

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА В ЗОНЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

А. Ф. Курбацкий

(Новосибирск)

В статье путем численного решения системы дифференциальных уравнений турбулентного переноса, выведенных из уравнения для одноточечной функции распределения поля пульсаций скорости [1] и упрощенных в приближении пограничного слоя, вычислен ряд моментов поля скорости в двумерной турбулентной зоне перемешивания. Замкнутый вид уравнений переноса получен на уровне третьих моментов с использованием гипотезы Миллионщикова [2]. Дифференциальный оператор системы при таком замыкании оказывается слабогиперболическим [3], а не параболическим. Предложена разностная схема, реализуемая методом матричной прогонки [4]. Проведено сравнение с экспериментом [5,6].

1. Дифференциальные уравнения турбулентного переноса в двумерной зоне перемешивания. Модель турбулентного переноса описана в [1], где выведены уравнения для средних величин и вторых моментов поля скорости из уравнения для одноточечной функции распределения пульсаций поля скорости. Уравнения для моментов более высоких порядков могут быть получены аналогичным образом. Ниже выписываются уравнения для моментов первых трех порядков поля скорости неоднородного турбулентного потока, которые относятся к развитому турбулентному потоку вполне турбулентной жидкости [1], находящемуся в стационарных внешних условиях при отсутствии градиента давления.

Уравнение непрерывности

$$(1.1) \quad \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_k} = 0.$$

Уравнение сохранения импульса для средней скорости

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_k \rangle \langle u_\alpha \rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u'_k u'_\alpha \rangle = 0.$$

Уравнение составляющих тензора турбулентных напряжений

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle u_k \rangle \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle + \langle u'_k u'_\alpha u'_\beta \rangle] + \langle u'_\beta u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_\alpha \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_\alpha u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_\beta \rangle}{\partial x_k} = \\ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{a_0}{L} \cdot E^{1/2} \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle + \frac{b_0}{L} \cdot E^{1/2} \cdot \left[\frac{2}{3} E \delta_{\alpha\beta} - \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle \right].$$

Уравнение третьих моментов пульсаций поля скорости*

$$(1.4) \quad \langle u_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma \rangle = - \left\{ \langle u'_\beta u'_\gamma u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_\alpha \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_\alpha u'_\gamma u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_\beta \rangle}{\partial x_k} + \right. \\ \left. + \langle u'_\alpha u'_\beta u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_\gamma \rangle}{\partial x_k} \right\} + \left\{ \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle \frac{\partial \langle u'_\gamma u'_k \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_\beta u'_\gamma \rangle \frac{\partial \langle u'_\alpha u'_k \rangle}{\partial x_k} + \right. \\ \left. + \langle u'_\alpha u'_\gamma \rangle \frac{\partial \langle u'_\beta u'_k \rangle}{\partial x_k} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma u'_k \rangle - \langle u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma \rangle \cdot \pi^{-1} \cdot E^{1/2}.$$

* Уравнения (1.1) — (1.3) приведены в работе [1].

Уравнение средней плотности кинетической энергии пульсационного движения (полученное суммированием (1.3) по $\alpha = \beta$)

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle u_k \rangle E + \langle E' \cdot u'_k \rangle] + \langle u'_\beta u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_\beta \rangle}{\partial x_k} = - \frac{3}{4} \cdot \frac{a_1}{L} E^{3/2}.$$

Уравнение для интенсивностей турбулентности в направлении отдельных координатных осей (по α не суммируется!)

$$(1.6) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} [\langle u_k \rangle E_\alpha + \langle E'_\alpha u'_k \rangle] + \langle u'_\alpha u'_k \rangle \frac{\partial \langle u_\alpha \rangle}{\partial x_k} = - \frac{3}{4} \cdot \frac{a_0}{L} E_\alpha E^{1/2} + \\ + \frac{b_0}{L} E^{1/2} \left[\frac{1}{3} E \delta_{\alpha\alpha} - E_\alpha \right].$$

В (1.1) — (1.6) введены обозначения:

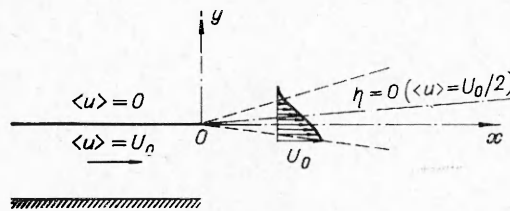
$$E = \frac{1}{2} \langle u'_k u'_k \rangle; \quad E' = \frac{1}{2} u'_k{}^2; \quad \pi = L \cdot \left[\frac{9}{8} a_0 + b_0 \right]^{-1},$$

где L — масштаб турбулентности, характеризующий собой «средний размер» турбулентных элементов в потоке [1]; a_0 и b_0 — эмпирические постоянные.

Система уравнений (1.1) — (1.6) незамкнута, число неизвестных функций больше числа уравнений. Для получения замкнутых уравнений используется гипотеза четвертых моментов [2], согласно которой четвертые моменты поля скорости выражаются через вторые по формулам, справедливым для нормального распределения,

$$(1.7) \quad \langle u'_\alpha u'_\beta u'_\gamma u'_k \rangle = \langle u'_\alpha u'_\beta \rangle \langle u'_\gamma u'_k \rangle + \langle u'_\alpha u'_\gamma \rangle \langle u'_\beta u'_k \rangle + \langle u'_\alpha u'_k \rangle \langle u'_\beta u'_\gamma \rangle.$$

Рассматривается задача о двумерном турбулентном перемешивании плоского однородного потока с неподвижной жидкостью (так называемая



Фиг. 1

задача о «крае струи») (фиг. 1.)

Более точно рассматривается стационарное плоское течение типа пограничного слоя, у которого средние величины не зависят от одной из декартовых осей координат, а компонента средней скорости вдоль этой координаты тождественно равна нулю. Характерный же размер

области течения вдоль одной из оставшихся осей координат полагается много меньшим характерного размера вдоль другой оси, что в случае течения, изображенного на фиг. 1, подтверждается экспериментально [5,6]. Уравнения (1.1) — (1.6) упрощаются в указанном выше смысле с привлечением данных эксперимента [5,6]. Результатом такого упрощения является следующая система уравнений турбулентного переноса:

$$(1.8) \quad \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} = 0; \quad \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} = 0; \\ \langle u \rangle \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v'^2 \rangle}{\partial y} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = \\ = - \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{a_0}{L} + \frac{b_0}{L} \right] E^{1/2} \langle u'v' \rangle;$$

$$\begin{aligned}
\langle u \rangle \frac{\partial E}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial E}{\partial y} + \langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle E' \cdot v' \rangle}{\partial y} &= -\frac{3}{4} \frac{a_0}{L} E^{3/2}; \\
\langle u \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v'^3 \rangle}{\partial y} &= -\frac{3}{4} \frac{a_0}{L} E^{1/2} \langle v'^2 \rangle - \\
&- \frac{b_0}{L} E^{1/2} \left[\langle v'^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right]; \\
\langle u \rangle \frac{\partial \langle u'v'^2 \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle u'v'^2 \rangle}{\partial y} + \langle v'^3 \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + \\
+ 2 \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} &= -\pi^{-1} E^{1/2} \langle u'v'^2 \rangle; \\
\langle u \rangle \frac{\partial \langle v'^3 \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle v'^3 \rangle}{\partial y} + 3 \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} &= -\pi^{-1} E^{1/2} \langle v' \rangle; \\
\langle u \rangle \frac{\partial \langle E' \cdot v' \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle E' \cdot v' \rangle}{\partial y} + \langle u'v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial E}{\partial y} + \langle u'v' \rangle \times \\
\times \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} &= -\pi^{-1} E^{1/2} \langle E' \cdot v' \rangle.
\end{aligned}$$

Из последних трех уравнений системы (1.8) третьи моменты (приближенно) выражаются через вторые по формулам

$$\begin{aligned}
(1.9) \quad -\langle u'v'^2 \rangle &\approx \pi E^{-1/2} \left[\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + 2 \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} \right]; \\
-\langle v'^3 \rangle &\approx \pi E^{-1/2} \left[3 \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} \right]; \\
-\langle E' \cdot v' \rangle &\approx \pi E^{-1/2} \langle v'^2 \rangle \frac{\partial E}{\partial y}.
\end{aligned}$$

После подстановки (1.9) в (1.8) получается система пяти уравнений для определения средних величин и вторых моментов пульсаций поля скорости

$$\begin{aligned}
(1.10) \quad \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} &= 0; \quad \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} = 0; \\
\langle u \rangle \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} - \pi \frac{\partial}{\partial y} \left[E^{-1/2} \times \right. \\
\times \left. \left(\langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + 2 \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} \right) \right] - \langle u'v' \rangle E^{1/2} \cdot \left[\frac{3}{4} \frac{a_0}{L} + \frac{b_0}{L} \right]; \\
\langle u \rangle \frac{\partial E}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial E}{\partial y} + \langle u'v' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} &= \pi \frac{\partial}{\partial y} \left[E^{-1/2} \cdot \langle v'^2 \rangle \frac{\partial E}{\partial y} \right] - \frac{3}{4} \frac{a_0}{L} E^{3/2}; \\
\langle u \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} - 2 \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} &= \pi \frac{\partial}{\partial y} \left[3 E^{-1/2} \langle v'^2 \rangle \times \right. \\
\times \left. \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} \right] - \frac{3}{4} \frac{a_0}{L} \langle v'^2 \rangle E^{1/2} - \frac{b_0}{L} E^{1/2} \left[\langle v'^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right].
\end{aligned}$$

Система (1.10) записана в безразмерном виде. В качестве характерного масштаба скорости принята скорость основного потока U_0 (см. фиг. 1). Для зоны смешения отсутствует характерный линейный размер. Поэтому следует ожидать автомодельности развитой турбулентной структуры этого течения (это подтверждается экспериментом [5, 6]). Для (численно) решения пространственные переменные x и y в (1.10) обезразмерены с помощью произвольного линейного масштаба. При сопоставлении с опыт-

ными данными численные результаты представляются через автомодельную переменную $\eta = x/y$.

Выражение для масштаба турбулентности L принято на основании соображений размерности и подобия и согласуется с автомодельной структурой потока, обнаруживаемой в эксперименте [5,6],

$$(1.11) \quad L = \alpha x,$$

где α — коэффициент пропорциональности.

Масштаб турбулентности, определяемый выражением (1.11), имеет тот же функциональный вид, что и интегральный масштаб турбулентности. Однако масштаб турбулентности L («средний размер» элемента жидкости в потоке) не равен интегральному масштабу, а пропорционален ему. И если интегральный масштаб турбулентности может быть найден из измеренных в опыте [6] корреляционных функций (продольных и поперечных), то масштаб L , представляющий собой интеграл от спектрального распределения кинетической энергии турбулентности по всему пространству волновых чисел [1,7], экспериментально не определяется. Следовательно, и значение коэффициента пропорциональности α из опытных данных найти нельзя. Но в правые части системы (1.10) всюду входит отношение эмпирических постоянных a_0 и b_0 к масштабу турбулентности L . Это позволяет найти отношение $a_0/L(a_0/\alpha)$ из сравнения теоретической аппроксимации для диссипации кинетической энергии турбулентности, имеющей вид

$$(1.12) \quad \varepsilon = xU_0^{-3} \frac{3}{4} \frac{a_0}{L} E^{3/2},$$

с экспериментальным значением той же величины, полученной сложением средних квадратов производных, которыми определяется диссипация ε . Часть этих производных измерена в опыте [6], а другие выражены через измеренные с привлечением ряда гипотез. Выражение для скорости диссипации (1.12) удовлетворительно аппроксимирует экспериментальное распределение величины ε при постоянном отношении $(a_0/\alpha) \cong 6$. Отношение диссипативной и обменной постоянных $(3/4)a_0/b_0$ (в численных расчетах) было принято равным единице.

Можно было бы дополнить систему (1.10) дифференциальным уравнением для L . Однако число «эмпирических постоянных» при этом возрастает, как минимум, до шести, причем лишь небольшая часть из них может быть «взята из эксперимента». Остальные же для своего определения требуют довольно значительной вычислительной оптимизации [8,9]. Течение в зоне смешения формируется внешним однородным потоком, движущимся с постоянной скоростью U_0 , поэтому на « $-\infty$ » ставятся пять условий для пяти искомых функций, определяемых системой (1.10):

$$(1.13) \quad \text{при } y \rightarrow -\infty : \langle u \rangle \rightarrow 1; \langle u'v' \rangle \rightarrow 0; E \rightarrow E_-; \langle v'^2 \rangle \rightarrow \langle v'^2 \rangle_-; \langle v \rangle \rightarrow 0.$$

На внешней границе зоны смешения, граничащей с покоящейся жидкостью, физически очевидные краевые условия являются однородными:

$$(1.14) \quad \text{при } y \rightarrow +\infty : \langle u \rangle = \langle u'v' \rangle = E = \langle v'^2 \rangle = 0,$$

причем условие на функцию $\langle v'^2 \rangle$ на внешней границе есть следствие условия на функцию E .

Условие $\langle v(x, -\infty) \rangle = 0$ для зоны смешения не вполне очевидно и требует пояснения. Картина смешения однородного полубесконечного потока с покоящейся жидкостью (см. фиг. 1) идеализирована. Реально зона смешения всегда образуется на границе струи конечной ширины с окружающей неподвижной жидкостью. Поэтому можно полагать, что вдоль линии тока, близкой к осевой линии струи, поперечная скорость $\langle v \rangle$ равна нулю, т. е. эта линия тока (а следовательно, и характеристика $k_2 \equiv dx : dy = \langle u \rangle / \langle v \rangle$) есть прямая линия.

Условия (1.13), (1.14) ставятся на «достаточно большом» расстоянии от обеих границ зоны смешения, где в пределах наперед заданной точности искомые функции перестают изменяться по абсолютной величине. В начальном сечении при $x = x_0$ должны быть заданы все пять искомым функций. Функции $\langle u \rangle$, E , $\langle v'^2 \rangle$ в сечении $x = x_0$ задавались (при численном счете) в виде «сглаженных» ступенчатых функций, а $\langle u'v' \rangle$ в виде «сглаженной» столбчатой функции. Функция $\langle v(x_0, y) \rangle$ в начальном сечении $x = x_0$ полагается равной нулю. Это условие является приближенным (из-за «сглаженности» $\langle u(x_0, y) \rangle$), что несущественно ввиду ожидаемой автоматичности средних характеристик поля скорости в зоне смешения. Задание конечных значений для функций E и $\langle v'^2 \rangle$ на « $-\infty$ » соответствует малому начальному уровню турбулентности, всегда имеющемуся во внешнем потоке. (Для численного счета были приняты значения $E = 10^{-8}$; $\langle v'^2 \rangle = 2/3 E_-$.)

2. Разностная схема и ее численная реализация. Несколько замечаний о характере системы дифференциальных уравнений переноса (1.10). Уравнение сохранения импульса (второе уравнение в (1.10)) не является уравнением диффузионного типа, и сама система (1.10) — не диффузионного типа. Действуя стандартным образом [10], можно убедиться, что кроме тривиальных семикратных характеристик $x = \text{const}$ ($\kappa_1 = dx : dy = 0$) у системы (1.10) имеется еще одна действительная характеристика, совпадающая с линией тока $k_2 \equiv dx : dy = \langle u \rangle / \langle v \rangle$. Таким образом, система (1.10) имеет действительные кратные характеристики. Следовательно, дифференциальный оператор (1.10) может быть отнесен к слабогиперболическому типу [3]. Напомним, что исходная система дифференциальных уравнений (1.1) — (1.6) была упрощена в приближении пограничного слоя и замкнута затем на уровне третьих моментов. Это замыкание и привело к слабогиперболическому, а не к более привычному параболическому дифференциальному оператору для уравнений турбулентного переноса. Попутно можно заметить, что Бредшоу, Феррис и Эйтивилл [11] при вычислении средних характеристик поля скорости в пристенном турбулентном пограничном слое численно решали систему трех уравнений первого порядка, которая тоже оказалась не параболической, а строго гиперболической [10]. И у этой системы уравнений одна характеристика была вертикалью, как и у всякой системы типа пограничного слоя.

Разностная схема для (1.10)* построена на основании принципов, изложенных С. К. Годуновым в статье [12], и имеет вид

при $v_n^m < 0$.

$$(2.1) \quad u_n^m \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\Delta x} + v_n^m \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_n^{m+1}}{\Delta y} + \frac{\tau_{n+1}^{m+1} - \tau_{n-1}^{m+1}}{2\Delta y} = 0;$$

* Система (1.10) представлена в разностном виде (2.1), (2.2) без уравнения непрерывности. О его включении в разностный алгоритм будет сказано ниже.

$$u_n^m \frac{\tau_n^{m+1} - \tau_n^m}{\Delta x} + v_n^m \frac{\tau_{n+1}^{m+1} - \tau_n^{m+1}}{\Delta y} + \varphi_n^m \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_{n-1}^{m+1}}{\Delta y} -$$

$$- \frac{\tau_{n+1}^{m+1} - 2\tau_n^{m+1} + \tau_{n-1}^{m+1}}{2\Delta y} = f_1;$$

$$u_n^m e_n^m \frac{e_n^{m+1} - e_n^m}{\Delta x} + v_n^m e_n^m \frac{e_{n+1}^{m+1} - e_n^{m+1}}{\Delta y} + \frac{\tau_n^m}{2} \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_{n-1}^{m+1}}{2\Delta y} = f_2$$

$$u_n^m \frac{\varphi_n^{m+1} - \varphi_n^m}{\Delta x} + v_n^m \frac{\varphi_{n+1}^{m+1} - \varphi_n^{m+1}}{\Delta y} - 2\varphi_n^m \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_n^m}{\Delta x} -$$

$$- \frac{\tau_n^m}{2} \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{2\Delta y} = f_3.$$

При $v_n^m \geq 0$

$$(2.2) \quad u_n^m \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_n^m}{\Delta x} + v_n^m \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_{n-1}^{m+1}}{\Delta y} + \frac{\tau_{n+1}^{m+1} - \tau_{n-1}^{m+1}}{2\Delta y} = 0;$$

$$u_n^m \frac{\tau_n^{m+1} - \tau_n^m}{\Delta x} + v_n^m \frac{\tau_{n+1}^{m+1} - \tau_{n-1}^{m+1}}{\Delta y} + \varphi_n^m \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_{n-1}^{m+1}}{\Delta y} -$$

$$- \frac{\tau_{n+1}^{m+1} - 2\tau_n^{m+1} + \tau_{n-1}^{m+1}}{2\Delta y} = f_1;$$

$$u_n^m e_n^m \frac{e_n^{m+1} - e_n^m}{\Delta x} + v_n^m e_n^m \frac{e_{n+1}^{m+1} - e_{n-1}^{m+1}}{\Delta y} + \frac{\tau_n^m}{2} \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_{n-1}^{m+1}}{2\Delta y} = f_2;$$

$$u_n^m \frac{\varphi_n^{m+1} - \varphi_n^m}{\Delta x} + v_n^m \frac{\varphi_{n+1}^{m+1} - \varphi_{n-1}^{m+1}}{\Delta y} - 2\varphi_n^m \frac{u_{n+1}^{m+1} - u_n^m}{\Delta x} -$$

$$- \frac{\tau_n^m}{2} \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{2\Delta y} = f_3.$$

В (2.1), (2.2) опущены знаки осреднения у всех величин и введены обозначения: $\tau \equiv \langle u'v' \rangle$; $\varphi \equiv \langle v'^2 \rangle$; $e \equiv \bar{E}^{1/2}$,

$$f_1 = \frac{\tau_n^m}{(\Delta y)^2} \left\{ \left(\frac{\tau}{e} \right)_{n+\frac{1}{2}}^m \varphi_{n+1}^{m+1} - \left[\left(\frac{\tau}{e} \right)_{n+\frac{1}{2}}^m + \left(\frac{\tau}{e} \right)_{n-\frac{1}{2}}^m \right] \varphi_n^{m+1} + \right.$$

$$+ \left. \left(\frac{\tau}{e} \right)_{n-\frac{1}{2}}^m \varphi_{n-1}^{m+1} + \left(\frac{\varphi}{e} \right)_{n+\frac{1}{2}}^m \tau_{n+1}^{m+1} - \left[\left(\frac{\varphi}{e} \right)_{n+\frac{1}{2}}^m + \left(\frac{\varphi}{e} \right)_{n-\frac{1}{2}}^m \right] \tau_n^{m+1} + \right.$$

$$+ \left. \left(\frac{\varphi}{e} \right)_{n-\frac{1}{2}}^m \tau_{n-1}^{m+1} \right\} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{4} a_0 + b_0 \right) / L_n^m \right] [e_n^{m+1} \cdot \tau_n^m + e_n^m \cdot \tau_n^{m+1}];$$

$$f_2 = \frac{\tau_n^m}{(\Delta y)^2} \left\{ \varphi_{n+\frac{1}{2}}^m \cdot e_{n+1}^{m+1} - \left[\varphi_{n+\frac{1}{2}}^m + \varphi_{n-\frac{1}{2}}^m \right] e_n^{m+1} + \varphi_{n-\frac{1}{2}}^m e_{n-1}^{m+1} \right\} -$$

$$- \frac{3}{8} \cdot \frac{a_0}{L_n^m} [(e^3)_n^m + 3(e^2)_n^m \cdot (e_n^{m+1} - e_n^m)];$$

$$f_3 = \frac{\pi_n^m}{(\Delta y)^2} \left\{ 3 \left(\frac{\varphi}{e} \right)_{n+\frac{1}{2}}^m \varphi_{n+1}^{m+1} - 3 \left[\left(\frac{\varphi}{e} \right)_{n+\frac{1}{2}}^m + \left(\frac{\varphi}{e} \right)_{n-\frac{1}{2}}^m \right] \varphi_n^{m+1} + \right. \\ \left. + 3 \left(\frac{\varphi}{e} \right)_{n-\frac{1}{2}}^m \varphi_{n-1}^{m+1} \right\} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{4} a_0 + b_0 \right) / L_n^m \right] (e_n^{m+1} \varphi_n^m + e_n^m \varphi_n^{m+1}) + \\ + \frac{2}{3} b_0 / L_n^m [(e^3)_n^m + 3(e^2)_n^m (e_n^{m+1} - e_n^m)].$$

Разностная схема (2.1), (2.2) аппроксимирует систему дифференциальных уравнений (1.10) (без уравнения непрерывности) с первым порядком точности. Никакого специального исследования устойчивости разностной схемы предпринято не было. Схема неявная, и факт ее безусловной вычислительной устойчивости подтвержден экспериментально проведением вычислений при различных отношениях шагов $\Delta x/\Delta y$. Счет всегда был устойчив. Система разностных уравнений (2.1), (2.2) может быть записана в виде одного матричного уравнения

$$(2.3) \quad A_n \vec{X}_{n+1} + B_n \vec{X}_n + C_n \vec{X}_{n-1} = \vec{D}_n,$$

где A, B, C — квадратные матрицы четвертого порядка;

\vec{D}_n — вектор правых частей, а $\vec{X} = [u, \tau, e, \varphi]$ — искомый вектор. Выражения для A, B, C, \vec{D}_n строятся из (2.1), (2.2) и здесь не приведены. Для решения (2.3) используется метод матричной прогонки [4], изложенный подробно в [13].

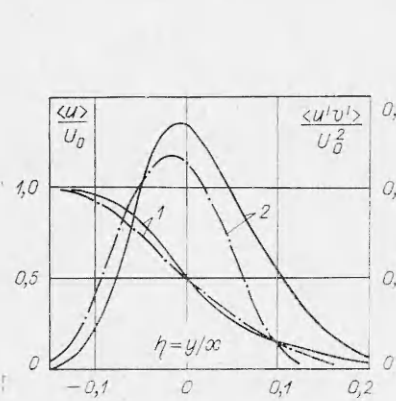
Поперечная составляющая средней скорости течения на $(m+1)$ -м слое вычисляется по формуле, полученной из уравнения непрерывности

$$(2.4) \quad \langle v \rangle = - \int_{-\infty}^y \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} dy.$$

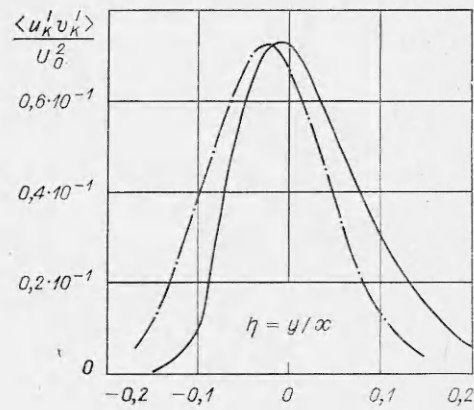
Вычисление скорости $\langle v \rangle$ могло быть включено в разностный алгоритм непосредственным образом. Однако это повышает порядок матрицы, обрабатываемой в каждом узле разностной сетки (при решении разностного матричного уравнения (2.3) прогонкой), на единицу и, следовательно, увеличивает время счета. Вычисление поперечной скорости проводилось по формуле (2.4).

3. Численные результаты. Сравнение с экспериментом. Для численного решения уравнения (2.3) поле течения в плоскости (x, y) было покрыто разностной сеткой с шагами Δx и Δy в направлении осей x и y соответственно. Число узлов по оси y увеличивалось в процессе счета, вследствие расширения зоны смешения с возрастанием координаты x (см. фиг. 1). Величины шагов Δx и Δy выбирались из условия сохранения точности решения задачи. Алгоритм матричной прогонки для (2.3) реализован в виде программы, написанной на языке АЛГОЛ для транслятора АЛЬФА-6 ВЦ СО АН СССР (использующего компьютер БЭСМ-6). Для достижения автомодельной области требовалось сделать в среднем $1,0 \cdot 10^3$ шагов по координате x .

Численные результаты представлены в виде графиков на фиг. 2—5. На всех фигурах сплошными линиями нанесены профили численного решения, а штрихпунктирными — экспериментальные профили [6]. На фиг. 2 цифрой 1 обозначен профиль средней скорости $\langle u \rangle$, а цифрой 2 —

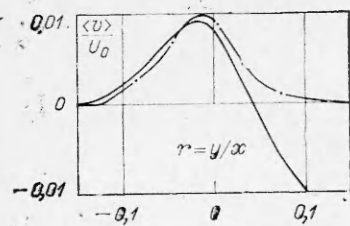


Фиг. 2

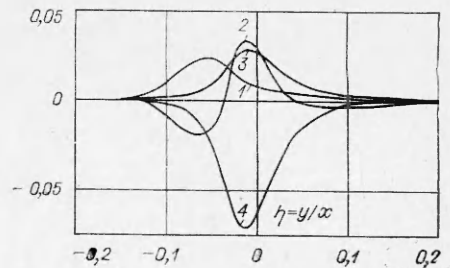


Фиг. 3

напряжение турбулентного трения $\langle u'v' \rangle$. Отличие в поведении профилей скорости является характерным и для экспериментальных профилей [5,6] (см. фиг. 7 из [14], где экспериментальные профили этих двух работ обнаруживают столь же отличное поведение, как и на фиг. 2). На внутренней стороне зоны смещения ($\eta < 0$) профиль скорости ближе к данным работы [5]. Профиль турбулентных напряжений численного решения сдвинут в направлении внешней стороны зоны ($\eta > 0$) и там более всего отличается от экспериментального. На фиг. 3 представлены кривые полной интенсивности турбулентности. Соответствие расчетного профиля $\langle u'_k u'_k \rangle$ экспериментальному вполне удовлетворительное, однако и здесь, как и для турбулентного напряжения, обнаруживается сдвиг в сторону зоны смещения, граничащей с покоящейся жидкостью. На фиг. 4 изображена поперечная составляющая скорости течения $\langle v \rangle$. На фиг. 5 нанесены отдельные составляющие полного баланса кинетической энергии турбулентности (ее удвоенной величины). Цифрой 1 помечена конвекция, 2 — диффузия, 3 — диссипация, 4 — порождение энергии турбулентности. Все эти кривые обнаруживают качественное и количественное соответствие данным как [6], так и [5] (см. аналогичный график в [15]). Что касается функции $\langle v' \rangle$, то расчетная кривая обнаруживает качественно правильное поведение, но с заметным сдвигом к внешней стороне зоны перемешивания. Максимальное же значение ее ∞ на 20% ниже, чем в [5], которое ∞ на 25% ниже, чем в эксперименте [6]. Различие в интенсивностях флуктуаций поля скорости, измеренных в [5], [6], объясняется различными «начальными условиями» экспериментальной аппаратуры, имевшими место в этих опытах. В [14] вопрос влияния «начальных условий» на статистические свойства турбулент-



Фиг. 4



Фиг. 5

ности в зоне смешения подвергнут экспериментальному изучению. Общий вывод сводится к тому, что эти условия сложным образом влияют на приспособление сдвигового слоя к автомодельному состоянию и значения интенсивностей флуктуаций скорости являются функцией уровня возмущений в пограничном слое на разделительной пластине (см. фиг. 1).

Автор благодарит С. К. Годунова за консультации в деле построения разностной схемы и А. Т. Онуфриева за обсуждения вопросов турбулентного переноса.

Поступила 23 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Онуфриев А. Т. Об уравнениях полуэмпирической теории турбулентного переноса.—ПМТФ, 1970, № 2, с. 62—71.
2. Миллиончиков М. Д. К теории однородной изотропной турбулентности.— «Докл. АН СССР», 1941, т. 32, № 9, с. 611—617.
3. Фляшке Г., Стренг Г. Корректность задачи Коши.— В кн.: Математика. Пер. иностр. статей, 1973, 17/2, с. 74—97.
4. Гельфанд И. М., Локуцкий О. В. Метод прогонки для решения разностных уравнений. Доп. II к кн. С. К. Годунова и В. С. Рябенского.— Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
5. Liepmann H. W., Laufer J. Investigations of free turbulent mixing. NASA Report, 1947, N 1257.
6. Wygnanski I., Fiedler H. E. The two-dimensional mixing region.— «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 41, part 2, p. 327—361.
7. Rotta K. Statistische Theorie nicht homogener Turbulenz. Z. Phys., 1951, Bd. 129, H. 5, S. 547—572; Bd. 131, H. 1, S. 51—77.
8. Rodi W., Spalding D. B., A Two-parameter model of turbulence and its application to free jets. «Wärme-und Stoffübertragung.» Vol. 3, Berlin, Springer-Verlag, 1970, p. 85—95.
9. Hanjalic K. and Launder B. E., A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear Flows.— «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 52, part 4, p. 609—638.
10. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
11. Bradshaw P., Ferris D. H., Atwell P. N. Calculation of Boundary layer development using turbulent energy equation.— «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 28, part 3, p. 593—616.
12. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики.— Математический сборник, 1959, т. 47, № 3, с. 271.
13. Алашкин Г. Б., Годунов С. К., Киреева И. Л., Плинер Л. А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М., «Наука», 1970.
14. Batt R. G., Kubota T., Laufer J. Experimental Investigation of the effect of shear-flow turbulence on a chemical Reaction. AIAA Reacting Turbulent Flows Conference, San Diego, California/June 17—18, 1970. (AIAA Paper N 70—721).
15. Таунсенд А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., ИЛ, 1959.