

кость, вызывают очень сильную турбуллизацию жидкости по всему сечению.

Авторы выражают благодарность Ф. Е. Кушнiru за оказанную помощь в проведении настоящего исследования.

Поступила 29 VIII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Serizawa A., Kataoka I., Michiyoshi I. Turbulence structure of air-water bubbly flow. — «Intern. J. Multiphase Flow», 1975, vol. 2, N 3.
2. Herringe R. A., Davis M. R. Structural development of gas-liquid mixture flows. — «J. Fluid Mech.», 1976, vol. 73, N 1.
3. Бурдуков А. П., Козьменко Б. К., Накоряков В. Е. Распределение профилей скорости жидкой фазы в газожидкостном потоке при малых газосодержаниях. — ПМТФ, 1975, № 6.
4. Бурдуков А. П., Валукина Н. В., Накоряков В. Е. Особенности течения газожидкостной пузырьковой смеси при малых числах Рейнольдса. — ПМТФ, 1975, № 4.
5. Арманд А. А. Сопротивление при движении двухфазной системы по горизонтальным трубам. — «Изв. ВТИ», 1946, № 1.
6. Неупов Г. П., Мамаев В. А. Экспериментальное исследование турбулентного раздельного течения газожидкостной смеси в горизонтальной трубе. — «Нефтяное хоз-во», 1968, № 6.
7. Кроковный П. М., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Утович В. А. Экспериментальное исследование горизонтального двухфазного потока электродиффузионным методом. — ПМТФ, 1973, № 2.
8. Бурдуков А. П., Кашинский О. Н., Малков В. А., Однорал В. П. Диагностика основных турбулентных характеристик двухфазных потоков. — ПМТФ, 1979, № 4.
9. Мамаев В. А., Неупов Г. П. Профиль скоростей в пробковом газожидкостном течении. — «Нефтяное хоз-во», 1969, № 12.
10. Ротта И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Л., 1967.

УДК 536.252 : 532.517.6

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОДИФФУЗИОННОГО ДАТЧИКА СКОРОСТИ

П. И. Гешев, А. И. Черныш

(Новосибирск)

Датчик скорости представляет собой платиновую проволочку 1, окруженную стеклом 2 (фиг. 1). Суть электродиффузионного метода измерений кратко заключается в следующем: поток электролита, содержащего два сорта ионов, например, $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ и $\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$, набегают на датчик нормально его рабочей поверхности; на платине поддерживается достаточно большой отрицательный потенциал (0,4—0,8 В), приводящий к реакции перезарядки трехзарядного иона в четырехзарядный $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-} + e^- \rightleftharpoons \text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$; данная электрохимическая реакция примечательна тем, что среди окислительно-восстановительных реакций она имеет, по-видимому, наибольшую скорость и протекает настолько быстро, что скорость изменения тока через катод ограничивается лишь конвективной диффу-

зией трехзарядных ионов к поверхности электрода. Уравнение, описывающее процесс диффузии ионов, имеет вид

$$(1) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + v(y, t) \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2},$$

где c — концентрация ионов, исчезающих на электроде; D — коэффициент диффузии этих ионов; $v(y, t)$ — компонента скорости жидкости, нормальная поверхности электрода и зависящая только от времени t и нормальной к поверхности координаты y . Тот факт, что в уравнение (1) входит зависимость только от одной координаты y , чрезвычайно упрощает построение теории датчика. Это [свойство известно как «равнодоступность поверхности» и реализуется также в методе вращающегося дискового электрода [1]. Присутствие в уравнении (1) скорости $v(y, t)$ приводит к зависимости между скоростью набегающей жидкости и током через катод, что и является принципиальной основой данного метода измерений. Детальное описание метода содержится, например, в [2]. Метод применялся к исследованию течений реологически сложных сред [3] и газожидкостных потоков [4].

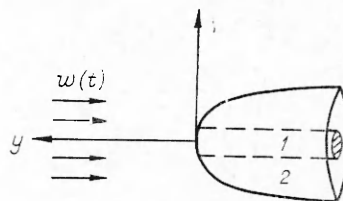
Из-за малых коэффициентов диффузии реагирующих ионов ($D \sim 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}$) электродиффузионный метод имеет инерционность, на порядок превосходящую инерционность термоанемометра [2]. Подавление амплитуд и инерционное запаздывание фаз высокочастотных пульсаций можно учесть и исправить расчетным путем, если известна частотная характеристика (ЧХ) датчика $H(i\omega)$, определяемая как отношение комплексной амплитуды гармонического сигнала на выходе $\tilde{i}(\omega)$ (ток) к амплитуде «сигнала» на «входе» $\tilde{w}(\omega)$ (скорость). Удобно рассматривать ЧХ безразмерную и нормированную на единицу в нуле частоты

$$(2) \quad H(i\omega) = \frac{\tilde{i}(\omega) \tilde{w}(0)}{i(0) \tilde{w}(\omega)}.$$

В таком виде ЧХ может служить непосредственной мерой инерционности датчика на частоте ω . ЧХ имеет смысл определять лишь для линейных систем. Это означает, что при расчетах следует считать пульсации скорости и концентрации малыми и линеаризовать систему уравнений, описывающих работу датчика. В реальных экспериментах условие малости амплитуд пульсаций скорости обычно выполняется.

При выводе системы уравнений датчика предполагается следующее:

- 1) Число Рейнольдса, построенное по внешнему диаметру датчика d , достаточно велико, и справедливы приближения теории пограничного слоя.
- 2) Электрод занимает лишь малую окрестность критической точки, так что компоненты радиальной и нормальной скорости в пограничном слое записываются в виде $u = r \partial f(y, t) / \partial y$, $v = -2f(y, t)$, где r — расстояние от оси симметрии; $f(y, t)$ — функция тока осесимметричного обтекания [5].
- 3) Потенциальное течение вне пограничного слоя в окрестности критической точки определяется формулами $U = kw(t)r/d$, $V = -2kw(t)y/d$, где $w(t)$ — скорость жидкости на больших расстояниях от датчика ($y \gg d$); k — некоторая безразмерная константа порядка единицы, определяемая в принципе из точного решения задачи внешнего потенциального обтекания (для тела Ренкина [6], создаваемого источником в равномерном потоке, $k = 4$). Эта константа может быть определена в процессе тари-



Ф и г. 1

ровки датчика. 4) Предполагается, что числа Шмидта велики, $Sc = \nu/D \gg 1$ (ν — кинематическая вязкость жидкости). В этом случае диффузионный пограничный слой меньше гидродинамического в $Sc^{1/3}$ раз, и скорость в нем выражается в виде $v = -\partial^2 f(y, t)/\partial y^2|_{y=0}y^2$.

Уравнения для средних и линеаризованные уравнения для пульсационных величин получаются из уравнений Навье — Стокса и (1)

$$(3) \quad f_0'' - 2f_0'f_0'' - \nu f_0'''' = a_0^2;$$

$$(4) \quad b_0 y^2 c_0'' + D c_0'' = 0;$$

$$(5) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + 2f_0'f_1' - 2f_0''f_1 - 2f_1''f_0 - \nu f_1'''' = 2a_0 a_1 + \frac{da_1}{dt};$$

$$(6) \quad \frac{\partial c_1}{\partial t} - b_0 y^2 c_1' - D c_1'' = b_1 y^2 c_0',$$

где индексы 0 и 1 обозначают соответственно стационарные и пульсационные величины; штрихи при функциях — дифференцирование по y ; введены также обозначения: $a_0 = kw_0/d$; $a_1 = kw_1(t)/d$; $b_0 = f_0''(y=0)$; $b_1 = f_1''(y=0, t)$ (w_0 и $w_1(t)$ — средняя и пульсационная скорости на бесконечности). Граничные условия к уравнениям (3) — (6) имеют вид

$$(7) \quad f_0 = f_0' = f_1 = f_1' = 0, \quad c_0 = c_1 = 0 \text{ при } y = 0;$$

$$(8) \quad f_0' = a_0, \quad f_1' = a_1, \quad c_0 = c_\infty, \quad c_1 = 0 \text{ при } y = \infty.$$

Уравнения (3), (4) имеют известные решения (см., например, [5]). Уравнения (5), (6) можно интерпретировать как уравнения двух последовательно соединенных подсистем. Первая подсистема — гидродинамический пограничный слой, на «входе» которого (справа в (5)) задаются пульсации скорости $w_1(t)$, на «выходе» получают значения $b_1 = f_1''(y=0)$. Вторая подсистема описывает диффузионный пограничный слой: на «входе» задана величина b_1 , на «выходе» — поток массы, который и определяет ток через электрод, согласно закону Фарадея: $i_1 = -FSD c_1'(y=0; t)$, где F — число Фарадея; S — площадь катода. Очевидно, что ЧХ всей системы равна произведению ЧХ подсистем.

Возьмем лишь одну гармонику из спектра пульсаций скорости $a_1(t) = \tilde{a}_1 e^{i\omega t}$; в силу линейности подсистем имеем $f_1(t) = \tilde{f}_1 e^{i\omega t}$, $c_1(t) = \tilde{c}_1 e^{i\omega t}$, где \tilde{a}_1 , \tilde{f}_1 , \tilde{c}_1 — комплексные амплитуды соответствующих пульсаций.

Введем безразмерные переменные

$$\eta_+ = \left(\frac{a_0}{\nu}\right)^{1/2} y, \quad \varphi_0(\eta_+) = \frac{f_0'}{a_0}, \quad \varphi_1(\eta_+) = \frac{\tilde{f}_1'}{a_1}, \quad \omega_+ = \frac{\omega}{a_0};$$

$$\eta_- = \left(\frac{b_0}{D}\right)^{1/3} y, \quad \psi_0(\eta_-) = \frac{c_0}{c_\infty}, \quad \psi_1(\eta_-) = \frac{b_0 \tilde{c}_1}{b_1 c_\infty}, \quad \omega_- = \left(\frac{\nu}{D}\right)^{1/3} \frac{\omega}{a_0},$$

где c_∞ — концентрация ионов на бесконечности; $\tilde{b}_1 = \tilde{f}_1''(y=0)$. В этих переменных уравнения и граничные условия имеют вид

$$(9) \quad \varphi_0'' - \varphi_0' \int_0^{\eta_+} \varphi_0 d\eta_+ - \varphi_0'' = 1;$$

$$(10) \quad \eta_-^2 \psi_0' + \psi_0'' = 0;$$

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & i\omega_+\varphi + 2\varphi_0\varphi - 2\varphi_0' \int_0^{\eta_+} \varphi d\eta_+ - 2\varphi_0'' \int_0^{\eta_+} \varphi_0 d\eta_+ - \varphi'' = 2 + i\omega_+; \\
 (12) \quad & i0,834\omega_-\psi - \eta_+^2\psi' - \psi'' = \eta_+^2\psi_0'; \\
 (13) \quad & \varphi_0 = \varphi = \psi_0 = \psi = 0 \quad \text{при } \eta_{+,-} = 0; \\
 (14) \quad & \varphi_0 = \varphi = \psi_0 = 1, \quad \psi = 0 \quad \text{при } \eta_{+,-} = \infty.
 \end{aligned}$$

В нижнем пределе интегралов в (9), (11) учтено условие (7). Штрихи в (9)–(12) означают теперь дифференцирование по соответствующему аргументу η_+ или η_- . Расчеты показали, что $\varphi_0'(\eta_+ = 0) = 1,312$; это полностью согласуется со значением из [5]. Численный коэффициент $0,834 = 1,312^{-2/3}$ в целях удобства оставлен в уравнении (12) и не введен в ω_- .

Уравнение (10) интегрируется в аналитическом виде. Численное решение остальных уравнений в (9)–(12) получено методом установления. Для этого в левые части уравнений вводились производные от искомым функций по некоторому фиктивному времени τ , и по неявной разностной схеме находились соответствующие данной частоте стационарные по τ решения.

В результате получены две комплексные функции $H_r = \varphi'(\eta_+ = 0)$ и $H_d = \psi'(\eta_- = 0)$, зависящие только от ω_+ и ω_- и являющиеся безразмерными, ненормированными ЧХ подсистем. Модули и аргументы этих функций представлены на фиг. 2 (прямые линии — асимптотические значения аргументов при $\omega_{+,-} \rightarrow \infty$).

Правильность численных результатов подтверждена сопоставлением с асимптотическими формулами, полученными в пределе $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ из уравнений (11), (12). Модуль H_r отклоняется от асимптотической формулы менее чем на 1% уже при $\omega_+ > 30$, тогда как такое же отклонение $|H_d|$ от асимптотики достигается лишь при $\omega_- > 100$. Асимптотические формулы использовались для точной аппроксимации результатов численного счета

$$(15) \quad |H_r| = (15 + \omega_+^2)^{1/4};$$

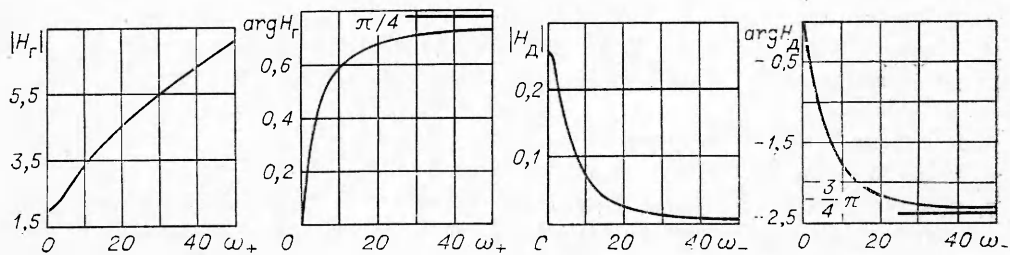
$$(16) \quad \arg H_r = 0,5 \arctg(0,256\omega_+);$$

$$(17) \quad |H_d| = 0,259 \left(\frac{1 + 2,32 \cdot 10^{-3} \omega_-^2}{1 + 4,45 \cdot 10^{-2} \omega_-^2 + 1,49 \cdot 10^{-4} \omega_-^4} \right)^{3/4};$$

$$(18) \quad \arg H_d = -1,5 \arctg(0,211\omega_- (1 + 2,04 \cdot 10^{-3} \omega_-^2)).$$

Относительная погрешность аппроксимации формулами (15)–(18) не превышает 0,5%.

Отметим интересную особенность гидродинамического пограничного слоя. Модуль H_r растет с частотой, а аргумент положителен: фаза пуль-



Ф и г. 2

саций на «выходе» опережает фазу пульсаций на «входе». Величина $b(t)$ связана с трением в окрестности критической точки. Действительно, касательное напряжение трения есть

$$\tau_w = \rho v (\partial u / \partial y)_{y=0} = \rho v r b(t),$$

а, как показано в [5], пульсации трения опережают по фазе пульсации скорости в пограничном слое. ЧХ диффузионного пограничного слоя ведет себя нормальным образом: высокочастотные пульсации сильно подавляются по амплитуде и отстают по фазе. Полная ЧХ электродиффузионного датчика скорости была рассчитана в работе [7], но лишь для некоторых значений Sc . Авторы этой работы не заметили, что полная ЧХ датчика распадается на произведение двух универсальных функций частоты. Сравнение наших результатов с рассчитанными в [7] показало, что модули ЧХ различаются не более чем на 3%, но различие в фазах достигает 7%. Столь большие отклонения вызваны, по-видимому, не очень удачным методом счета, использованным в [7], — методом «пристрелки», по граничным условиям.

Выпишем, согласно выражению (2), окончательную формулу для модуля нормированной ЧХ датчика скорости

$$|H(i\omega)| = \left(i + \frac{\omega_-^2}{15Sc^{2/3}} \right)^{1/4} \left(\frac{1 + 2,32 \cdot 10^{-3} \omega_-^2}{1 + 4,45 \cdot 10^{-2} \omega_-^2 + 1,49 \cdot 10^{-4} \omega_-^4} \right)^{3/4},$$

$$\text{где } \omega_- = \frac{\omega d}{kw_0} \left(\frac{\nu}{D} \right)^{1/3}.$$

Фаза ЧХ определяется как сумма фаз (16) и (18). Погрешность результирующих формул не превышает 1%. Их можно использовать для восстановления спектров и отдельных реализаций турбулентных флуктуаций скорости.

Поступила 29 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Плесков Ю. В., Филлиновский В. Ю. Вращающийся дисковый электрод. М., «Наука», 1972.
2. Mizushima T. The electrochemical method in transport phenomena.— In: Advances in heat transfer. Vol. 7. N. Y.— L., Academic Press, 1971.
3. Реофизика. Сб. трудов ИТМО АН БССР. Минск, 1977.
4. Бурдуков А. П., Козьменко Б. К., Накоряков В. Е. Распределение профилей скорости жидкой фазы в парожидкостном потоке при малых газосодержаниях.— ПМТФ, № 6, 1975.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
6. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
7. Боголюбов Ю. Е., Смирнова Л. П. Массоотдача в окрестности лобовой точки в пульсирующем потоке.— «Изв. СО АН СССР», 1977, № 8, вып. 2.