

УДК 532.5+519.63

ОБ ОБРАЗОВАНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В ТЕЧЕНИИ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Д. А. Крымских

Сибирская государственная геодезическая академия, 630108 Новосибирск

Проведено численное исследование одной гидродинамической модели физики полупроводников. Показано, что решение задачи о $(n^+ - n - n^+)$ -баллистическом диоде имеет ударную волну. Для решения этой задачи применяется метод установления. Для нахождения численного решения получена консервативная полуневяная экономичная разностная схема.

Введение. В настоящее время гидродинамические модели нашли широкое применение в моделировании течения носителей зарядов (электронов или дырок) в полупроводниках. Эти модели трактуют движение носителей заряда как течение заряженной жидкости. Наибольшее распространение получили модели газодинамического типа [1], состоящие из законов сохранения числа частиц, импульса и энергии, уравнения Пуассона для электрического потенциала и закона Фурье для удельного теплового потока. Однако эти модели имеют ряд недостатков, в частности, они не учитывают анизотропность давления.

В настоящей работе исследуются стационарные решения одномерной модели газодинамического типа [2], учитывающей анизотропность давления. Рассматривается задача о $(n^+ - n - n^+)$ -баллистическом диоде, которая моделирует течение электронов в кремниевом диоде, состоящем из трех зон с разными плотностями легирования. В данной модельной задаче описывается эффект нагрева свободных электронов внутри полупроводника, поэтому она широко применяется для тестирования гидродинамических моделей в физике полупроводников [1].

С математической точки зрения задача о $(n^+ - n - n^+)$ -баллистическом диоде является краевой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе численные решения данной задачи ищутся методом установления. В качестве эволюционных уравнений рассмотрена гидродинамическая модель из [2], которая для задачи о $(n^+ - n - n^+)$ -баллистическом диоде может быть записана в виде системы законов сохранения

$$U_t + \mathbf{J}(U)_x = (\mathbf{G}(U)T(U)_x)_x + \mathbf{F}(x, U), \quad (1)$$

где t, x — временная и пространственная переменные; $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)^*$; $\mathbf{J} = (j_1, j_2, j_3)^*$, $j_i = j_i(\mathbf{U})$; $\mathbf{G} = (g_1, g_2, g_3)^*$, $g_i = g_i(\mathbf{U})$; $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)^*$, $f_i = f_i(x, \mathbf{U})$. Звездочка означает транспонирование.

Для нахождения приближенного стационарного решения системы (1) построена консервативная полуневяная экономичная разностная схема. Проведенный численный эксперимент показал, что в решении задачи о $(n^+ - n - n^+)$ -баллистическом диоде имеется ударная волна. Полученный в настоящей работе результат качественно отличается от результатов численного исследования модели газодинамического типа, не учитывающей анизотропность давления (см., например, [1, 3]).

Гидродинамическая модель. Для описания течения электронов в полупроводниках традиционно используется гидродинамическая модель, включающая:

— закон сохранения числа частиц

$$n_t + (nv)_x = 0; \quad (2)$$

— закон сохранения импульса

$$(nv)_t + \left(n \left(v^2 + \frac{K_\beta T}{m_{ef}} \right) \right)_x = -n \left(\frac{eE}{m_{ef}} + \frac{v}{\tau_1} \right); \quad (3)$$

— закон сохранения энергии

$$\left(n \left(v^2 + \frac{3K_\beta T}{m_{ef}} \right) \right)_t + \left(nv \left(v^2 + \frac{5K_\beta T}{m_{ef}} \right) + \frac{2Q}{m_{ef}} \right)_x = -\frac{2envE}{m_{ef}} - \frac{n}{\tau_2} \left(v^2 + \frac{3K_\beta}{m_{ef}} (T - T_0) \right); \quad (4)$$

— уравнение Пуассона для электрического потенциала

$$\Phi_{xx} = \frac{e}{\epsilon_s} (n - N(x)). \quad (5)$$

Здесь n — плотность электронов (число свободных электронов в единице объема); v — скорость электронов; T — температура электронов; K_β — постоянная Больцмана; Q — удельный тепловой поток; Φ — электрический потенциал; $E = -\Phi_x$ — напряженность электрического поля; T_0 — температура молекулярной решетки полупроводника; e — элементарный заряд; $m_{ef} = m_r m_e$ — эффективная масса электрона, m_e — масса электрона, m_r — корректирующая постоянная; $\epsilon_s = \epsilon_r \epsilon_0$ — диэлектрическая проницаемость в кремнии, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость в вакууме, $\epsilon_r = 11,7$ — корректирующая постоянная для кремния; $N(x)$ — плотность легирования как заданная функция от x ; τ_α — времена релаксации. Используются времена релаксации (в 10^{-12} с) из [4]

$$\tau_\alpha = a_\alpha + b_\alpha(\mathcal{E} - 1) + c_\alpha \exp[-d_\alpha(\mathcal{E} - 1)], \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

где a_α , b_α , c_α , d_α — постоянные; $\mathcal{E} = m_{ef} v^2 / (2K_\beta T_0) + 3T / (2T_0)$. Заметим, что уравнения (2)–(5) выписаны для случая, когда носителями заряда являются исключительно электроны.

Для замыкания системы (2)–(5) используется закон Фурье. В [2] предложен закон Фурье, учитывающий анизотропность давления:

$$Q = \frac{5}{2} K_\beta \tau_3 n T \left(n \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_3} \right) - \frac{K_\beta T_x}{m_{ef}} \right). \quad (6)$$

Здесь следует пояснить термин «анизотропность давления» применительно к одномерной модели газодинамического типа. В [2] рассмотрена многомерная расширенная гидродинамическая модель, в которой тепловой поток Q является искомой функцией, а давление анизотропно. Из расширенной гидродинамической модели в [2] получен закон Фурье для замыкания модели газодинамического типа (в случае одномерной модели закон Фурье имеет вид (6)). Модель газодинамического типа с законом Фурье (6) более точно отражает физическую суть течения носителей зарядов в полупроводниках, чем модель газодинамического типа с законом Фурье

$$Q = -5K_\beta^2 \tau_3 n T T_x / (2m_{ef}), \quad (7)$$

которая непосредственно выводится из уравнения Больцмана без учета анизотропности давления [1].

Рассмотрим $(n^+ - n - n^+)$ -баллистический диод, состоящий из трех зон с разными плотностями легирования: n^+ -зоны, n -зоны и n^+ -зоны. Плотность легирования $N(x) = N^+$ в n^+ -зонах и $N(x) = N$ в n -зоне. В рамках модели из [2] течение электронов в $(n^+ - n - n^+)$ -баллистическом диоде описывается стационарными формами уравнений (2)–(4), уравнением Пуассона (5) и законом Фурье (6). На концах диода ставятся следующие граничные условия [1]:

$$n = N^+, \quad T = T_0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l; \quad (8)$$

$$\Phi = \frac{K_{\beta}T_0}{e} \ln \frac{N^+}{n_i} \quad \text{при } x = 0, \quad \Phi = \frac{K_{\beta}T_0}{e} \ln \frac{N^+}{n_i} + V_b \quad \text{при } x = l, \quad (9)$$

где l — ширина (n^+-n-n^+) -диода; n_i — естественная электронная концентрация; V_b — напряжение смещения в диоде.

Течение электронов в (n^+-n-n^+) -баллистическом диоде будем искать при $t \rightarrow \infty$ как предел решения уравнений (2)–(6), удовлетворяющего граничным условиям (8), (9), при некотором заданном начальном условии в начальный момент времени $t = 0$.

С целью упрощения дальнейших математических выражений перейдем к безразмерным величинам

$$x' = \frac{x}{l}, \quad t' = \frac{C_0 t}{l}, \quad n' = \frac{n}{N^+}, \quad v' = \frac{v}{C_0}, \quad T' = \frac{T}{T_0}, \quad (10)$$

$$Q' = \frac{Q}{m_{ef} C_0^3 N^+}, \quad \Phi' = \frac{e\Phi}{K_{\beta}T_0}, \quad E' = \frac{eE}{K_{\beta}T_0},$$

где $C_0^2 = K_{\beta}T_0/m_{ef}$. Далее штрихи у безразмерных физических переменных опускаются.

Уравнение (5) в безразмерных величинах (10) примет вид

$$\Phi_{xx} = \beta(n - \rho(x)), \quad (11)$$

где $\beta = e^2 l^2 N^+ / (\epsilon_s K_{\beta} T_0)$; $\rho(x) = N(x)/N^+$ — кусочно-постоянная функция: $\rho(x) = 1$ при $0 \leq x \leq l_+$, $1 - l_+ \leq x \leq 1$ и $\rho(x) = \delta$ при $l_+ < x < 1 - l_+$, l_+ — ширина n^+ -зоны, δ — отношение плотности легирования $N(x)$ в n -зоне к значению $N(x)$ в n^+ -зоне ($\delta = N/N^+$, $0 < \delta < 1$). Граничные условия (9) можно записать следующим образом:

$$\Phi = \Phi_0 \quad \text{при } x = 0, \quad \Phi = \Phi_0 + \hat{V}_b \quad \text{при } x = 1, \quad (12)$$

где $\Phi_0 = \ln(N^+/n_i)$; $\hat{V}_b = eV_b/(K_{\beta}T_0)$.

Рассматривая уравнение (11) как обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции Φ с граничными условиями (12), получаем

$$\Phi = \Phi_0 + \hat{V}_b x + \beta(x-1) \int_0^x \zeta(n - \rho(\zeta)) d\zeta - \beta x \int_x^1 (1 - \zeta)(n - \rho(\zeta)) d\zeta. \quad (13)$$

Продифференцировав (13) по x , имеем

$$E = -\hat{V}_b - \beta \int_0^x (n - \rho(\zeta)) d\zeta + \beta \int_0^1 (1 - \zeta)(n - \rho(\zeta)) d\zeta. \quad (14)$$

Таким образом, можно считать, что в задаче о (n^+-n-n^+) -баллистическом диоде в уравнениях (3), (4) напряженность электрического поля E является заданной функцией от плотности электронов n и пространственной переменной x .

С учетом этого сформулируем смешанную задачу, предел решения которой при $t \rightarrow \infty$ будет описывать течение электронов в (n^+-n-n^+) -баллистическом диоде. При $t \rightarrow \infty$ ищем стационарное решение системы

$$U_t + J_x = (GT_x)_x + F, \quad (15)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$n = 1, \quad w = (m^2 + 3)/2 \quad \text{при } x = 0, \quad x = 1 \quad (16)$$

при заданном начальном условии

$$U|_{t=0} = U_0(x). \quad (17)$$

Здесь

$$U = \begin{pmatrix} n \\ m \\ w \end{pmatrix}, \quad J = J(U) = \begin{pmatrix} m \\ 2(w + m^2/n)/3 \\ m(m^2/n + 5\tau_3(2w - m^2/n)/(3\tau_1))/(2n) \end{pmatrix},$$

$$F = F(E, U) = \begin{pmatrix} 0 \\ -nE - m/\tau_1 \\ -mE - (w - 3n/2)/\tau_2 \end{pmatrix}, \quad m = nv, \quad w = n(v^2 + 3T)/2,$$

$$G = G(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5nT\tau_3/2 \end{pmatrix}, \quad T = (2w - m^2/n)/(3n).$$

С учетом перехода к безразмерным величинам (10) система (15) является векторной записью уравнений (2)–(4), а граничные условия (16) получены из граничных условий (8).

После перехода к безразмерным величинам времени релаксации τ_α примут вид

$$\tau_\alpha = \hat{\tau} \left\{ a_\alpha + b_\alpha \left(\frac{w}{n} - 1 \right) + c_\alpha \exp \left[-d_\alpha \left(\frac{w}{n} - 1 \right) \right] \right\}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (18)$$

где $\hat{\tau} = (C_0/l) \cdot 10^{-12}$ с. С учетом (14) можно считать, что правая часть F системы (15) является функцией от x , U ($F = F(x, U)$). Таким образом, система (15) связывает только компоненты вектора U , т. е., как сказано выше, гидродинамическая модель (2)–(6) может быть записана в виде системы (1).

Отметим, что величина электрического потенциала на левой границе Φ_0 не влияет на решение смешанной задачи (15)–(17). Из (14) следует, что из параметров, входящих в граничные условия (9), только напряжение смещения V_b оказывает влияние на решение смешанной задачи (15)–(17).

Разностная модель. Известно, что в решении нелинейной системы законов сохранения могут возникать сильные разрывы даже при гладких начальных данных. Поэтому нельзя исключить, что решение задачи о $(n^+ - n - n^+)$ -баллистическом диоде имеет разрывы. Таким образом, решение системы (15) следует понимать в обобщенном смысле.

Вектор-функция $U = U(t, x)$ является обобщенным решением системы (15), если для любого прямоугольника $(\alpha, \beta) \times (a, b)$ вектор-функция $U(t, x)$ является решением интегрального уравнения

$$\int_a^b U(\beta, x) dx - \int_a^b U(\alpha, x) dx + \int_\alpha^\beta J(U(t, b)) dt - \int_\alpha^\beta J(U(t, a)) dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta GT_x(t, b) dt - \int_\alpha^\beta GT_x(t, a) dt + \int_a^b \int_\alpha^\beta F(x, U(t, x)) dt dx. \quad (19)$$

Уравнение (19) позволяет описывать решения системы (15) с разрывными физическими переменными, в частности с возможными разрывами в распределении плотности электронов n и скорости электронов v .

В области $D = \{(t, x) | t \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}$ введем сетку $\bar{D}_{h_n}^\Delta = \{(t_i, x_k) | i = 0, 1, \dots; k = 0, K\}$, где $t_i = i\Delta$, $x_0 = 0$, $x_k = x_{k-1} + h_k$, $x_K = 1$, Δ — шаг по времени t , h_k — шаг по пространственной переменной x между узлами (t_i, x_{k-1}) и (t_i, x_k) сетки.

Аппроксимируем (15) консервативной разностной схемой

$$U_k^{i+1} = U_k^i - \frac{2\Delta}{h_{k+1} + h_k} (J_{k+1/2}^i - J_{k-1/2}^i) + \frac{2\Delta}{h_{k+1} + h_k} \left(G_{k+1/2}^i \frac{\xi T_k^{i+1}}{h_{k+1}} - G_{k-1/2}^i \frac{\xi T_{k-1}^{i+1}}{h_k} \right) + \Delta F(U_k^i, E_k^i). \quad (20)$$

Здесь

$$J_{k+1/2}^i = ((\min(0, \lambda_{k+1/2}^3) - \min(0, \lambda_{k+1/2}^1)) J_{k+1}^i + (\max(0, \lambda_{k+1/2}^3) - \max(0, \lambda_{k+1/2}^1)) J_k^i - \frac{1}{2} (\lambda_{k+1/2}^3 |\lambda_{k+1/2}^1| - \lambda_{k+1/2}^1 |\lambda_{k+1/2}^3|) \xi U_k^i) / (\lambda_{k+1/2}^3 - \lambda_{k+1/2}^1);$$

$$E_0^i = -\hat{V}_b + \beta \left\{ \sum_{\kappa=1}^K \frac{h_\kappa}{2} ((1-x_\kappa)n_\kappa^i + (1-x_{\kappa-1})n_{\kappa-1}^i) - l_+ - (1-2l_+) \frac{\delta}{2} \right\};$$

$$E_k^i = E_{k-1}^i + \beta h_k (\rho_k - (n_k^i + n_{k-1}^i)/2);$$

$G_{k+1/2}^i = G((U_{k+1}^i + U_k^i)/2)$; $J_k^i = J(U_k^i)$; $T_k^i = T(U_k^i)$; $\lambda_{k+1/2}^1$ — наименьшее, а $\lambda_{k+1/2}^3$ — наибольшее собственные значения матрицы $A_{k+1/2} = A((U_{k+1}^i + U_k^i)/2)$, $A(U) = \partial J / \partial U$ — матрица Якоби, U_k^i — значения решения схемы (20) в узле (t_i, x_k) сетки $D_{h_k}^\Delta$; $\rho_k = \rho(x_k)$; $\xi = \psi - I$ — разностный оператор, I — тождественный оператор, ψ — оператор сдвига; $\psi U_k^i = U_{k+1}^i$. Собственные значения $\lambda_{k+1/2}^j$ матрицы $A_{k+1/2}$ могут быть найдены по общим формулам для корней многочлена третьей степени. Характеристическое уравнение $\det(A(U) - \lambda I) = 0$ имеет вид

$$y^3 + \frac{5}{3} v \left(\omega - 1 + \frac{3}{2} \varkappa T \right) y^2 - \frac{5}{3} T (\omega + \varkappa v^2) y - \frac{5}{2} \varkappa v T^2 = 0, \quad (21)$$

где $y = v - \lambda$; $\omega = \tau_3 / \tau_1$; $\varkappa = (\tau_1 \gamma_3 - \tau_3 \gamma_1) / \tau_1^2$; $\gamma_\alpha = \hat{\tau}(b_\alpha - c_\alpha d_\alpha \exp[-d_\alpha(\omega/n - 1)])$. Явную формулу для корней λ^j многочлена (21) найти сложно, поэтому предлагается использовать численные потоки $J_{k+1/2}^i$ из [5]. Для их нахождения не требуется знание собственных векторов матрицы Якоби $A(U)$. Рекуррентные формулы для E_k^i получены из (14) заменой интегралов на приближенные значения по формуле трапеции.

Схема (20) полунявная и аппроксимирует (15) с первым порядком. Как показали численные эксперименты, для устойчивости данной схемы необходимо, чтобы шаг по времени Δ был пропорционален шагу по пространственной переменной $h = \min_k h_k$, т. е. $\Delta/h = \text{const}$. Отметим, что в явной схеме для устойчивости необходимо выполнение отношения $\Delta/h^2 = \text{const}$. Схема (20) экономичная, т. е. число операций, необходимых для нахождения сеточной функции на новом временном слое, пропорционально числу узлов сетки $D_{h_k}^\Delta$ на одном временном слое. Кроме того, поскольку схема (20) консервативна, то ее решение сходится к обобщенному решению системы (15), т. е. к решению уравнения (19).

Результаты численного эксперимента. Численный эксперимент выполнен при следующих значениях физических параметров. Эффективная масса электрона m_{ef} имеет корректирующую постоянную $m_r = 0,26$. Ширина $(n^+ - n - n^+)$ -диода $l = 6 \cdot 10^{-7}$ м, ширина n^+ -зоны $l_\perp = 10^{-7}$ м. Плотность легирования $N(x) = 5 \cdot 10^{23}$ м⁻³ в n^+ -зоне и $N(x) = 2 \cdot 10^{21}$ м⁻³ в n -зоне. Температура молекулярной решетки полупроводника $T_0 = 300$ К.

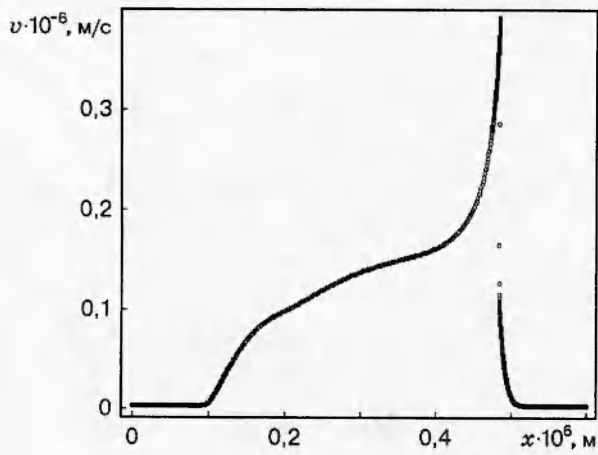


Рис. 1

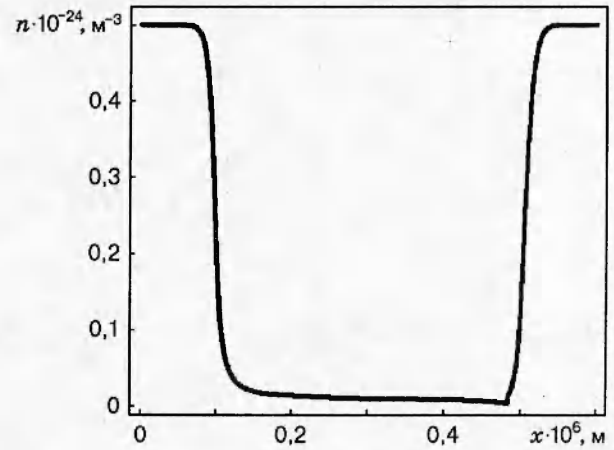


Рис. 2

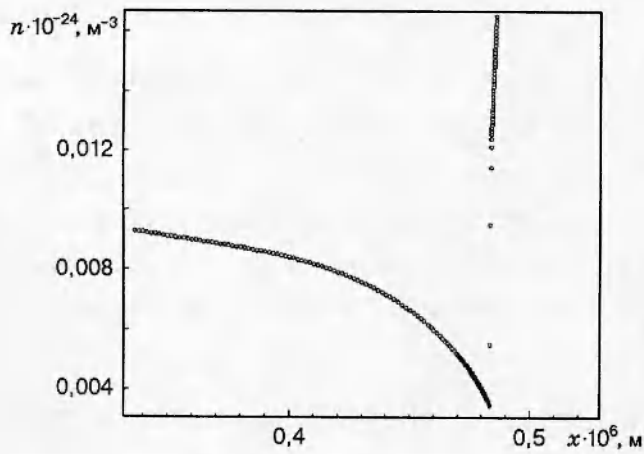


Рис. 3

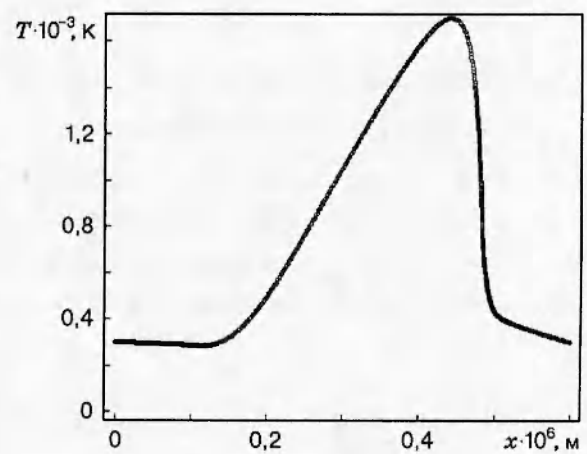


Рис. 4

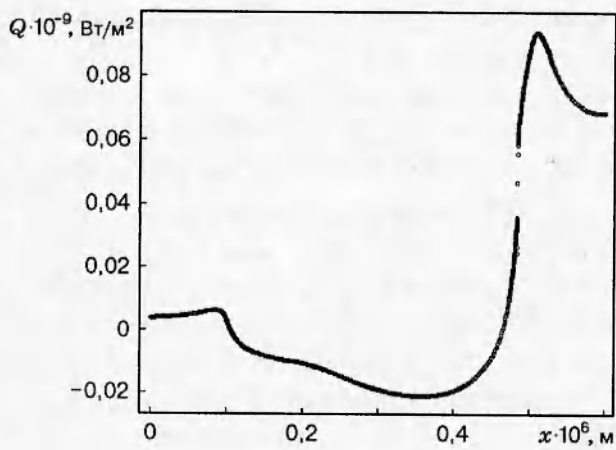


Рис. 5

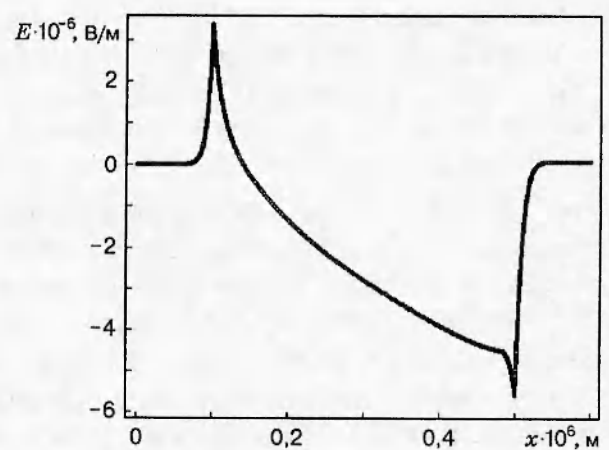


Рис. 6

Напряжение смещения $V_b = 1$ В. Времена релаксации τ_1, τ_2, τ_3 , определенные в (18), имеют следующие постоянные:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,1153, & b_1 &= -0,0068, & c_1 &= 0,4988, & d_1 &= 1,5137, \\ a_2 &= 0,4076, & b_2 &= 0,0075, & c_2 &= 3,1546, & d_2 &= 1,4833, \\ a_3 &= 0,077, & b_3 &= -0,0033, & c_3 &= 0,2879, & d_3 &= 1,0053. \end{aligned}$$

Численные эксперименты показали, что наибольшие погрешности в численном решении возникают возле $(n^+ - n)$ -переходов. С учетом этого сетка $D_{h_k}^\Delta$ строилась так, чтобы сгущение ее узлов происходило в районах $(n^+ - n)$ -переходов и захватывало район ударной волны. Численный эксперимент проводился на сетке $D_{h_k}^\Delta$ с шагами

$$\begin{aligned} h_k &= \alpha h, & k &= 1, \dots, \bar{K}; \\ h_k &= \beta h - \gamma(k - \bar{K} - 1), & k &= \bar{K} + 1, \dots, 2\bar{K}; \\ h_k &= h, & k &= 2\bar{K} + 1, \dots, 2(K_+ - \bar{K}); \\ h_k &= h + \gamma(k - 2K_+ + 2\bar{K} - 1), & k &= 2K_+ - 2\bar{K} + 1, \dots, 2K_+ - \bar{K}; \\ h_k &= \alpha h, & k &= 2K_+ - \bar{K} + 1, \dots, 2K_+ + 5\bar{K}; \\ h_k &= \beta h - \gamma(k - 2K_+ - 5\bar{K} - 1), & k &= 2K_+ + 5\bar{K} + 1, \dots, 2K_+ + 6\bar{K}; \\ h_k &= h, & k &= 2K_+ + 6\bar{K} + 1, \dots, 4K_+ + 2\bar{K}; \\ h_k &= h + \gamma(k - 4K_+ - 2\bar{K} - 1), & k &= 4K_+ + 2\bar{K} + 1, \dots, 4K_+ + 3\bar{K}; \\ h_k &= \alpha h, & k &= 4K_+ + 3\bar{K} + 1, \dots, K, \end{aligned}$$

где $\beta = \alpha - 1$; $\gamma = (\beta - 1)h/(\bar{K} - 1)$; $K = 4(K_+ + \bar{K})$; $K_+ = (2 + \alpha/2)\bar{K}$; $h = 1/(12\alpha\bar{K})$. Параметры α и \bar{K} имели значения $\alpha = 30$ и $\bar{K} = 30$, число разбиений $K = 2160$. Сетка $D_{h_k}^\Delta$ построена таким образом, чтобы ее узлы попали в точки $(n^+ - n)$ -переходов.

На рис. 1 показано распределение скорости электронов v . Сильный разрыв наблюдается перед правым $(n^+ - n)$ -переходом. На рис. 2, 3 приведено распределение плотности электронов n , причем рис. 3 иллюстрирует наличие сильного разрыва в распределении плотности n . Таким образом, в $(n^+ - n - n^+)$ -баллистическом диоде наблюдается стационарная ударная волна. На рис. 4 показано распределение температуры электронов T , а на рис. 5 — удельного теплового потока Q . Значения Q_k определены из дискретной формы уравнения (6) с $(T_x)_k = s_k \min(|\xi T_k|/h_{k+1}, |\xi T_{k-1}|/h_k)$, где $s_k = \text{sign}(\xi T_k)$, если $|\xi T_k| \leq |\xi T_{k-1}|$, и $s_k = \text{sign}(\xi T_{k-1})$ в противном случае. На рис. 6 приведено распределение напряженности электрического поля E , которая определяется из (14) заменой интегралов приближенными значениями по формуле трапеции.

Закключение. Представленное на рис. 1–6 численное решение качественно отличается от численного решения задачи о $(n^+ - n - n^+)$ -баллистическом диоде в рамках модели газодинамического типа с законом Фурье (7), не учитывающей анизотропность давления, полученного, например, в [1, 3] при тех же физических параметрах. Результаты [1, 3] свидетельствуют о том, что в баллистическом диоде плотность электронов n и скорость электронов v непрерывны, несмотря на характерный пик скорости v перед правым $(n^+ - n)$ -переходом. (Следует заметить, что в [3] для нахождения численного решения задачи о $(n^+ - n - n^+)$ -баллистическом диоде использовался, как и в данной работе, метод установления.)

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C. L., Jerome J. W., Rose D. J. Numerical methods for the hydrodynamic device model: Subsonic flow // IEEE Trans. Computer-aided Design. 1989. V. 8, N 5. P. 501–507.
2. Anile A. M., Pennisi S. Thermodynamic derivation of the hydrodynamical model for charge transport in semiconductors // Phys. Rev. B. 1992. V. 46, N 20. P. 13186–13193.
3. Блохин А. М., Иорданиди А. А., Крымских Д. А. Численное исследование одной гидродинамической модели переноса заряда в полупроводниках. Новосибирск, 1996. (Препр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 26).
4. Anile A. M., Muscato O. Improved hydrodynamical model for carrier transport in semiconductors // Phys. Rev. B. 1995. V. 51, N 23. P. 16728–16740.
5. Harten A., Lax P. D., van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // SIAM Rev. 1983. V. 25, N 1. P. 35–61.

*Поступила в редакцию 20/II 1998 г.,
в окончательном варианте — 30/III 1998 г.*
