вычислялся по стандартной программе методом Симпсона.

Поделим дифференциальные уравнения системы (2.5), (2.7) на первое уравнение

$$\frac{dy_i}{dy_1} = \mu_i(x) \quad (i = 1, \dots, 21)$$

Здесь $\mu_i(x)$ — отношение правой части i -го уравнения к правой части первого уравнения. Предварительные расчеты показали, что функции $\mu_i(x)$ при значениях x , близких к единице, меняются мало. Поэтому можно заменить их средней величиной

$$\langle \mu_i \rangle = 0.5 [\mu_i(x^*) + \mu_i(1)]$$

Тогда для приращений функций y_i на интервале $[x^*, 1]$ получим

$$\Delta y_i = \langle \mu_i \rangle \Delta y_1 = \langle \mu_i \rangle Y_1$$

а значения искомым интегралов второй группы будут равны

$$J_i = y_i(x^*) + \Delta y_i$$

Предварительные расчеты показали, что описанный метод счета позволяет получать значения интегралов J_i с заданной точностью (до пятого знака). Однако измельчение шага в последовательности (2.8) приводит к значительному увеличению времени счета вариантов (одному варианту соответствует задание значений трех параметров: l/δ , λ/δ и $\omega\tau$), в которых функция $x(s)$ достаточно равномерна.

Так, при счете с автоматическим выбором шага один такой вариант считается 1—3 мин, а при счете с последовательным измельчением шага он может считаться 15—30 мин. Поэтому целесообразно производить расчет всех вариантов описанным способом с автоматическим выбором шага при двух различных значениях x^* , например $x^* = 0.5$ и $x^* = 0.999$. В этом случае интегралы второй группы при $x^* = 0.5$ будут вычислены неверно, а интегралы первой группы при любом x^* вычисляются принципиально одинаково; разница состоит лишь в том, что для запоминания значений $y_i(x^*)$ при различных x^* измельчение шага будет происходить вблизи различных значений s , соответствующих данным x^* .

Если автоматический выбор шага обеспечивает заданную точность, то первые четыре знака интегралов первой группы, вычисленных при двух различных значениях x^* , будут совпадать. При этом правильными будут результаты счета при $x^* = 0.999$. Если совпадения первых четырех знаков интегралов первой группы не будет, то необходимо произвести пересчет таких вариантов по программе с измельчением шага в последовательности (2.8).

Указанным образом были просчитаны интегральные характеристики м. г. д. генераторов, соответствующих схемам А и Б, при следующих значениях параметров: $r_1^\circ = 0, 1, 2, 5, 10, 20$; $r_2^\circ = 0, 1, 2, 5, 10, 20$; $\omega\tau = 0, 1, 3, 5, 7, 10$; $l/\delta = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 1$; $\lambda/\delta = 0.01, 0.03, 0.05, 0.1, 0.3, 0.7, 1$. Точность определения интегральных характеристик находится в пределах 1—5%.

§ 3. Перейдем к анализу результатов расчета. Рассмотрим вначале влияние эффекта Холла на характеристики генераторов А и Б в случае равных внешних нагрузок $r_1^\circ = r_2^\circ = r^\circ$. Расчеты для равных внешних нагрузок $r^\circ = 5$ были проведены для задач А и Б при различных значениях параметров l/δ , λ/δ и $\omega\tau$. Токи I_1° и I_2° , а следовательно, и разности потенциалов между электродами, соединенными нагрузками r_1° и r_2° , для задачи А получились равными во всех случаях при изменении $\omega\tau$ от 0 до 10. Соответствующие токи и разности потенциалов для задачи Б получились существенно не равными, причем величины I_2° и $\Delta\varphi_2^\circ = I_2^\circ r_2^\circ$ ($\varphi^\circ = \varphi/E$ — безразмерный потенциал) были всегда больше, чем I_1° и $\Delta\varphi_1^\circ = I_1^\circ r_1^\circ$.

Чтобы объяснить полученные результаты, для нескольких случаев, зная вычисленные на М-20 значения констант R_1 , R_2 и R_3 , были рассчитаны значения электрических потенциалов на электродах. При этом предполагалось, что потенциал одного из электродов равен нулю $\varphi_P^\circ = 0$. В м.г.д. генераторах направление тока Холла совпадает с направлением движения рабочего тела, т. е. с направлением вектора V . В рассматриваемом случае ток Холла протекает слева направо. Расчеты потенциалов на электродах показали, что при $\omega\tau \neq 0$ и любых значениях параметров l/δ и λ/δ потенциалы на электродах правой пары выше, чем потенциалы на электродах левой пары, т. е. эффект Холла в м.г.д. генераторах с секционированными электродами приводит к увеличению электрического потенциала вдоль канала в направлении движения рабочего тела. При этом продольное нарастание потенциала происходит таким образом, что разности потенциалов между противоположными электродами остаются постоянными. При увеличении $\omega\tau$ возрастание потенциала по длине канала увеличивается.

Так, например, в случае $l/\delta = \lambda/\delta = 0.1$ для задачи А имеем $\varphi_B^\circ - \varphi_P^\circ = 0.111$ при $\omega\tau = 1$ и $\varphi_B^\circ - \varphi_P^\circ = 0.585$ при $\omega\tau = 10$; для задачи Б имеем $\varphi_B^\circ - \varphi_P^\circ = 0.0775$ при $\omega\tau = 1$ и $\varphi_B^\circ - \varphi_P^\circ = 0.138$ при $\omega\tau = 10$. Заметим, что продольное нарастание потенциала в задаче А значительно сильнее, чем в задаче Б.

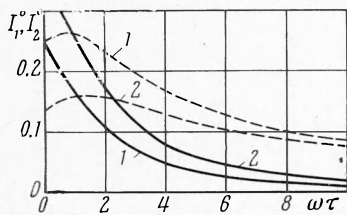
Описанные явления можно объяснить следующим образом. При $\omega\tau \neq 0$ в м. г. д. генераторах появляется электродвижущая сила Холла E^* , вызывающая движение положительных зарядов в направлении вектора V . Следствием этого является увеличение электрического потенциала по длине канала в случае секционированных электродов. При соединении электродов по схеме А положительные частицы, попадающие под действием э. д. с. Холла E^* из области левой пары электродов в область правой пары, не могут возвратиться к левой паре электродов. Поэтому в указанной схеме увеличение потенциала правой пары происходит до тех пор, пока электрические силы, обусловленные продольной разностью потенциалов, не уравновесят действия холловских сил. Таким образом, на установившемся режиме продольная разность потенциалов равна E^* , а токи перетекания от одной пары электродов к другой отсутствуют. При этом $I_1^\circ = I_2^\circ$, так как потенциалы верхнего и нижнего электродов правой пары возрастают на одинаковую величину.

Увеличение потенциала верхнего электрода в паре, соединенной нагрузкой r_2° , и увеличение потенциала нижнего электрода в паре, соединенной нагрузкой r_1° , в схеме Б является причиной того, что разность потенциалов $\Delta\varphi_2^\circ$ и, следовательно, ток I_2° возрастают, а разность потенциалов $\Delta\varphi_1^\circ$ и ток I_1° уменьшаются. Так как в схеме Б $I_2^\circ > I_1^\circ$, то I_2° можно записать в виде суммы

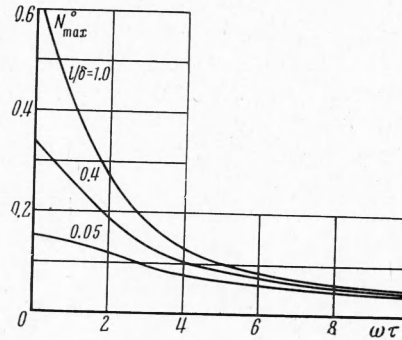
$$I_2^\circ = I_1^\circ + I_3^\circ \quad (3.1)$$

где I_3° — ток перетекания, который протекает по диагонали от электрода PQ к электроду ML . Представим себе условно, что между двумя парами электродов имеется источник тока, э. д. с. которого равна э. д. с. Холла E^* . Известно, что если через источник тока не протекает ток, то на его клеммах создается максимальная разность потенциалов. Поэтому в схеме А, где $I_3^\circ = 0$, разность потенциалов, возникающая в продольном направлении, значительно больше, чем в схеме Б.

Рассмотрим влияние внешних нагрузок и параметров l/δ , λ/δ и $\omega\tau$ на интегральные характеристики м. г. д. генераторов, соответствующих схемам А и Б. Расчеты показали, что при наличии эффекта Холла так же, как и при $\omega\tau = 0$, мощность имеет максимум по обоим внешним нагрузкам, т. е. что существуют такие оптимальные нагрузки r_{1opt}° и r_{2opt}° , при которых $N^\circ = N_{max}^\circ$. Эффективность η меняется в зависимости от r_1° и r_2° также аналогично случаю $\omega\tau = 0$, подробно рассмотренному в работе [10]. С увеличением обеих нагрузок η возрастает и стремится к единице при $r_1^\circ \rightarrow \infty$ и $r_2^\circ \rightarrow \infty$, так как при этом токи, а следовательно, и джоулева диссипация стремятся к нулю.



Фиг. 3



Фиг. 4

В схеме А оптимальные по мощности нагрузки равны одна другой $r_{1opt}^\circ = r_{2opt}^\circ = r_{opt}^\circ$ и увеличиваются при увеличении $\omega\tau$ ($r_{opt}^\circ \approx 2$ при $\omega\tau = 0$ и $r_{opt}^\circ \approx 10$ при $\omega\tau = 10$). Так как в этой схеме $I_1^\circ = I_2^\circ$ при $r_1^\circ = r_2^\circ$, то ток, протекающий по каждой нагрузке, можно записать в виде $I = E/(r + r_i)$, где E — э.д.с. м.г.д. генератора, а r_i — внутреннее сопротивление. Из электротехники известно, что на внешней нагрузке в такой простейшей электрической схеме максимальная мощность выделяется в случае, когда $r = r_i$. При увеличении $\omega\tau$ внутреннее сопротивление возрастает за счет увеличения длины линий тока, поэтому возрастает и величина оптимальной внешней нагрузки.

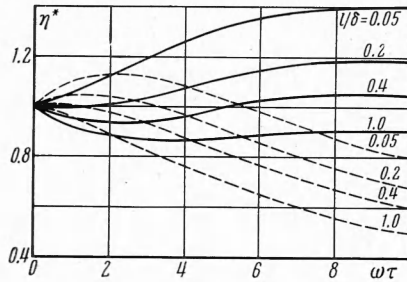
В схеме Б оптимальные нагрузки существенно не равны: $r_{1opt}^\circ < r_{2opt}^\circ$. При увеличении $\omega\tau$ r_{1opt}° меняется очень мало: $r_{1opt}^\circ \approx 2 - 0$ при изменении $\omega\tau$ от 0 до 10, а r_{2opt}° возрастает от 2 при $\omega\tau = 0$ до 20 при $\omega\tau = 10$; заметим, что в подавляющем большинстве случаев $r_{1opt}^\circ \neq 0$. Для объяснения этих результатов рассмотрим влияние параметра $\omega\tau$ на токи I_1° и I_2° (фиг. 3). На графике сплошные линии соответствуют току I_1° , пунктирные — току I_2° ; цифрой 1 обозначены кривые, относящиеся к случаю $r_1^\circ = r_2^\circ = 2$, цифрой 2 обозначены кривые, относящиеся к случаю $r_1^\circ = 1, r_2^\circ = 5; l/\delta = 0.2, \lambda/\delta = 0.1$. Из графика видно, что при $r_1^\circ \leq r_2^\circ$ ток I_1° всегда уменьшается, а ток I_2° вначале возрастает, а затем уменьшается при увеличении $\omega\tau$. При больших $\omega\tau$ ток I_2° всегда больше, чем I_1° . Расчеты показали, что при $r_1^\circ > r_2^\circ$ оба тока I_1° и I_2° уменьшаются при увеличении $\omega\tau$, но ток I_2° всегда является большим током. Описанный характер изменения токов в зависимости от $\omega\tau$ связан со следующими эффектами: 1) при $r_1^\circ \neq r_2^\circ$ существуют электрические силы, которые вызывают перетекание токов в сторону меньшего сопротивления; 2) при увеличении $\omega\tau$ возрастает внутреннее сопротивление r_i , в результате чего токи I_1° и I_2° уменьшаются; 3) при увеличении $\omega\tau$ возрастает э.д.с. Холла E^* , которая увеличивает ток I_2° и уменьшает ток I_1° .

Так как N° зависит от произведений квадратов токов на нагрузки, а $I_2^\circ > I_1^\circ$ при больших $\omega\tau$, то ясно, что N_{max}° будет достигаться тогда, когда больший ток умножается на большую нагрузку.

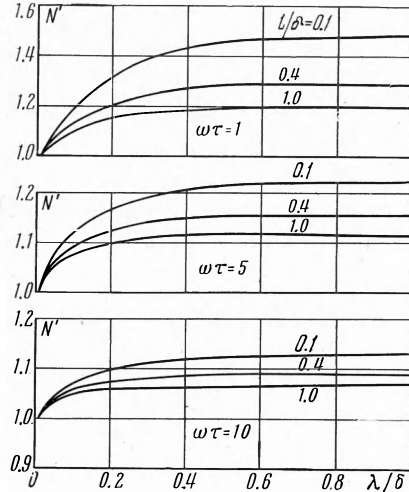
Зависимости мощности N_{max}° генераторов А и Б от $\omega\tau$ при различных значениях l/δ и величине $\lambda/\delta = 0.1$, построенные при оптимальных для заданного λ/δ и каждого значения l/δ и $\omega\tau$ нагрузках r_{1opt}° и r_{2opt}° , приведены на фиг. 4. Как видим, N_{max}° резко уменьшается при увеличе-

нии $\omega\tau$. Так, например, для случая $l/\delta = 1$ увеличение $\omega\tau$ от 0 до 10 приводит к уменьшению N_{\max}° на 92%. Ясно, что это уменьшение мощности связано с увеличением r_i при увеличении $\omega\tau$. Заметим, что при больших $\omega\tau$, кривые, соответствующие различным l/δ , сближаются, т. е. влияние параметра l/δ уменьшается при увеличении $\omega\tau$. Кроме того, параметр $\omega\tau$ оказывает менее сильное воздействие на характеристики генераторов с малыми l/δ : мощность генераторов с малыми l/δ уменьшается слабее при увеличении $\omega\tau$, чем мощность генераторов с большими l/δ .

Эффективность м.г.д. генератора схемы А и м.г.д. генератора схемы Б при $r_1^{\circ} = r_2^{\circ}$ или $r_1^{\circ} > r_2^{\circ}$ изменяется в зависимости от $\omega\tau$ так же,



Фиг. 5

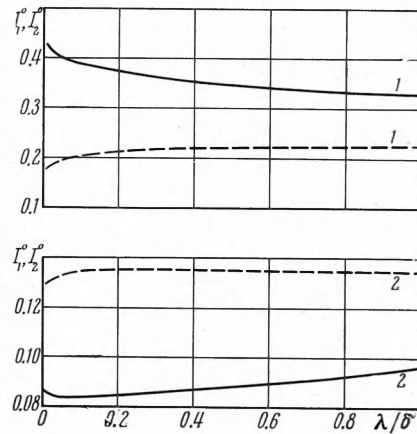


Фиг. 6

как и N_{\max}° . При $r_1^{\circ} < r_2^{\circ}$ эффективность η в схеме Б может иметь максимум по $\omega\tau$. Соответствующие кривые приведены на фигуре 5. По оси ординат отложена величина $\eta^* = \eta / \eta_{\omega\tau=0}$. Кривые построены для двух случаев: $r_1^{\circ} = 1$, $r_2^{\circ} = 20$ (сплошные линии), $r_1^{\circ} = 1$, $r_2^{\circ} = 5$ (пунктирные линии); $\lambda/\delta = 0.1$. Значения N° и η всегда увеличиваются при увеличении l/δ за счет уменьшения внутреннего сопротивления. Но отрицательное влияние $\omega\tau$ слабее сказывается на характеристиках генераторов с меньшими l/δ , поэтому кривые η^* для меньших l/δ идут выше на фиг. 5. Характер изменения кривых η^* от $\omega\tau$ можно легко объяснить, зная характер изменения токов I_1° и I_2° от $\omega\tau$ для случаев неравных нагрузок r_1° и r_2° .

Рассмотрим влияние параметра λ/δ на характеристики генераторов А и Б. Характеристики генератора А при равных нагрузках всегда улучшаются при увеличении λ/δ , так как при больших λ/δ проявляется эффект растекания тока во внеэлектродную зону, что приводит к уменьшению внутреннего сопротивления. При неравных нагрузках параметр λ/δ влияет на характеристики генератора А так же, как и при $\omega\tau = 0$, вследствие того, что эффект Холла в этой схеме не вызывает увеличения тока I_2° по сравнению с током I_1° (см. [10]). Зависимости мощности $N' = N^{\circ} / N^{\circ}_{\lambda/\delta=0.01}$ от λ/δ для генераторов А и Б при оптимальных для каждого значения l/δ , λ/δ и $\omega\tau$ нагрузках показаны на фиг. 6. Как видим, увеличение длины изолирующего промежутка приводит к значительному увеличению снимаемой мощности в случае оптимальных соотношений. При равных или неравных нагрузках увеличение параметра λ/δ в генераторе Б может привести к различному характеру изменения мощности и эффективности: кривые N° и η могут быть возрастающими, убывающими, а также могут иметь максимумы при некоторых значениях $\omega\tau$. Это связано с тем, что параметр λ/δ не одинаково влияет на

токи I_1° и I_2° при различных значениях $\omega\tau$. На фиг. 7 приведены кривые для токов I_1° и I_2° (ток I_1° показан сплошной линией, ток I_2° — пунктирной) в зависимости от λ/δ при $l/\delta=1$ и $r_1^\circ=1, r_2^\circ=5$ для двух значений $\omega\tau$: цифра 1 соответствует случаю $\omega\tau=1$, цифра 2 — случаю $\omega\tau=5$. Кривые, показанные на фиг. 7, можно объяснить следующим образом. При малых $\omega\tau$ влияние электрических сил, вызывающих перетекание тока в сторону меньшего сопротивления, сильнее, чем влияние э.д.с. Холла, поэтому ток I_1° больше тока I_2° . При увеличении длины изолятора λ/δ процессы перетекания ослабевают, вследствие чего ток I_1° уменьшается, а ток I_2° увеличивается. В случае $\omega\tau=5$ преобладает действие э. д. с. Холла, которая увеличивает ток I_2° и уменьшает ток I_1° — здесь $I_2^\circ > I_1^\circ$. При увеличении λ/δ от нуля до значения ~ 0.05 уменьшается перетекание тока, связанное с обратными токами, текущими от электродов с большими потенциалами к электродам с меньшими потенциалами (см. картину линий тока в работе [8]), что вызывает уменьшение тока I_1° и увеличение тока I_2° . При увеличении λ/δ до значения ~ 0.5 проявляется эффект растекания тока во внеэлектродную зону, и оба тока увеличиваются. При дальнейшем увеличении λ/δ действие эффекта растекания существенно ослабляется, и практически он не дает никакого вклада в токи. Тот факт, что ток I_1° при больших λ/δ не выходит на горизонтальную асимптоту, говорит о проявлении эффектов, связанных с действием λ/δ на э.д.с. Холла.



Фиг. 7

Перечислим эти эффекты: 1) э.д.с. Холла возрастает при увеличении λ/δ аналогично тому, как обычная э.д.с. м.г.д. генератора возрастает при увеличении высоты канала; 2) увеличивается сопротивление перетекания тока от одной пары электродов к другой, вследствие чего ток I_3° может уменьшаться; 3) так как ток I_3° протекает по более пологой диагонали при увеличении λ/δ , то его проекция на ось y уменьшается; $E^* \sim j_y$ не только в пространстве каждой пары электродов, но и во внеэлектродном пространстве, поэтому E^* уменьшается при увеличении λ/δ . Так как (см. (3.1))

$$I_2^\circ = I_1^\circ + I_3^\circ \approx \text{const}$$

а ток I_1° увеличивается, то, следовательно, I_3° уменьшается, т. е. суммарное воздействие указанных эффектов приводит к уменьшению э.д.с. Холла при увеличении λ/δ .

Расчеты, проведенные при равных нагрузках для схемы А, в которой $I_3^\circ = 0$, показали, что при увеличении λ/δ продольное нарастание потенциала увеличивается, следовательно, в схеме А увеличение λ/δ приводит к увеличению э.д.с. Холла.

Результаты расчетов характеристик м.г. д. генератора схемы А для случаев, когда схема А работает как две независимые пары электродов¹, сравнивались с расче-

¹ Схема А работает как две независимые пары электродов при следующих условиях: 1) $\lambda/\delta \approx 0.5-1$, l/δ — любые, $r_1^\circ = r_2^\circ$ или $r_1^\circ \neq r_2^\circ$; 2) $l/\delta \approx 1$, λ/δ — любые, $r_1^\circ = r_2^\circ$ — при больших l/δ краевые эффекты дают незначительный вклад в характеристики генератора, и ими можно пренебречь.

тами по асимптотической формуле, полученной в работе [3] для больших $\omega\tau$. Результаты расчетов на М-20 совпали с точностью до 1% с расчетами по асимптотической формуле при $\omega\tau = 10$; при $\omega\tau = 5$ асимптотическая формула дает погрешность $\sim 8\%$. При дальнейшем уменьшении $\omega\tau$ погрешность становится еще больше.

В заключение автор благодарит А. Б. Ватажина и А. Н. Крайко за ценные советы.

Поступила 6 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Montardy A. de. MHD generator with series — connected electrodes. Symposium on magnetoplasmadynamic electrical power generation. Newcastle, Great Britain, september, 1962 (русск. перев.: Монтарди А. м. г. д. генератор с последовательно соединенными электродами. Сб. статей «м. г. д. генераторы электрической энергии». Изд. ВИНТИ, 1963, стр. 113).
2. Зеличенко Е. Н., Миллерян Т. Е., Польский Н. И. Оптимальные режимы магнитогидродинамических течений в каналах с учетом эффекта Холла. Магнитная гидродинамика, 1965, № 1, стр. 67—72.
3. Ватажин А. Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 2, стр. 39—54.
4. Yen James T. Magnetoplasmadynamic channel flow and energy conversion with Hall currents. phys. Fluids, 1964, 7, № 5, 723—729 (русск. перев.: Информационный бюллетень ВИНТИ. Прямое преобразование тепловой энергии в электрическую и топливные элементы, 1965, вып. 1 (30)).
5. Hurwitz H. (Jr.), Kilb R. W., Sutton G. W. Influence of tensor conductivity on current distribution in a MHD generator. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, № 2, p. 205—216 (русск. перев.: Гурвиц, Килб и Саттон. Влияние тензора проводимости на распределение тока в м. г. д. генераторе. Сб. статей «Плазма в магнитном поле и прямое преобразование тепловой энергии в электрическую». Госатомиздат, 1962).
6. Vitalis E. A. Analysis of linear MHD power generators. Plasma Physics, Accelerators, Thermonuclear Research, J. of Nucl. Energy, pt. C, 1965, vol. 7, № 5, p. 455—473.
7. Vitalis E. A. Performance of a segmented electrode MHD generator for various electrode — insulator length ratios. Plasma Physics. Accelerators, Thermonuclear Research, J. Nucl. Energy, pt. C, 1965, vol. 7, № 3, p. 235—244.
8. Голмач И. М., Ясицкая Н. Н. Эффект Холла в канале с секционированными электродами. Изв. Ан СССР, Энергетика и транспорт, 1965, № 5, стр. 91—104.
9. Ватажин А. Б., Регирер С. А. Электрические поля в каналах магнитогидродинамических устройств. Дополнение к книге Дж. Шерклифа «Теория электромагнитного измерения расхода». Изд. Мир, 1965.
10. Холщевникова Е. К. Интегральные характеристики магнитогидродинамического генератора с двумя парами электродов конечной длины. ПМТФ, 1964, № 4, стр. 16—22.