УДК 539.3; 621.735.043

ТЕОРИЯ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ МЕТАЛЛОВ

В. М. Грешнов

Уфимский государственный авиационный технический университет,
450000 Уфа, Россия
E-mail: Greshnov_VM@list.ru

Излагается теория необратимых деформаций, позволяющая проводить анализ больших деформаций металлов, включающий определение характеристик напряженно-деформированного состояния, деформационной поврежденности, характеристик структуры на различных структурных уровнях.

Ключевые слова: пластичность, ползучесть, длительная прочность, деформационная поврежденность, вязкое разрушение, плотность дислокаций, большая и интенсивная деформации.

DOI: 10.15372/PMTF20190515

Введение. В настоящее время при разработке технологии производства деталей методами ковки и штамповки широко используется математическое моделирование [1, 2].

В середине XX в. были разработаны математическая теория пластичности [3, 4] и теория деформируемости [5, 6], которые позволяют ставить и решать начально-краевые задачи пластического формообразования при малых деформациях и простом нагружении.

Большинство технологических процессов ковки и штамповки и современные процессы пластического структурообразования (получения металла с размером зерен порядка 10^{-6} м) происходят в условиях больших ($\varepsilon > 0{,}2$) и интенсивных ($\varepsilon > 3{,}0$) деформаций [7]. Разработке физической теории больших и интенсивных деформаций металлов посвящена работа [8]. При обобщении математической теории малых деформаций (теории течения) на случай больших (конечных) упругопластических и упруговязкопластических деформаций основной проблемой является разделение тензора больших деформаций на обратимую (упругую) и необратимую (пластическую) составляющие [9–13]. В условиях сложного нагружения упруговязкопластического материала корректное разделение упругих и необратимых составляющих оказалось трудной задачей.

При разработке математической теории больших и интенсивных деформаций используется структурно-феноменологический подход [14–18]. В физике прочности и пластичности величина пластической деформации, обусловленной движением дислокаций и изменением структуры, определяется однозначно:

$$\varepsilon_p = \lambda\rho b$$

(λ — средняя длина свободного пробега подвижных дислокаций; ρ — скалярная плотность дислокаций, прошедших через рассматриваемый объем; b — модуль вектора Бюргерса дислокаций).

Целью данной работы является изложение основных положений физико-математической теории больших и интенсивных деформаций.

1. Математическая модель больших и интенсивных необратимых деформаций металлов. Исходная система уравнений включает уравнение состояния и кинетические уравнения характеристик структуры (скалярных плотностей неподвижных дислокаций и зародышевых микротрещин):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon}_* \exp\Big(-\frac{\beta G b^3 - \sigma b^2/(m\sqrt{\rho_s}\,)}{kT}\Big),$$
$$\frac{d\rho_s}{dt} = \rho_g \nu_{gs} - \rho_s \nu_{s0}, \qquad \frac{dN_m}{dt} = \xi_0 \rho_s \nu_{sm} - N_m \nu_{md},$$
$$\nu_{s0} = \nu_0 \exp\Big(-\frac{U - \sigma V_{s0}/m}{kT}\Big), \tag{1}$$
$$\nu_{sm} = \nu_{sm}^0 \exp\Big(-\frac{U_{sm} - \sigma V_{sm}/m}{kT}\Big), \qquad \nu_{md} = \nu_{md}^0 \exp\Big(-\frac{U_{md} - p V_{md}/M}{kT}\Big),$$
$$\dot{\varepsilon} = \rho_g b v, \qquad v/\nu_{gs} = \lambda.$$

Здесь t — время; $\dot{\varepsilon}_* = 10^{12}$ с$^{-1}$ — постоянная; $\beta G b^3$ — энергия активации процесса самодиффузии; T — температура; $m = 3{,}1$ — коэффициент; ρ_s — плотность неподвижных дислокаций; k — постоянная Больцмана; ρ_g — плотность подвижных дислокаций; ν_{gs} — частота превращения подвижных дислокаций в неподвижные; ν_{s0} — частота исчезновения неподвижных дислокаций; N_m — скалярная плотность деформационных микротрещин; $\xi_0 = 10^{-5}$ — коэффициент; ν_{sm} — частота превращения совокупности неподвижных дислокаций в микротрещину; ν_{md} — частота "залечивания" микротрещин; G — модуль сдвига.

Применение численного пошагового метода решения нелинейной системы уравнений (1) позволяет решать нестационарные задачи больших и интенсивных деформаций с учетом истории нагружения и эволюции структуры.

Ниже излагается алгоритм решения начально-краевой задачи необратимого формообразования с использованием предлагаемой теории, включающий определение напряженно-деформированного состояния, прогнозирование деформационной поврежденности и структуры материала на различных структурных уровнях.

2. Алгоритм решения задачи. Подставляя в систему (1) уравнения связи деформации $d\varepsilon = \dot{\varepsilon}\,dt$, скорости деформации $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$ и времени $dt = d\varepsilon/\dot{\varepsilon}$, получаем математические модели пластичности [17], ползучести [14], длительной прочности [16], вязкого разрушения соответственно.

Общим для перечисленных выше процессов является полученный с использованием обобщенного принципа максимума Мизеса закон течения упрочняющегося вязкопластического материала в виде [17, 18]

$$d\varepsilon_{ij(g)} = \frac{3}{2}\,\frac{d\varepsilon_{(g)}}{\sigma^T_{(g)} + d\sigma^u_{(g)} - d\sigma^r_{(g)}}\,(s^T_{ij(g)} + ds^u_{ij(g)} - ds^r_{ij(g)}), \tag{2}$$

где $g = 1, 2, 3, \ldots, n$ — номер расчетного шага при численном решении системы (1), (2), на котором интенсивность приращения необратимых деформаций принимает малое, но конечное значение $d\varepsilon_{(g)} = 0{,}002 \div 0{,}020$; $\sigma^T_{(g)}$ — предел текучести материала на шаге g:

$$\sigma^T_{(g)} = \Big(\beta m G b - \frac{kT_{(g)} m}{b^2} \ln \frac{\dot{\varepsilon}_* b\sqrt{\rho_{s(g-1)}}}{\dot{\varepsilon}_{(g)}}\Big)\sqrt{\rho_{s(g-1)}}\;,$$

β — коэффициент в выражении для энергии активации самодиффузии βGb^3; $m = 2{,}9 \div 3{,}1$; $T_{(g)}$ — термодинамическая температура на расчетном шаге g; $\dot\varepsilon_{(g)}$ — скорость пластической деформации на расчетном шаге g; $\rho_{s(g-1)}$ — скалярная плотность неподвижных дислокаций на расчетном шаге $g-1$; $d\sigma^u_{(g)}$ — приращение интенсивности напряжения на расчетном шаге g, обусловленное деформационным упрочнением:

$$d\sigma^u_{(g)} = \frac{\beta mGb}{2\sqrt{\rho_{s(g)}}\, b\lambda}\, d\varepsilon_{(g)},$$

$d\sigma^r_{(g)}$ — приращение интенсивности напряжения на расчетном шаге g, обусловленное термодинамическим разупрочнением:

$$d\sigma^r_{(g)} = \Big\{ \frac{\beta mGb^2\rho^2_{s(g)}\nu_D}{2\dot\varepsilon_{(g)}} \exp\Big(-\frac{\beta Gb^3 - \sigma_{(g-1)}b^2/(m\sqrt{\rho_{s0}}\,)}{kT_{(g)}}\Big) + \\ + \frac{mkT_{(g)}}{2b^3\lambda\sqrt{\rho_{s(g)}}}\Big(1 + \ln\frac{\dot\varepsilon_* b\sqrt{\rho_{s(g)}}}{\dot\varepsilon_{(g)}}\Big)\Big[1 - \frac{\rho^2_{s(g)}b^2\nu_D\lambda\sqrt{\rho_{s(g)}}}{\dot\varepsilon_{(g)}} \times \\ \times \exp\Big(-\frac{\beta Gb^3 - \sigma_{(g-1)}b^2/(m\sqrt{\rho_{s0}}\,)}{kT_{(g)}}\Big)\Big]\Big\} d\varepsilon_{(g)},$$

$s^T_{ij(g)}$, $ds^u_{ij(g)}$, $ds^r_{ij(g)}$ — девиаторы тензоров $\sigma^T_{ij(g)}$, $d\sigma^u_{ij(g)}$, $d\sigma^r_{ij(g)}$.

При решении начально-краевых задач о необратимых деформациях целесообразно использовать три уравнения (см. (2)):

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij(g)} &= \frac{3}{2}\,\frac{d\varepsilon_{(g)}}{\sigma^T_g}\, s^T_{ij(g)}; \\ d\varepsilon_{ij(g)} &= \frac{3}{2}\,\frac{d\varepsilon_{(g)}}{d\sigma^u_{(g)}}\, ds^u_{ij(g)}; \\ d\varepsilon_{ij(g)} &= \frac{3}{2}\,\frac{d\varepsilon_{(g)}}{d\sigma^r_{(g)}}\, s^r_{ij(g)}. \end{aligned} \tag{3}$$

При постановке задачи сначала следует использовать уравнение (3), так как зависимость $\sigma^u(\varepsilon)$, описывающая деформационное упрочнение, всегда монотонно возрастает и локальный модуль пластичности $d\sigma^u_{(g)}/d\varepsilon_{(g)}$, необходимый для численного решения задачи, всегда положителен.

Увеличение скалярной плотности дислокаций на расчетном шаге нагружения g в рассматриваемом микрообъеме определяется по формуле

$$\rho_{s(g)} = \rho_{s(g-1)} + d\rho_{s(g)},$$

где $d\rho_{s(g)}$ — приращение скалярной плотности дислокаций на расчетном шаге g:

$$d\rho_{s(g)} = \Big[\frac{1}{b\lambda} - \frac{\rho^{3/2}_{s(g-1)}\nu_D b}{\dot\varepsilon_{(g)}} \exp\Big(-\frac{\beta Gb^3 - \sigma_{(g-1)}b^2/(m\sqrt{\rho_{s0}}\,)}{kT_{(g)}}\Big)\Big] d\varepsilon_{(g)},$$

$\rho_{s(g-1)}$ — скалярная плотность дислокаций, накопленная за $g-1$ расчетных шагов.

Линейный размер зерен материала после деформации оценивается по формуле

$$d_{(g)} = B/\sqrt{\rho_{s(g)}}\,,$$

где $B = 10$.

Степень деформационной поврежденности (вероятность макроразрушения в микрообъеме) вычисляется следующим образом:

$$\psi_{(g)} = N_{m(g)}/N^*_{(g)}.$$

Здесь $N_{m(g)} = N_{m(g-1)} + dN_{m(g)}$ — скалярная плотность микротрещин на расчетном шаге g; $N_{m(g-1)}$ — плотность микротрещин, накопленная за $g-1$ шагов; $dN_{m(g)}$ — приращение скалярной плотности микротрещин на расчетном шаге g:

$$dN_{m(g)} = \Big\{\xi_0\rho_{s(g)} - N_{m(g-1)} \exp\Big[-\frac{\beta G b^3}{kT_{(g)}}\Big(1 + \frac{K_{(g)}}{M}\Big)\Big]\Big\} d\varepsilon_{(g)},$$

$N^*_{(g)}$ — критическая плотность микротрещин, при которой происходит их объединение в макротрещину ($N^*_{(g)} = 10^7$ см$^{-2}$ при $K_{(g)} = \sigma_{0(g)}/\sigma_{(g)} < -2{,}5$ (преобладают сжимающие напряжения), $N^*_{(g)} = 10^6$ см$^{-2}$ при $K_{(g)} > 0{,}58$ (преобладают растягивающие напряжения), $N^*_{(g)} = -60{,}2532 \cdot 10^4 K^3_{(g)} - 3 \cdot 10^6 K^2_{(g)} + 8 \cdot 10^6$ при $K_{(g)} \in [-2{,}50; 0{,}58]$); $\sigma_{0(g)} = \sigma_{ii(g)}/3$ — среднее нормальное напряжение.

Критерии макроразрушения и деформирования без макроразрушения соответственно имеют вид

$$\psi_{(g)} = N_{m(g)}/N^*_{(g)} = 1{,}0, \qquad \psi_{(g)} = N_{m(g)}/N^*_{(g)} < 1{,}0.$$

Заключение. Использование изложенной в работе теории необратимых деформаций металлов позволяет провести детальный анализ большой и интенсивной немонотонной деформаций при нестационарном сложном нагружении. При этом определяются характеристики напряженно-деформированного состояния, а также вероятность макроразрушения при определенных степени деформационной поврежденности и линейном размере зерен.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кукуджанов В. Н.** Компьютерное моделирование деформирования, поврежденности и разрушения неупругих материалов и конструкций. М.: Моск. физ.-техн. ин-т, 2008.
2. **Berisha B., Hora P., Wahlen A.** A dislocation based material model for warm forming simulation // Intern. J. Material Form. 2008. N 1. P. 135–141. DOI: 10.1007/s 12289-008-0367-7.
3. **Ишлинский А. Ю.** Математическая теория пластичности / А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев. М.: Физматлит, 2001.
4. **Chaboche J.-L.** A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories // Intern. J. Plasticity. 2008. N 24. P. 1642–1693.
5. **Колмогоров В. Л.** Механика обработки металлов давлением. Екатеринбург: Урал. гос. техн. ун-т, 2001.
6. **Богатов А. А.** Механические свойства и модели разрушения металлов. Екатеринбург: Урал. гос. техн. ун-т, 2002.
7. **Khan A. S., Farrokh B., Takacs L.** Compressive properties of Cu with different grain: submicron to nanometer realm // J. Materials Sci. 2008. N 43. P. 3305–3313. DOI: 10/1007/s 10853-008-2508-2.
8. **Рыбин В. В.** Закономерности формирования мезоструктур в ходе развитой пластической деформации // Вопр. материаловедения. 2002. № 1. С. 11–33.
9. **Lee E. H.** Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 36, N 1. P. 1–6.

10. **Левитас В. И.** Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987.
11. **Быковцев Г. И., Шитиков А. И.** Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С. 59–62.
12. **Мясников В. П.** Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
13. **Ковтанюк Л. В.** Математическая модель больших упругопластических деформаций и закономерность формирования полей остаточных напряжений в окрестностях неоднородностей материалов: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Владивосток, 2006.
14. **Грешнов В. М., Шайхутдинов Р. И.** Физико-феноменологическая модель дислокационной ползучести металлов // Вестн. Уфим. гос. авиац. техн. ун-та. 2013. Т. 17, № 1. С. 33–38.
15. **Грешнов В. М., Пучкова И. В.** К теории пластического структурообразования металлов // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 3. С. 200–212.
16. **Грешнов В. М., Шайхутдинов Р. И., Пучкова И. В.** Кинетическая физико-феноменологическая модель длительной прочности металлов // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 1. С. 189–198. DOI: 10.15372/PMTF20170118.
17. **Greshnov V. M.** Physical-mathematical theory of irreversible strains in metals // Mech. Solids. 2011. V. 46, N 4. P. 544–553. DOI: 10.3103/s0025654411040054.
18. **Грешнов В. М.** Физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов. М.: Физматлит, 2018.

Поступила в редакцию 28/I 2019 г.,
после доработки — 28/I 2019 г.
Принята к публикации 25/III 2019 г.