

УДК 532.51

## **Моделирование нелинейных волновых режимов в тонком горизонтальном слое тяжелой жидкости, увлекаемом турбулентным потоком газа\***

**О.Ю. Цвелодуб**

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

*Новосибирский государственный университет*

E-mail: tsvel@itp.nsc.ru

Рассматриваются нелинейные волны на поверхности горизонтального слоя жидкости, находящегося в известном поле напряжений на границе раздела. Исследуется природа ветвления волновых режимов от невозмущенного течения. Для этого находятся решения модельного нелинейного уравнения на отклонение толщины слоя от невозмущенного уровня. Аналитически построены слабо нелинейные стационарно-бегущие решения этого уравнения, у которых волновые числа лежат в окрестности нейтральных волновых чисел. Численно найдены стационарно-бегущие периодические решения первого семейства, волновые числа которых лежат вне этой окрестности.

**Ключевые слова:** горизонтальный слой вязкой жидкости, газовый поток, модельная система, эволюционное уравнение, устойчивость.

### **Введение и постановка задачи**

В гидродинамической теории и практике совместное течение слоя жидкости и газа изучается достаточно давно. Такие системы находят широкое применение в различных технологических приложениях. Решение задач в полной постановке по этой проблематике связано со значительными вычислительными трудностями, поэтому при их решении часто выделяются два этапа моделирования: сначала определяются напряжения газа на поверхности пленки, затем рассчитывается эволюция волн в жидкости. При этом полагается, что поскольку скорость жидкости значительно меньше характерной скорости газа, на первом этапе поверхность раздела можно считать жесткой и неподвижной. Кроме того, в силу малости толщины пленки воздействие возмущений границы раздела на течение газа можно считать линейным, поэтому задача вычисления возмущений напряжений газа на этой поверхности сводится к рассмотрению влияния на них отдельных пространственных гармоник возмущений границы раздела. На втором этапе исследуются нелинейные волны на поверхности слоя жидкости, находящегося в известном поле напряжений на границе раздела фаз. Разделение задачи на такие этапы используется многими авторами (см., например, [1–5]).

---

\* Исследования выполнены в рамках государственного задания ИТ СО РАН (AAAA-A17-117022850024-4).

В настоящей работе рассматриваются нелинейные волны на горизонтальном слое тяжелой жидкости, находящемся в известном поле напряжений на границе раздела фаз. Течение газа является турбулентным и происходит в широком горизонтальном канале. При решении используется декартова система координат: ось  $x$  направлена горизонтально, направление оси  $y$  противоположено направлению ускорения свободного падения  $g$ . В случае, когда функция  $y = h(x, t)$ , определяющая положение точек границы области, является однозначной, существует непрерывно дифференцируемое преобразование координат, переводящее область течения жидкости в полосу постоянной толщины:

$$x = x, \quad \eta = y/h(x, t), \quad t = t.$$

В работе [6] в результате выполнения такого преобразования и использования новых переменных в уравнениях, записанных в тензорной, инвариантной относительно систем координат, форме, была получена система, описывающая при умеренных числах Рейнольдса в длинноволновом приближении эволюцию возмущений горизонтального слоя жидкости, увлекаемого турбулентным потоком газа. В случае малых расходов ( $Re \sim 1$ ) из этой системы было выведено эволюционное уравнение для толщины пленки  $h$ :

$$h_t + 2hh_x + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{3} Re h^3 \left( \varepsilon We h_{xxx} - \frac{1}{Fr} h_x \right) + h^2 \int k \tau(k) \hat{h}(k, t) e^{ikx} dk \right) = 0, \quad (1)$$

здесь  $Re = \rho h_0 u_0 / \mu$  — число Рейнольдса,  $We = \sigma / \rho l_0 u_0^2$  — число Вебера,  $Fr = u_0^2 / gh_0$  — число Фруда,  $\varepsilon = h_0 / l_0$  — отношение характерной толщины пленки  $h_0$  к характерному продольному размеру возмущений  $l_0$ . При выполнении безразмеривания использовались характерные масштабы скорости и времени —  $u_0$  (среднерасходная скорости жидкости) и  $l_0 / u_0$  соответственно. В состав безразмерных комплексов входят также  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  — плотность,  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости. Кроме того, в интегральном слагаемом в уравнении (1) присутствуют Фурье-компоненты касательных напряжений газа на границе раздела, обусловленные криволинейностью этой границы —  $\tau(k) = \tau_r(k) + i\tau_{im}(k)$ , и Фурье-компоненты разложения формы поверхности слоя жидкости

$$\hat{h}(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, t) e^{-ikx} dx.$$

Отметим, что при выводе уравнения (1) кроме приближения малых чисел Рейнольдса ( $Re \sim 1$ ) полагалось, что число Вебера велико —  $We\varepsilon \sim 1$ . В случае, если рассматриваются пространственные периодические решения уравнения (1), интегральное слагаемое заменяется соответствующим рядом Фурье.

Для возмущений малой, но конечной амплитуды в работе [6] из уравнения (1) с использованием метода разных масштабов времени были получены уравнения

$$\frac{\partial h_1}{\partial t_0} + 2 \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t_1} + 2h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{Re}{Fr} \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + \frac{We Re \varepsilon}{3} \frac{\partial^4 h_1}{\partial x^4} + i \int \hat{h}_1(k, t) k^2 \tau(k) e^{ikx} dk = 0, \quad (3)$$

здесь  $h = 1 + \varepsilon h_1$ ,  $t_0 = t$  и  $t_1 = \varepsilon t$  — «быстрое» и «медленное» времена. Из уравнения (2) следует, что в первом приближении (для «быстрых» времен) возмущения малой, но

конечной амплитуды распространяются с постоянной скоростью  $c_s = 2$ . Для горизонтального слоя невозмущенным течением является течение Куэтта. В качестве характерного масштаба скорости при получении уравнения (1) выбиралась среднерасходная скорость такого течения [6]. Следовательно, полученный результат ( $c_s = 2$ ) означает, что в этом приближении возмущение поверхности слоя неподвижно относительно частиц жидкости, принадлежащих этой поверхности. Подчеркнем, что уравнение (3) записано, соответственно, в системе отсчета, движущейся относительно твердой стенки со скоростью частиц жидкости на свободной поверхности.

Уравнение (3) описывает нелинейную эволюцию возмущений на «медленных» временах. Характерный продольный масштаб  $l_0$  выбирается так, чтобы коэффициенты при второй и четвертой производных в уравнении (3) были одинаковыми. В этом случае величина  $\varepsilon$  должна удовлетворять соотношению

$$\varepsilon = 1/(\text{WeFr}). \quad (4)$$

После проведения замены

$$t' = bt_1, \quad h_1 = bH, \quad b = \frac{\text{WeRe}\varepsilon}{3} \equiv \frac{\text{Re}}{3\text{Fr}}$$

уравнение (3) принимает вид [6]

$$\frac{\partial H}{\partial t'} + 2H \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} + B \int_{-\infty}^{\infty} ik^2 \tau(k) \hat{H}(k, t) e^{ikx} dk = 0, \quad (5)$$

где  $B = 1/b$ . В дальнейшем индекс у  $t'$  опускаем.

Целью настоящей работы является моделирование на основе уравнения (5) процесса зарождения нелинейных волн на поверхности горизонтального слоя жидкости, увлекаемого газовым потоком.

Уравнение (5) относится к классу модельных эволюционных уравнений, описывающих поведение возмущений в активно-диссипативных средах. Неустойчивость линейных возмущений обусловлена интегральным слагаемым, демонстрирующим влияние возмущений трения со стороны газа на подвижную границу слоя жидкости, за диссипацию ответственны вторая и четвертая производные (последняя представляет собой учет влияния капиллярных эффектов). Роль этих слагаемых проявляется при анализе линейной устойчивости невозмущенного решения ( $H = 0$ ). Пренебрегая в уравнении (5) нелинейным членом и представляя его решение в виде

$$H \sim \exp(ik(x - ct)),$$

приходим к соотношению

$$c \equiv c_r + ic_i = -i(k + k^3) + Bk\tau(k). \quad (6)$$

Так как у нейтрального возмущения мнимая часть фазовой скорости  $c_i = 0$ , из (6) следует, что его волновое число  $k_n$  удовлетворяет уравнению

$$(1 + k_n^2) - B\tau_{\text{im}}(k_n) = 0. \quad (7)$$

Пусть параметры невозмущенного течения таковы, что при характерном продольном масштабе  $l_0$ , определяемом соотношением (4), нейтральное волновое число  $k_n = 1$ . При этом полагаем, что данному значению  $k_n$  соответствует некоторое значение  $\tau_{\text{im}} = \tau_{\text{im}}(k_n) \equiv \tau_{\text{im}}(1)$ . Из (7) следует, что в этом случае значение параметра  $B$  определяется из соотношения

$$B = 2/\tau_{\text{im}}(k_n). \quad (8)$$

Из формул (4) и (8) для характерного масштаба скорости  $u_0$  (среднерасходная скорость жидкости невозмущенного течения) и параметра  $B$  получаем соотношение [6]

$$u_0 = \frac{B\varepsilon\sigma}{3\mu} \equiv \frac{2\varepsilon\sigma}{3\mu\tau_{\text{им}}(1)}.$$

### Результаты

При получении представляемых ниже результатов в расчетах использовались данные о пульсациях трения на границе раздела пленка–газ, полученные в исследовании [5] по квазиламинарной модели Бенджамина [7]. В работе [6] для нескольких значений параметра  $B$  были рассчитаны области волновых чисел неустойчивых возмущений. При этих значениях  $B$  значения безразмерного волнового числа в газовой части задачи  $k_g = kv_g / u^*$  изменялись в интервале  $0,0033 \div 0,02$ . Здесь  $u^* = \sqrt{T_0 / \rho_g}$  — размерная динамическая скорость в газе,  $k = 2\pi / \lambda_{\text{ст}}$  — размерное волновое число для соответствующего пространственного периода  $\lambda_{\text{ст}}$  волнистой стенки,  $v_g$  — коэффициент кинематической вязкости газа. Как показали расчеты [6], при этих значениях параметров для задачи в пленке уравнение (7) имеет два решения: наибольшее нейтральное волновое число  $k_{n_1} = 1$  и наименьшее число  $k_{n_2}^* \approx 0,2$ , ограничивающее область неустойчивых волновых чисел «снизу» и не превышающее указанного значения.

Стационарно-бегущие линейные решения ответвляются от тривиального решения в точках с нейтральными волновыми числами  $k_n$ . Из (5) легко получить, что их фазовая скорость и частота равны соответственно

$$c_0 = Bk_n\tau_r(k_n), \quad \omega_0 \equiv k_n c_0 = Bk_n^2\tau_r(k_n). \quad (9)$$

Стационарно-бегущие периодические слабо нелинейные решения с волновыми числами  $k$  лежат в окрестности нейтральных волновых чисел. Для этого, аналогично [8], будем искать эти решения в виде пространственного ряда Фурье:

$$H(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(t) \exp(iknx). \quad (10)$$

При этом полагаем, что

$$H_n = \delta^{|n|} \tilde{H}_n, \quad (11)$$

$$k = k_n + \delta^2 k_2 + \dots, \quad (12)$$

и вводим в рассмотрение набор различных времен:

$$t_n = \delta^n t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

здесь  $\delta$  — некоторый малый параметр.

Очевидно, что представление (11) имеет смысл, если рассматривается окрестность наибольшего нейтрального волнового числа ( $k_{n_1} = 1$ ). В этом случае волновое число второй гармоники расположено уже достаточно далеко от верхней границы, разделяющей области устойчивости и неустойчивости, поэтому в линейном случае вторая и более высокие гармоники быстро затухают. Ситуация в окрестности «нижней» нейтральной точки ( $k_{n_2}$ ) иная. Здесь для упомянутых выше значений параметров волновые числа не только второй гармоники, но и нескольких более высоких гармоник находятся

Рис. 1. Зависимость параметра  $B$  от «газового» параметра  $k_g^{-1}$ .

в области неустойчивости. В этом случае использовать при построении решения предположение (11) некорректно. В дальнейшем будем иметь в виду, что речь идет об окрестности нейтрального волнового числа  $k_n = 1$ .

На рис. 1 представлена зависимость  $B$  от «газового» параметра  $k_g$ .

При расчете значений  $B$  в формуле (8)

учитывалось, что  $\tau_{\text{im}}(1) \equiv \tau_{\text{im}}(k_g)$ . Подставляя соотношения (10)–(13) в формулу (5), собирая вместе коэффициенты при одинаковых экспонентах и приравнивая их к нулю, после достаточно простых, но громоздких выкладок получим

$$H = A \exp[i(kx - \omega t)] + A^2 A_{\text{H2}} \exp[2i(kx - \omega t)] + \text{К.С.}, \quad (14)$$

здесь  $A = \delta |\tilde{H}_1|$ ,  $k = k_n + A_k A^2$ ,  $\omega = \omega_0 + A_\omega A^2$ , К.С. — комплексно-сопряженное выражение.

Выражение для фазовой скорости с точностью до  $A^2$  имеет вид:

$$c \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_0 + A_\omega A^2}{k_n + A_k A^2} = c_0 + \frac{A^2}{k_n} (A_\omega - c_0 A_k). \quad (15)$$

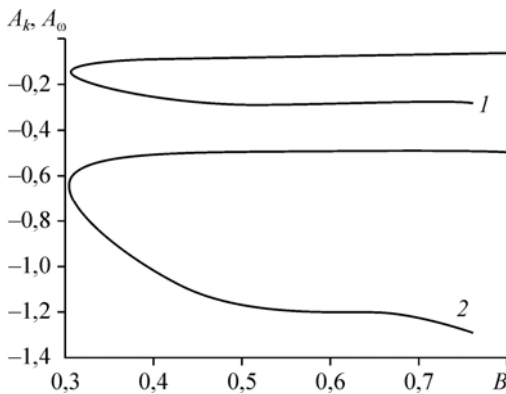
Для (14), (15), с учетом (9), и того, что  $k_n = 1$ , имеем

$$k = 1 + A_k A^2, \quad c_0 = \omega_0 = B \tau_r(1), \quad c = c_0 + A_c A^2, \quad \text{где } A_c \equiv A_\omega - c_0 A_k.$$

Коэффициенты  $A_{\text{H2}}$ ,  $A_k$ ,  $A_\omega$  зависят только от первых двух Фурье-гармоник пульсаций касательных напряжений трения газа на границе раздела газ–пленка и от параметра  $B$ :

$$A_{\text{H2}} = \frac{1}{\omega_0 + 10i - 2B\tau(2)} \equiv A_{\text{H2r}} + iA_{\text{H2i}},$$

$$A_k = \frac{2A_{\text{H2i}}}{2 - B\tau'_{\text{im}}(1)}, \quad A_\omega = 2A_{\text{H2r}} + B \frac{2A_{\text{H2i}}(2\tau_r(1) + \tau'_r(1))}{2 - B\tau'_{\text{im}}(1)},$$



здесь  $\tau(1) \equiv \tau(k_n)$ ,  $\tau(2) \equiv \tau(2k_n)$ ,  $\tau'_{\text{im}}(1) \equiv d\tau_{\text{im}}(k)/dk|_{k=1}$ . Из выражений (14), (15) видно, что в решении можно взять  $\delta = 1$ , а в качестве малого параметра использовать амплитуду  $A$  первой гармоники.

На рис. 2 представлены зависимости коэффициентов  $A_k$ ,  $A_\omega$  от параметра  $B$  (кривые 1, 2 соответственно). Видно, что

Рис. 2. Зависимости коэффициентов  $A_k$  (1) и  $A_\omega$  (2) от параметра  $B$ .

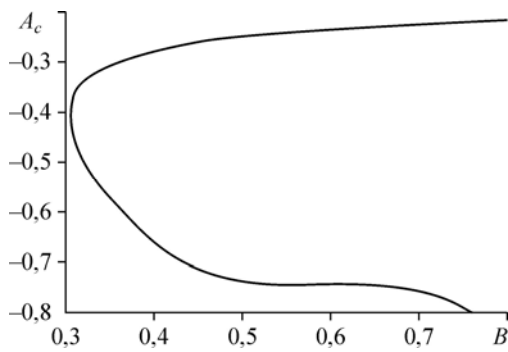


Рис. 3. Зависимость коэффициента  $A_c$  от параметра  $B$ .

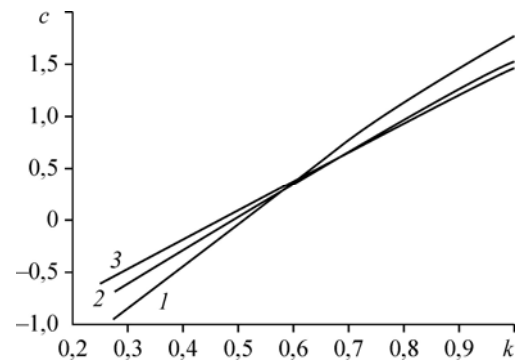
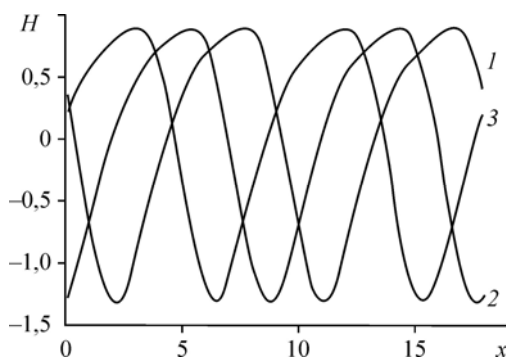


Рис. 4. Зависимость скорости стационарных бегущих решений первого семейства от волнового числа  $k$ .  
 1 —  $B = 0,305$  ( $k_g = 0,01$ ), 2 —  $B = 0,327$  ( $k_g = 0,005$ ),  
 3 —  $B = 0,4$  ( $k_g = 0,0025$ ).

ветвление волнового режима (14) происходит «мягким» образом — поправки к волновому числу отрицательны (кривая 1), т.е. волновые числа периодических стационарно-бегущих режимов малой, но конечной амплитуды лежат в области линейной неустойчивости невозмущенного течения. На рис. 3 приведена зависимость коэффициента  $A_c$  от параметра  $B$ . Видно, что в окрестности точки ветвления при продвижении вглубь области неустойчивости фазовая скорость слабонелинейных возмущений уменьшается по сравнению со скоростью нейтральных линейных возмущений (9). Для получения стационарно-бегущих решений этого семейства (первое семейство) с волновыми числами, лежащими достаточно далеко от нейтрального волнового числа  $k_n$ , задача решалась численно. Рассматривалась эволюция периодических возмущений, которые «притягивались» к стационарно-бегущему решению из этого семейства. При расчетах все гармоники ряда (10) с номерами  $|n| > N$  полагались равными нулю. Для используемых волновых чисел достаточно значений  $N$ , лежащих в диапазоне от 8 до 15.

На рис. 4 для трех значений параметра  $B$  представлена зависимость скорости стационарно-бегущих решений первого семейства от волнового числа. В точке  $k_n = 1$  значения скоростей удовлетворяют соотношению (9). При продвижении в область меньших волновых чисел скорость волн уменьшается и для их достаточно малых значений становится отрицательной (т.е. в системе отсчета, связанной со стенкой, становится меньше, чем  $c_s = 2$ ). В качестве примера на рис. 5–7 для значения параметра  $B = 0,4$ , которому соответствует значение «газового» параметра  $k_g = 0,025$ , построены профили поверхности



периодических стационарно-бегущих решений первого семейства. Пространственный интервал составляет две длины волны  $-2\lambda$  ( $\lambda = 2\pi / k$ ). Промежуток времени между моментами, для которых показаны кривые на этих рисунках, составляет

Рис. 5. Профили поверхности для трех различных моментов времени.  
 $t = 50$  (1), 100 (2), 150 (3); фазовая скорость  $c = 0,672$ , волновое число  $k = 0,7$ .

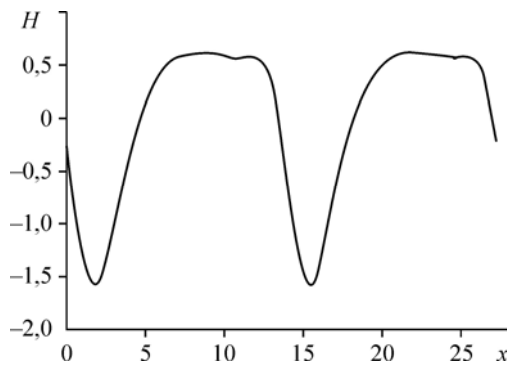


Рис. 6. Профиль поверхности для  $k = 0,46$ .  
Фазовая скорость  $c = 0$ .

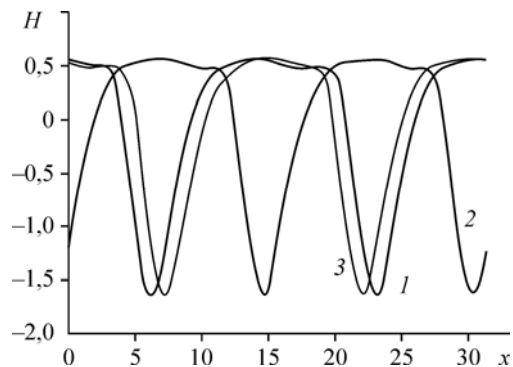


Рис. 7. Профили поверхности для трех  
различных моментов времени.  
 $t = 100$  (1),  $150$  (2),  $200$  (3);  
фазовая скорость  $c = -0,1669$ , волновое число  $k = 0,4$ .

$\Delta t = 50$ . Для волны, представленной на рис. 5, волновое число  $k = 0,7$  длина волны  $\lambda = 8,98$ , фазовая скорость  $c = 0,672$ . За промежуток времени  $\Delta t$  любая зафиксированная фаза смещается на  $\Delta L = c\Delta t = 33,6 > 3,5\lambda$ , т.е. за это время любая точка на конкретной кривой (например, на кривой 1) покидает представленный на рисунке пространственный интервал  $2\lambda$  и на «соседней» кривой (соответственно, на кривой 2) оказывается уже вне поля рисунка, справа от него. У решения с волновым числом  $k = 0,46$  фазовая скорость  $c = 0$ , поэтому оно представлено на рис. 6 одной неподвижной кривой. Пример волны, бегущей влево, приведен на рис. 7. Здесь  $c = -0,1669$ ,  $k = 0,4$ ,  $\lambda = 15,7$ . За промежутки времени  $\Delta t$ , разделяющие представленные на рисунке кривые, фиксированная фаза волны смещается на расстояние, немного превышающее половину длины волны:  $\Delta L = c\Delta t = 8,3 > 0,5\lambda$ .

### Заключение

Рассмотрены нелинейные волны на поверхности горизонтального слоя жидкости, подвижная граница которого находится в известном поле напряжений. В случае малых чисел Рейнольдса задача сводится к рассмотрению решений нелинейного интегро-дифференциального уравнения на отклонение толщины слоя от невозмущенного уровня. Исследовались решения такого модельного уравнения. Проанализирован характер ветвления волновых режимов от невозмущенного течения, аналитически найдены слабо нелинейные стационарно-бегущие решения, волновые числа которых находятся в окрестности нейтральных волновых чисел. Показано, что имеет место мягкий тип ветвления. Численно построены стационарно-бегущие решения, волновые числа которых лежат глубоко в области неустойчивости невозмущенного течения.

### Список литературы

1. Демёхин Е.А. Нелинейные волны в пленке жидкости, увлекаемой турбулентным газовым потоком // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 2. С. 37–42.
2. Dietze G.F., Ruyer-Quil Ch. Wavy liquid films in interaction with a confined laminar gas flow // J. Fluid Mech. 2013. Vol. 722. P. 348–393.
3. Tseluiko D., Kalliadasis S. Nonlinear waves in counter-current gas-liquid film flow // J. Fluid Mech. 2011. Vol. 673. P. 19–59.

4. **Vellingiri R., Tseluiko D., Savva N., Kalliadasis S.** Flow dynamics of a liquid film sheared by a co-flowing turbulent gas // *Int. J. Multiphase Flow*. 2013. Vol. 56. P. 93–104.
5. **Вожаков И.С., Архипов Д.Г., Цвелодуб О.Ю.** Моделирование нелинейных волн на поверхности тонкой пленки жидкости, увлекаемой турбулентным потоком газа // *Теплофизика и аэромеханика*. 2015. Т. 22, № 2. С. 201–212.
6. **Цвелодуб О.Ю., Архипов Д.Г.** Моделирование нелинейных волн на поверхности тонкой пленки жидкости, движущейся под действием турбулентного потока газа // *Прикл. механика и технич. физика*. 2017. Т. 58, № 4. С. 56–67
7. **Benjamin T.B.** Shearing flow over a wavy boundary // *J. Fluid Mechanics*. 1959. Vol. 6. P. 161–205.
8. **Tselodub O. Yu.** Simulating nonlinear steady-state traveling waves on the falling liquid film entrained by a gas flow // *J. Phys.: Conf. Series*. 2016. Vol.754. P. 032020-1–032020-5.

*Статья поступила в редакцию 11 марта 2019 г.,  
после доработки — 22 апреля 2019 г.,  
принята к публикации 26 апреля 2019 г.*