

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОМОДЕЛЬНОЙ КРУГЛОЙ СТРУИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ НЕПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

Вопросам гидродинамической устойчивости свободных сдвиговых потоков посвящено много экспериментальных и теоретических исследований. Свободные потоки обладают малым запасом устойчивости, и ламинарное движение разрушается уже при небольших значениях числа Рейнольдса  $Re$ . На практике встречаются, как правило, хорошо развитые турбулентные свободные потоки, поэтому линейный анализ устойчивости ламинарных течений, на первый взгляд, носит академический характер. Однако турбулентные свободные потоки успешно описываются моделью Буссинеска с постоянной турбулентной вязкостью.  $Re$ , построенные по этой вязкости, имеют небольшое значение, а экспериментально наблюдаемая динамика таких потоков представляет собой последовательность развития крупномасштабных возмущений на фоне мелкомасштабной турбулентности. Существуют попытки описания крупномасштабных движений в турбулентных потоках с помощью линейной теории устойчивости [1, 2]. При теоретическом исследовании устойчивости свободных сдвиговых потоков распространено предположение о локальной параллельности среднего течения, и только в небольшом числе работ учитывается влияние непараллельности. При этом применяется слабо обоснованная процедура, которая сводится лишь к учету поперечной составляющей средней скорости (см., например, [3]). Более приемлемо разложение функции тока основного и возмущенного движений, а также собственных значений в ряд по обратным степеням локального  $Re$  [4]. Наиболее конструктивный подход к вопросу учета непараллельности изложен в [5], где используется теория асимптотических разложений по малому параметру, в данном случае обратной рациональной степени глобального  $Re$ . Оказывается, для плоской струи Бикли характеристики возмущений меняются неавтомоделным образом, т. е. имеют различные скорости изменения в зависимости от продольной координаты. В настоящей работе рассмотрен пример течения, для которого благодаря характеру его пространственного развития анализ устойчивости может быть проведен с использованием гипотезы автомоделности возмущений. Таким течением является автомоделная круглая струя Шлихтинга [6]. Аналогичные зависимости от пространственных координат реализуются для осредненных характеристик развитого турбулентного течения в струе, вытекающей из круглого отверстия.

При экспериментальном исследовании устойчивости круглой затопленной струи отмечалось [7], что поток первоначально теряет устойчивость по отношению к осесимметричным возмущениям при  $Re \gtrsim 10$ . Рейнольдс [8] не приводит значений критического  $Re$ , однако утверждает, что в диапазоне  $Re = 50-250$  в потоке наблюдаются как спиральные, так и осесимметричные возмущения. В [9, 10] тщательно исследована невякая асимптотика параметров устойчивости этого течения и получено, что неустойчивыми могут быть только спиральные возмущения. Этот же вывод подтвержден во всех последующих работах, выполненных для конечных  $Re$  [11-13], из которых следует, что в параллельном приближении поток неустойчив только относительно спиральных возмущений (азимутальное число  $m = 1$ ) и теряет устойчивость при  $Re > 38$ . Отсутствие согласия между экспериментальными данными и теоретическим анализом пытались объяснить отличием профиля средней скорости на начальном участке струи от автомоделного. Действительно, более заполненный профиль скорости теряет устойчивость по отношению к возмущениям с  $m = 0; 1; 2$  [13, 14]. Однако такой профиль существует лишь на нескольких первых калибрах струи, а возмущения с  $m = 0$  наблюдались на значительном удалении от ее начала. Все расчеты устойчивости круглых струй выполнены в предположении локальной параллельности исходного течения.

**1. Постановка и метод решения задачи.** Поле скорости в цилиндрической системе координат  $(X, R, \varphi)$  имеет компоненты  $(u, v, w)$ . Стационарным решением уравнений движения и неразрывности, записанных в приближении пограничного слоя, для круглой затопленной струи являются соотношения

$$(1) \quad U = 1/(1+r^2)^2, \quad V = \varepsilon r(1-r^2)/(1+r^2)^2/2$$

( $r = R/R_0$ ,  $(U, V) = (u, v)/U_0$ ). В качестве характерных масштабов взяты  $R_0 = \varepsilon X$ ,  $U_0 = 8v/\varepsilon^2 X$ , где  $\varepsilon = 8/Re$ , а  $Re = (3J/\pi\rho v^2)^{1/2}$  — число Рейнольдса, которое определяется потоком импульса струи  $J$ , плотностью среды  $\rho$  и кинематической вязкостью  $v$ .

Как принято при линейном анализе устойчивости, поля скорости и давления представляются в виде исходного стационарного распределения плюс малое возмущение ( $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ ). Используем аффинные преобразования, с помощью которых получены автомодельные соотношения (1), для линеаризованных относительно возмущений уравнений движения и неразрывности

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{U}\mathbf{V})\mathbf{u}' + (\mathbf{u}'\mathbf{V})\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p' + \nu\Delta\mathbf{u}', \quad \nabla\mathbf{u}' = 0.$$

Запишем возмущения в форме

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u', v', w') \\ \text{Re } p' \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} U_0(x) [u(r), v(r), w(r)] \\ U_0^2(x) q(r) \end{array} \right\} \exp(i\theta)$$

$$(\partial\theta/\partial X = \alpha_0(x), \partial\theta/\partial\varphi = m, \partial\theta/\partial t = -\omega_0).$$

Здесь  $x = \varepsilon X$ ;  $r = R/R_0(x)$ ;  $\omega_0$  — угловая частота линейных колебаний;  $m$  — азимутальное волновое число;  $\alpha_0(x)$  — комплексное волновое число, мнимая часть которого характеризует скорость изменения возмущений, связанную с их неустойчивостью. Следовательно, предполагается, что амплитуда и поперечный масштаб малых возмущений медленно меняются с продольной координатой  $x$  подобно изменению среднего течения, а отклонение от автомодельного поведения колебаний определяется мнимой частью их фазы. Производные по времени и продольной координате в новых переменных  $\theta, x$  с учетом аффинного преобразования поперечной координаты представляются как

$$(4) \quad \partial/\partial t = -\omega_0\partial/\partial\theta, \partial/\partial X = \alpha_0\partial/\partial\theta + \varepsilon(\partial/\partial x - (\partial \ln R_0/\partial x) r\partial/\partial r).$$

Можно предположить, что если существуют нейтральные колебания автомодельного вида (3), то их длина волны также меняется автомодельно. Кроме того, характерный масштаб частоты этих нейтральных колебаний зависит от медленно меняющихся локальных масштабов скорости и длины, т. е.

$$(5) \quad \alpha_0(x) = \alpha/R_0(x), \omega_0 = \omega U_0/R_0.$$

Требуется пояснить, что частота рассматривается зависящей от продольной координаты как от параметра, поскольку при данных  $x$ ,  $\text{Re}$  разыскивается конкретный вид возмущений, в частности, нейтральные или растущие с некоторым инкрементом колебания. Если же необходимо рассмотреть пространственную эволюцию малого возмущения фиксированной частоты  $\omega_0$ , то нейтральная кривая  $\omega(\text{Re})$  и масштабное подобие (5) определяют диапазон изменения  $X$ , в котором это возмущение будет расти для данного  $\text{Re}$ . Результаты такого характера проиллюстрированы в [5], где показано, что при фиксированной частоте  $\omega_0$  и  $\text{Re} > \text{Re}_*$  существует диапазон изменения продольной координаты, в котором выбранное возмущение неустойчиво. Если подставить в (2) решения вида (3) и осуществить переход к новым переменным с помощью (4), (5), то безразмерные уравнения для возмущений запишутся в форме

$$(6) \quad \begin{aligned} \beta^2 v + q' + i2mw/r^2 - [(rv)'/r]' &= \varepsilon \text{Re}[U(rv)' + \\ &+ \varepsilon(rV_1)'/2u - (V_1v)'/2] + Lv, \\ \beta^2 w + imq/r - i2mv/r^2 - [(rw)'/r]' &= \\ &= \varepsilon \text{Re}[U(rw)' - V_1(rw)'/r/2] + Lw, \\ \beta^2 u + iaq + \text{Re}U'v - (ru)'/r &= \varepsilon [q + (rq)'] + \\ &+ \varepsilon \text{Re}[U(ru)' + (rU)'u - V_1u'/2] + Lu, \\ (rv)'/r + imw/r + iau - \varepsilon(ru)' &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\beta^2 = i\text{Re}(\alpha U - \omega) + \alpha^2 + m^2/r^2$ ;  $V_1 = V/\varepsilon$ ;  $Lf = \varepsilon^2 r(rf)'' + + 2\varepsilon(\varepsilon - i\alpha)(rf)' - i\alpha\varepsilon f$ . Штрих обозначает производную по  $r$ , Гранич-

ные условия для возмущений

$$(7) \quad \begin{aligned} u, v, w, q &\rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \\ u(0) = q(0) = 0, m \neq 0, v(0) = w(0) = 0, m \neq 1, \\ v(0) + iw(0) &= 0, m = 1, \end{aligned}$$

сохраняют свой прежний вид [9, 12—14]. Если в (6) положить  $\varepsilon = 0$ , то получится хорошо известная система уравнений в приближении параллельности исходного течения. Параметр непараллельности  $\varepsilon$  является функцией глобального  $Re$  (см. выше) и изменяется с ним соответствующим образом. Решение вопроса об устойчивости течения состоит в нахождении собственных значений  $\alpha$  и собственных функций  $u, v, w, q$  краевой задачи (6), (7). Возможность свести анализ устойчивости неоднородного течения к классической задаче на собственные значения обусловлена спецификой течения в круглой струе, для которого, во-первых, поперечный масштаб  $R_0$  совпадает с медленной продольной координатой, а, во-вторых, локальное  $Re$  постоянно во всем потоке.

Задача на собственные значения решалась численно методом дифференциальной прогонки со стыковкой в критическом слое [15, 16]. Определенные трудности возникают при решении уравнений для прогоночных коэффициентов из-за наличия особенности на оси. Уравнения (6) имеют при  $r = 0$  регулярную особую точку, в окрестности которой может быть получено решение системы в виде ряда по степеням  $r$ :

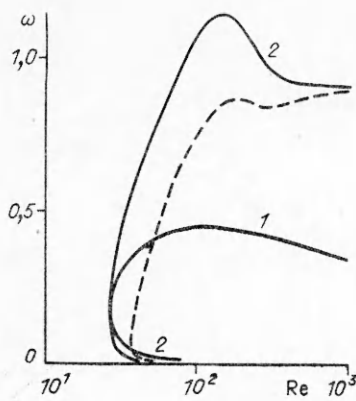
$$(8) \quad (v, w) = r^\gamma(a_i + b_i r^2 + \dots), \quad (u, q) = r^{\gamma-1}(c_i + d_i r^2 + \dots), \quad i = 1, 2.$$

Подставляя (8) в (6) и собирая члены при одинаковых степенях  $r$ , получим характеристическое уравнение на  $\gamma$  и рекуррентные соотношения, связывающие константы в разложении (8). Корни характеристического уравнения равны  $(m + 1)$ ,  $(1 - m)$ ,  $-(m + 1)$ ,  $(m - 1)$ , первые два кратные. Три линейно независимых решения  $(u, v, w, q)$  для  $m \neq 0$ , ограниченных при  $r = 0$ , имеют вид

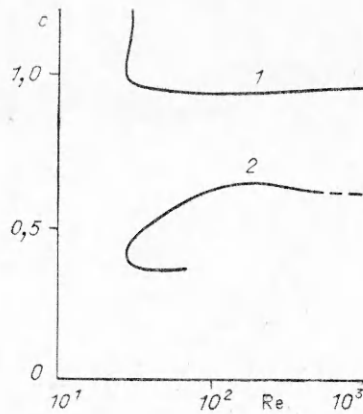
$$(9) \quad \begin{aligned} \{-r^m; & i[(\alpha/(m + 1) + i\varepsilon)/2]r^{m+1}; [(\alpha/(m + 1) + i\varepsilon)/2]r^{m+1}; 0\}, \\ \{0; & [m/(m + 1)/4]r^{m+1}; i[(m + 2)/(m + 1)/4]r^{m+1}; r^m\}, \\ \{0; & r^{m-1}; ir^{m-1}; 0\}. \end{aligned}$$

Выражения (9) используются для нахождения прогоночной матрицы и ее первой производной при  $r = 0$ , которые необходимы при решении уравнений для прогоночных коэффициентов. В случае  $m = 0$  порядок системы (6) может быть понижен до четырех. Используя вид граничных условий при  $r = 0$ , нетрудно выписать два линейно независимых решения в окрестности оси, которые из-за своей громоздкости не приводятся. При численных расчетах условие затухания возмущений на бесконечности заменялось условием прилипания на некотором, достаточно большом расстоянии от оси  $r_0$ . Для малых  $\alpha_r$  приходится увеличивать  $r_0$ , так как длинноволновые возмущения весьма чувствительны к условиям на внешней границе. Чтобы избежать влияния граничных условий на результаты расчетов, интервал интегрирования менялся по закону  $r_0 = c_0/\alpha_r$ . Было найдено, что при  $c_0 = 8$  дальнейшее увеличение  $r_0$  при фиксированном  $\alpha_r$  не влияет на результаты расчета собственных значений. Уравнения для прогоночных коэффициентов решались методом Рунге — Кутты с постоянным шагом. Для повышения точности расчетов в окрестности критического слоя осуществлялось дробление шага интегрирования. Исходные собственные значения краевой задачи (6), (7) для  $m = 0, 1$  получены методом перехода по непрерывности от данных, приведенных в [11, 13, 17].

**2. Устойчивость осесимметричных возмущений ( $m = 0$ ).** На рис. 1 в плоскости  $(Re, \omega)$  представлены области существования устойчивых и неустойчивых малых возмущений рассматриваемого течения с учетом эффектов непараллельности.\* Азимутальному числу  $m = 0$  соответствует нейтральная кривая  $I$ , характер изменения которой подобен нейтраль-



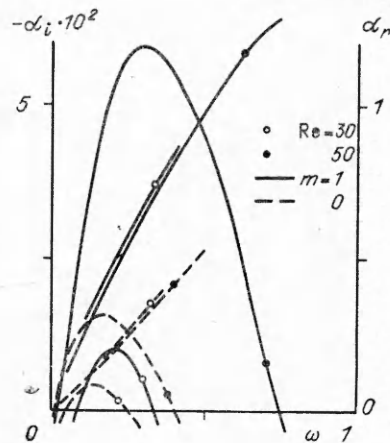
Р и с. 1



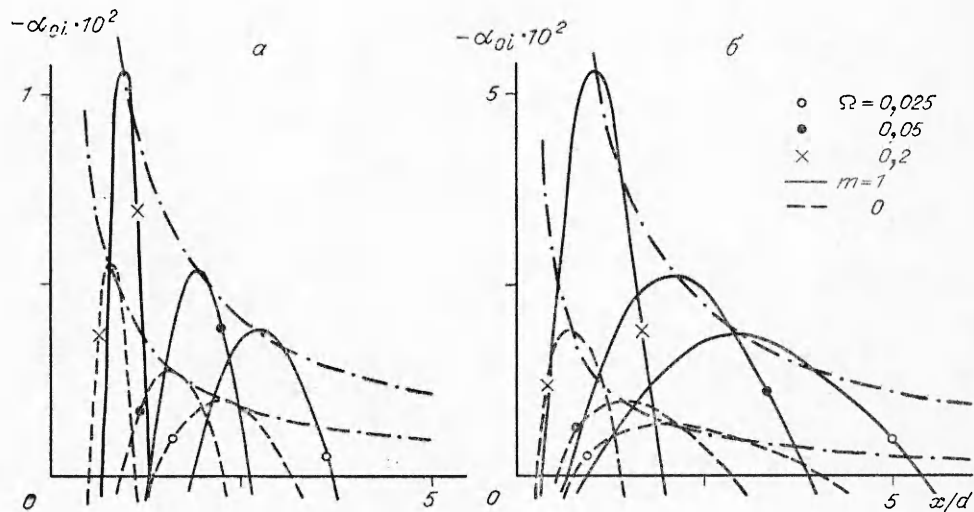
Р и с. 2

ным кривым для пристенных потоков без точек перегиба в профиле скорости, т. е. с увеличением  $Re$  происходит вырождение области неустойчивости. Критические параметры  $\omega_* = 0,124$ ,  $Re_* = 27,34$ ,  $\alpha_* = 0,125$ . Фазовая скорость возмущений  $c_* = 0,992$  практически равна скорости потока на оси струи. Изменение  $c$  вдоль нейтральной кривой показано на рис. 2 (кривая 1), верхней ветви соответствует  $c < 1$ . При увеличении  $Re$   $c \rightarrow 1$ . На нижней ветви  $c > 1$ , что характерно для двумерных возмущений с  $\alpha_r \ll 1$  в задачах устойчивости течений пограничного типа и связано с отсутствием полноты спектра собственных значений [18, 19]. На рис. 3 представлена зависимость  $\alpha$  от  $\omega$  для двух значений  $Re$ , превышающих критическое. Эти результаты позволяют получить параметры пространственного развития гармонического возмущения с частотой  $\omega_0 = U\Omega/d$  для выбранных  $Re$  ( $U$  — средняя скорость течения Гагена — Пуазейля на выходе сопла,  $d$  — его диаметр).  $Re$ , построенное по этим масштабам, совпадает с локальным  $Re = U_0 R_0/\nu$ , принятым в данной работе. Будем измерять расстояние вдоль струи и длину волны возмущений в калибрах сопла. Используя соотношения (5) и определение масштаба  $R_0 = x$ , получим выражения  $x/d = (\omega/\Omega)^{1/2}$ ,  $\alpha_0 = \alpha(x/d)$ , позволяющие представить результаты на рис. 3 в виде рис. 4. Здесь изображены инкременты возмущений для трех значений безразмерной частоты  $\Omega$  в зависимости от продольной координаты. Штрихпунктирная линия соответствует максимальным значениям инкремента для  $Re = 30$  (а)  $\alpha_{0i} = -0,44 \times 10^{-3}/(x/d)$  и 50 (б)  $\alpha_{0i} = -1,38 \cdot 10^{-2}/(x/d)$ . При фиксированном расстоянии от сопла наиболее растущими являются возмущения с определенной частотой  $\Omega$ . Частота наиболее опасных колебаний  $\Omega_* \sim (x/d)^{-2}$  падает по мере удаления от сопла. Таким образом, в процессе развития струи вниз по потоку происходит непрерывная смена временного и пространственного масштабов более опасных возмущений. На рис. 5 для критических значений параметров приведены распределения полей давления и скорости возмущений. Возмущенное поле скорости имеет вид торoidalных вихрей, следующих один за другим с фазовой скоростью  $c = U_0(x)\omega/\alpha_r$ .

3. Устойчивость спиральных возмущений ( $m = 1$ ). На рис. 1 нейтральная кривая для  $m = 1$  представлена линией 2. Штриховая линия отвечает известной нейтральной кривой для параллельного при-

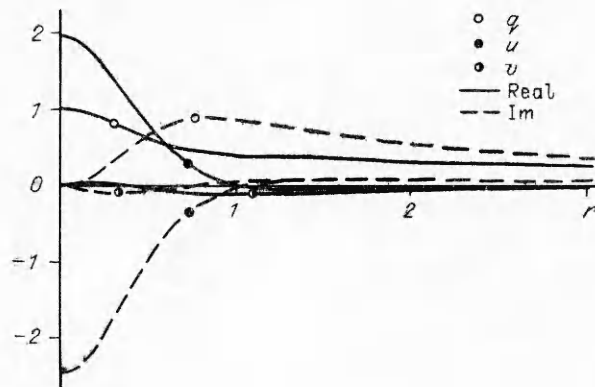


Р и с. 3

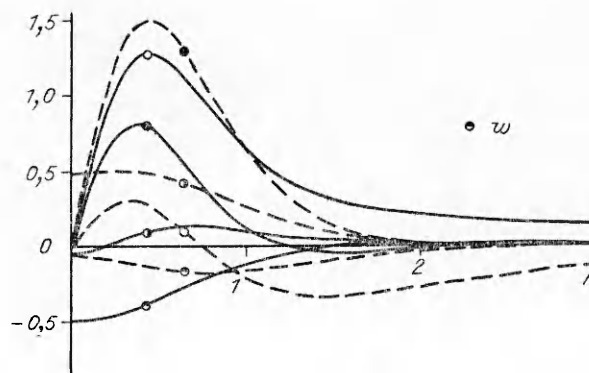


Р и с. 4

лижения ( $\omega_* = 0,104$ ,  $Re_* = 37,68$ ,  $\alpha_* = 0,45$ ). Реальная струя является менее устойчивой, с критическими параметрами  $\omega_* = 0,184$ ,  $Re_* = 27,49$ ,  $\alpha_* = 0,45$ . При  $Re \rightarrow \infty$  обе нейтральные кривые имеют общую асимптоту  $\omega = 0,91$ . Изменение фазовой скорости вдоль нейтральной кривой показано на рис. 2 (кривая 2), верхней ветви соответствуют большие  $s$ . Учет эффектов непараллельности приводит к значительному расширению области существования неустойчивых колебаний. Представление об относительной роли возмущений с  $m = 0$  и  $1$  можно получить из рис. 3, 4.



Р и с. 5



Р и с. 6

Хотя инкременты осесимметричных возмущений меньше, чем для спиральных, и эта разница увеличивается с ростом  $Re$ , в потоке должны наблюдаться оба типа возмущений. Максимальные значения инкремента для  $m = 1$  определяются соотношениями  $\alpha_{0i} = -1,02 \times 10^{-2}/(x/d)$  при  $Re = 30$  и  $\alpha_{0i} = -5,55 \cdot 10^{-2}/(x/d)$  при  $Re = 50$ . По мере увеличения  $Re$  доминирующими становятся спиральные колебания. На рис. 6 (усл. обозначения см. на рис. 5) представлены поля давления и скорости нейтральных колебаний для критических значений параметров. Максимум возмущения аксиальной скорости расположен на некотором расстоянии от оси симметрии. Линии тока возмущенного движения представляют собой спирали, перемещающиеся с фазовой скоростью  $s$  вдоль своей оси.

4. **Обсуждение результатов и выводы.** До сих пор отсутствует систематическое экспериментальное исследование устойчивости круглых затопленных струй. Те немногие работы, которые выполнены в этой области, носят в основном качественный и описательный характер (см., например, [6, 7]), что затрудняет сравнение с теоретическими результатами. Отметим факты, полученные в настоящей работе, которые коррелируют с экспериментально наблюдаемыми. Наряду с неустойчивыми спиральными колебаниями в том же диапазоне  $Re$  существуют неустойчивые осесимметричные возмущения с фазовой скоростью, близкой к скорости потока на оси струи. Критические  $Re$  близки к тем, начиная с которых наблюдаются регулярные возмущения двух упомянутых типов. Регулярность возмущений связана с их весьма слабым взаимодействием со средним течением. Согласно предполагаемой автомодельности, из соотношений (3), (5) следует, что амплитуда возмущений меняется по степенному закону. Кроме автомодельной части, показатель степени содержит комплексное число  $i\alpha/\varepsilon$ , определяющее затухание или нарастание возмущений. Степенной закон и не очень большие значения инкремента  $\alpha_i/\varepsilon$  для  $Re \leq 100$  подтверждают медленное изменение возмущений вдоль потока.

В феноменологической теории турбулентности свободных сдвиговых потоков для описания средних характеристик успешно применяется гипотеза Бусинеска о турбулентной вязкости [6]. Эта же гипотеза используется и при анализе устойчивости турбулентных потоков относительно малых крупномасштабных возмущений [20]. Для круглой струи турбулентная вязкость сохраняет свое постоянное значение во всем потоке, поэтому результаты, полученные в данной работе относительно устойчивости ламинарной круглой струи, могут быть полностью распространены и на турбулентную.

Выполненные расчеты показывают, что роль эффектов, связанных с непараллельностью течения в струе, не сводится к малой поправке параллельного приближения, а радикально меняет общую картину устойчивости. Этот вывод, по-видимому, относится к анализу устойчивости и других свободных сдвиговых течений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Strange P. J. R., Crighton D. G. Spinning modes on axisymmetric jets. Pt 1 // *J. Fluid Mech.*— 1983.— V. 134.— P. 231.
2. Wygnanski I., Champagne F., Maraskli B. On the large-scale structures in two-dimensional, small-deficit, turbulent wakes // *J. Fluid Mech.*— 1986.— V. 168.— P. 31.
3. Варапаев В. Н., Штеммлер Ю. М., Ягодин В. И. О влиянии непараллельности на устойчивость струи Бикли — Шлихтинга // *Изв. АН СССР. МЖГ.*— 1976.— № 6.
4. Ling C. P., Reynolds W. C. Non-parallel flow correction for the stability of shear flows // *J. Fluid Mech.*— 1973.— V. 59, N 3.
5. Garg V. K. Spatial stability of the non-parallel Bickley jet // *J. Fluid Mech.*— 1981.— V. 102.— P. 127.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: ИЛ, 1956.
7. Villu A. An experimental determination of the minimum Reynolds number for instability in a free jet // *J. Appl. Mech.*— 1962.— V. 29, N 3.
8. Reynolds A. J. Observation of a liquid-into-liquid jet // *J. Fluid Mech.*— 1962.— V. 14, N 4.
9. Batchelor G. K., Gill A. E. Analysis of the stability of axisymmetric jets // *Ibid.*
10. Gill A. E. On the occurrence of condensation in steady axisymmetric jets // *Ibid.*
11. Lessen M., Ling P. J. The stability of axisymmetric free shear layers // *J. Fluid Mech.*— 1973.— V. 60, N 3.
12. Mollendorf J. C., Gebhart B. An experimental and numerical study of the viscous stability of a round laminar vertical jet with and without thermal buoyancy for symmetric and asymmetric disturbances // *J. Fluid Mech.*— 1973.— V. 61, N 2.
13. Morris P. J. The spatial viscous instability of axisymmetric jets // *J. Fluid Mech.*— 1976.— V. 77, N 3.
14. Mattingly G. E., Chang C. C. Unstable waves on an axisymmetric jet column // *J. Fluid Mech.*— 1974.— V. 65, N 3.
15. Сапожников В. А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки // *Тр. Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости.*— Новосибирск: Наука, 1969.

16. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. — Новосибирск: Наука, 1977.
17. Davey A., Drazin P. G. The stability of Poiseuille flow in a pipe // J. Fluid Mech.— 1969.— V. 36, N 2.
18. Лихачёв О. А. Спектр малых возмущений течения в пограничном слое на плоской пластине // ПМТФ.— 1975.— № 4.
19. Слепцов А. Г. Оценки собственных значений при исследовании устойчивости пограничного слоя // ЧММСС.— 1974.— Т. 5, № 5.
20. Reynolds W. C., Hussain A. K. M. F. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Pt 3. Theoretical models and comparisons with experiments // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 54, N 2.

г. Новосибирск

Поступила 22/XI 1988 г.,  
в окончательном варианте — 13/III 1989 г.

УДК 536.25:533.9

С. Н. Аристов, А. М. Пичугин

### ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН В СЛОЕ ВЯЗКОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПЛАСТИНАМИ С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ ГРАДИЕНТАМИ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С развитием технологии и интенсификацией астрофизических и геофизических исследований, в которых тепловая конвекция играет существенную роль, актуальны исследования конвекции во вращающихся слоях непроводящей [1, 2] и электропроводящей жидкости с учетом поперечного магнитного поля [3]. Как правило, не учитывается наличие горизонтальных градиентов температуры, обычно имеющих место в реальных задачах и часто являющихся основной причиной движения [4]. Самый простой случай конвекции в слое, вызванный горизонтальным градиентом температуры, без учета вращения и магнитного поля исследован в [5].

Рассматривается бесконечный горизонтальный слой вязкой проводящей жидкости толщиной  $D$ , ограниченный проводящими пластинами, на которых поддерживаются разные произвольно ориентированные в плоскости слоя постоянные градиенты температуры. Слой вращается с постоянной угловой скоростью  $f/2$  относительно оси  $z$ , направленной поперек слоя. По оси  $z$  приложено постоянное магнитное поле  $B_0$  и вектор ускорения свободного падения  $-g$ . В приближении Буссинеска уравнения движения во вращающейся системе координат, связанной с границами слоя, имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{f} \times \mathbf{v} + g \alpha T, \\ \partial \mathbf{B} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} &= (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \quad \partial T / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) T = \chi \Delta T, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{aligned}$$

где в давлении  $p$  учтены гидростатическая, магнитная и центробежная составляющие;  $\mathbf{B}$  — магнитное поле, приведенное к размерности скорости;  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения жидкости;  $\nu_m = 1/\sigma \mu_0$  — коэффициент магнитной вязкости. Остальные обозначения общеприняты.

Для обезразмеривания в качестве единиц длины, времени, скорости, температуры, давления и магнитного поля выбраны соответственно  $D$ ,  $D^2/\nu$ ,  $g \alpha A_1 D^3/\nu$  ( $A_1$  — градиент температуры на нижней плоскости),  $A_1 D$ ,  $g \alpha A_1 D^2$  (здесь учитывается то, что давление уже нормировано по плотности),  $B_0$ . Обезразмеренная система записывается как

$$\begin{aligned} (1) \quad \partial \mathbf{v} / \partial t + G(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \text{Ha}^2 G^{-1} \beta^{-1} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} - \text{Ta}^{1/2} (\boldsymbol{\gamma} \times \\ &\quad \times \mathbf{v}) + \gamma T, \\ \partial \mathbf{B} / \partial t + G(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} &= G(\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \beta^{-1} \Delta \mathbf{B}, \\ \partial T / \partial t + G(\mathbf{v} \nabla) T &= \text{Pr}^{-1} \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{aligned}$$