Для сопоставления различных критериев неустойчивости вычислим β для конкретного случая. Пусть $\alpha = 2/3$, $n = 5$ ($\gamma = 3$), $\tau(\pi/a)^2 Q/E = 800$. Соответствующие значения $\hat{\beta}$ приведены в последнем столбце таблицы. Очевидно, что влияние выбора критерия на $\hat{\beta}$ несущественно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арутюнян Н. X., Дроздов А. Д., Колмановский В. Б.** Устойчивость вязкоупругих тел и конструкций // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела.— М.: ВИНИТИ, 1987.— Т. 19.
2. **Wojdanowska R., Zyszkowski M.** Optimum design of lattice structures in creep conditions with consideration of Kempner — Hoff theory of buckling // Bull. Acad. Polon. Sci. ser. techn.— 1973.— V. 21, N 6.
3. **Zyczkowski M.** Optimal structural design in rheology // J. Appl. Mech.— 1971.— N 3.
4. **Куршин Л. М.** О постановках задачи устойчивости в условиях ползучести (обзор) // Проблемы теории пластичности и ползучести.— М.: Мир, 1979.
5. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.
6. **Иванов Г. В.** Об устойчивости равновесия сжато-изогнутых тонких стержней при неупругих деформациях // ПМТФ.— 1961.— № 3.
7. **Гараган И. А.** Об определении критического времени в условиях ползучести // Вестн. АН КазССР.— 1981.— № 4.
8. **Работнов Ю. Н., Шестериков С. А.** Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // ПММ.— 1957.— Т. 21, № 3.
9. **Клюшников В. Д.** Лекции по устойчивости деформируемых систем.— М.: Изд-во МГУ, 1986.
10. **Shanley R. F.** Weight-strength analysis of aircraft structures.— N. Y.: Mc Graw-Hill Book Co, 1952.
11. **Gerard G.** A creep buckling hypothesis // J. Aeron. Sci.— 1956.— V. 23, N 9.
12. **Кирсанов М. Н.** Неустойчивость цилиндрической оболочки при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ.— 1986.— № 6.

г. Воронеж *Поступила 27/VI 1991 г.*

УДК 539.3

В. М. Корнев, А. О. Мулькибаев

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ И ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Исследуются задачи о свободных колебаниях трансверсально-изотропных и трехслойных прямоугольных пластин (уточненная теория изгиба, учитывающая сдвиг по толщине). Задачи описываются системой двух уравнений, где первое порядка $2m$ ($m = 2$, 3 для трансверсально-изотропных и трехслойных пластин соответственно), второе — сингулярно возмущенное уравнение второго порядка, содержащее малый параметр ε. Для трансверсально-изотропных пластин параметр ε характеризует влияние поперечных сдвигов, а для трехслойных — сдвиговую жесткость трехслойного пакета. Построены асимптотические разложения решений с учетом угловых погранслойных решений, когда параметр ε мал. В данном случае второе уравнение является возмущающим, решение которого носит характер погранслоя (краевого эффекта).

Для исходных систем рассматриваются различные виды краевых условий. Изучается взаимосвязь краевых условий исходной и укороченной задач (отброшено возмущающее уравнение). Обоснован переход от краевых условий в уточненной постановке к классической постановке в окрестности угловых точек (т. е. для кусочно-гладкого контура). Для свободного края в окрестности угла обосновано преобразование Кирхгофа. Для укороченных задач часто возможно разделение переменных, хотя полная система уравнений не допускает их разделения.

В классической теории изгиба пластин имеется противоречие между общим порядком системы уравнений (два бигармонических уравнения относительно нормального прогиба и функции напряжения) и пятью естественными статическими краевыми условиями. Так, на свободном крае равны нулю изгибающий и крутящий моменты, перерезывающее усилие и два усилия в плоскости пластины. В классической теории на свободном крае ставятся не пять, а четыре краевых условия, если воспользоваться преобразованием Кирхгофа. Существуют теории, которые являются уточнением классических, использующих более общие гипотезы при выводе уравнений (учет сдвига по толщине пластины). В этих теориях противоречие между общим порядком системы и естественными статическими граничными условиями исчезает. Вероятно, наиболее простой вид для изучения у систем уравнений из [1, 2], порядок их повышается по сравнению с классической теорией за счет уравнения второго порядка, у которого есть решения типа краевого эффекта (погранслоя).

Имеющийся в литературе переход от краевых условий уточненной теории к краевым условиям классической [3—5] (например, для свободного края — преобразование Кирхгофа) разработан для гладких контуров. Для прямоугольных пластин (случай кусочно-гладкого контура) возникает необходимость обоснования данных переходов вблизи угловой точки. Предлагается подход, в котором при помощи асимптотического анализа с учетом угловых погранслойных решений [6, 7] методом исключения [8, 9] формулируются краевые условия укороченных задач.

1. Рассмотрим систему двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами в плоской прямоугольной области $D = \{(x, y)\colon 0 < x < 1, 0 < y < b/a\}$ с границей $\Gamma = \bigcup\limits_{l=1}^{4} \Gamma_l$ (Γ_l —стороны прямоугольника, пронумерованные против часовой стрелки, начиная со стороны $x = 0$):

$$L_0 w(x, y) = \omega^2 M_0 w(x, y), \quad \varepsilon^2 \Delta v(x, y) = v(x, y). \tag{1.1}$$

Здесь L_0, M_0 — равномерно эллиптические операторы порядка $2m$, $2k$ ($m > k$) соответственно; Δ — оператор Лапласа; ω — собственная частота колебаний.

Краевые условия для системы (1.1) имеют вид

$$B_k w + \sum_{|\alpha|=0}^{N_k} a_{k\alpha}(\varepsilon) D^\alpha v\,|_\Gamma = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, m, m+1), \tag{1.2}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$; $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$; $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial n^{\alpha_1} \partial s^{\alpha_2}$; порядок операторов B_k равен m_k ($m_k \leqslant 2m$).

Задача (1.1), (1.2) при конкретных операторах L_0, M_0, B_k и коэффициентах $a_{k\alpha}$ описывает задачи о свободных колебаниях трансверсально-изотропных и трехслойных пластин.

Будем считать, что краевые условия (1.2) записаны в каноническом виде, если они удовлетворяют следующим требованиям.

А. Пусть $a_{k\alpha}(\varepsilon) \sim O\left(\varepsilon^{p_{k\alpha}}\right)$ ($p_{k\alpha}$ — целые числа). Величину q_{kl}, определяемую из соотношения $q_{k\alpha} = \alpha_1 - p_{k\alpha}$, назовем ε-порядком влияния на Γ оператора $a_{k\alpha}(\varepsilon)D^\alpha$ при фиксированном α. Число $q_k = \max\limits_{\alpha} q_{k\alpha}$ назовем ε-порядком влияния k-го краевого условия (1.2) на Γ. Полагаем, что краевые условия записаны таким образом, что $q_k \leqslant q_{k+1}$ ($k = 1, 2, \ldots, m$).

Дифференциальный оператор, члены которого в k-м краевом условии имеют ε-порядок влияния, равный q_k, обозначим T_k^0 и будем называть главной частью краевых условий по v, а через T_k — оставшиеся члены. Тогда условия (1.2) имеют вид

$$B_k w + T_k^0 v + T_k v\,|_\Gamma = 0.$$

Б. Если в последних s условиях (1.2) $q_{m-s+1} = \ldots = q_m = q_{m+1}$, то последнее условие в (1.2) $k = m + 1$ содержит максимальную производную по нормали к границе в главной части.

Достаточно часто в практических задачах параметр ε мал. Известно, что решение возмущающего уравнения носит характер погранслоя и только в окрестности границы Γ существенно отличается от нуля; при удалении от границы это решение быстро стремится к нулю.

Перейдем к формулировке вырожденной задачи при $\varepsilon \to 0$. Очевидно, она связана с решением первого уравнения системы (1.1), для которой предстоит сформулировать m краевых условий на Γ.

Алгебраический подход [10, 11] основан на том, что в соотношениях (1.2) вычеркивается последнее условие, а в оставшихся опускается функция v. Таким образом, получаются краевые условия вырожденной задачи

$$L_0 w_0(x, y) = \omega^2 M_0 w_0(x, y), \; B_k w_0|_\Gamma = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, m). \tag{1.3}$$

Как известно, краевые условия вырожденной задачи (1.3) в общем случае (например, свободный край) не совпадают с краевыми условиями упрощенных теорий пластин. Трудности формулировки краевых условий вырожденных задач в таких случаях связаны с тем, что требуется полная информация о структуре решения возмущающего уравнения.

Применение метода исключения [8, 9], развитого для пластин и оболочек с гладким контуром [4, 5] и в окрестности угловых точек [7], позволяет преодолеть эти трудности. Он основан на том, что информация о решении возмущающего уравнения учитывается в первых m краевых условиях (1.2).

Предположим (условие А), что неоднородные уравнения (1.1) с неоднородными краевыми условиями (1.2) имеют решение и притом единственное, если выполнено условие разрешимости.

Решение задачи (1.1), (1.2) строим в виде ($\varepsilon \ll 1$) [6]

$$w_\varepsilon(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i(x, y) + \varepsilon^{n+1} Z_n(x, y), \tag{1.4}$$

$$v_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^\beta \left\{ \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i [Q_{i1}(\xi_1, y) + Q_{2i}(x, \eta_1) + Q_{3i}(\xi_2, y) + Q_{4i}(x, \eta_2) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^\gamma (R_{1i}(\xi_1, \eta_1) + R_{2i}(\xi_2, \eta_1) + R_{3i}(\xi_2, \eta_2) + R_{4i}(\xi_1, \eta_2))] + \varepsilon^{n+1} z_n(x, y) \right\},$$

где $\xi_1 = x/\varepsilon$; $\xi_2 = (1 - x)/\varepsilon$; $\eta_1 = y/\varepsilon$; $\eta_2 = (a - y)/\varepsilon$; $Z_n(x, y)$ и $z_n(x, y)$ — остаточные члены разложения. Отметим, что погранслой в (1.4) (второе соотношение) строится с учетом множителей ε^β (см. [10, 11]) и ε^γ, смысл которого будет пояснен.

Опишем процесс определения входящих в (1.4) функций, откуда станет ясно их назначение. Разложение (1.4) формально удовлетворяет уравнению (1.1) и краевым условиям (1.2). Функции w_i описывают основную часть решения задачи (1.1), (1.2). Подставляя (1.4) (первое соотношение) в первое уравнение системы (1.1) и приравнивая нулю члены одного порядка по ε, получим

$$L_0 w_i(x, y) = \omega^2 M_0 w_i(x, y), \; L_0 Z_n(x, y) = \omega^2 M_0 Z_n(x, y) \tag{1.5}$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Очевидно, что функции w_i и их производные имеют нулевую изменяемость по ε, так как первое уравнение в (1.1) не зависит от ε, т. е. у членов его одинаковый порядок.

Погранслойная часть асимптотики состоит из погранфункций двух типов: Q и R. В окрестности каждой стороны Γ_l прямоугольной пластины строятся обыкновенные погранслои Q_{li}, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями и являющиеся функциями погранслоя по одной переменной. Например, в окрестности Γ_1 $Q_{li}(\xi_1, y)$ есть функция погранслоя по переменной ξ_1, т. е.

$$Q_{li}(\xi_1, y) \to 0 \text{ при } \xi_1 \to \infty, \tag{1.6}$$

и погранфункции Q_{li} имеют следующую изменяемость по ε:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial n^{\alpha_1} \partial s^{\alpha_2}} Q_{li} \sim \varepsilon^{-\alpha_1} Q_{li}, \quad Q_{li} \sim O(1), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

В окрестности угловых точек, согласно [6], вводятся погранфункции R_{li} по двум переменным, определяющиеся из эллиптических уравнений. Так, в окрестности вершины (0, 0) $R_{li}(\xi_1, \eta_1)$ есть функция погранслоя по переменным ξ_1 и η_1:

$$R_{li}(\xi_1, \eta_1) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi_1^2 + \eta_1^2 \to \infty. \tag{1.7}$$

Угловой погранслой $R_{li}(\xi, \eta)$ имеет изменяемость по ε:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial n^{\alpha_1} \partial s^{\alpha_2}} R_{li} \sim \varepsilon^{-|\alpha|} R_{li}, \quad R_{li} \sim O(1).$$

Подставляя (1.4) (второе соотношение) во второе уравнение системы (1.1) и приравнивая нулю члены одного порядка по ε для функций Q_{li}, R_{li}, z_n, получаем итерационную цепочку уравнений для Q_{1i}:

$$\partial^2 Q_{1i}/\partial \xi_1^2 - Q_{1i} = g_{1i}(\xi_1, y) \quad (\xi_1 > 0, \ 0 \leqslant y \leqslant b/a), \tag{1.8}$$
$$g_{1i}(\xi_1, y) = -\partial^2 Q_{1i-2}/\partial y^2, \ g_{10} = g_{11} = 0 \ (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь переменная y входит как параметр.

Для $R_{1i}(\xi_1, \eta_1)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2} - 1\right) R_{1i}(\xi_1, \eta_1) = 0 \quad (\xi_1 > 0, \ \eta_1 > 0). \tag{1.9}$$

В окрестности других сторон и угловых точек погранфункции Q_{li}, R_{li} ($l = 2, 3, 4$) определяются из аналогичных уравнений. Для остаточного члена $z_n(x, y)$

$$(\varepsilon^2 \Delta - 1) z_n(x, y) = h(x, y), \quad h(x, y) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{1} \varepsilon^k \partial^2 Q_{l, n-1+k}/\partial y^2. \tag{1.10}$$

Конкретный вид погранслоев получается с учетом краевых условий. В качестве примера рассмотрим сторону Γ_1. Подставляя разложение (1.4) в краевые условия (1.2) и пренебрегая взаимным влиянием погранслоев (т. е. в краевых условиях на Γ_1 учитывая только функции Q_{1i}, Q_{2i}, Q_{4i}, R_{1i}, R_{4i}), находим

$$B_k\left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i + \varepsilon^{n+1} Z_n\right) + \varepsilon^{\beta}\left[\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \left(\varepsilon^{-\alpha_1} a_{kl}(\varepsilon) D_1^{\alpha} Q_{1i} + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \varepsilon^{-\alpha_2} a_{kl}(\varepsilon) D_2^{\alpha}(Q_{2i} + Q_{4i}) + \varepsilon^{\gamma-|\alpha|} a_{kl}(\varepsilon) D_3(R_{1i} + R_{4i})\right) + \varepsilon^{n+1} z_n\right]\right|_{\Gamma} = 0. \tag{1.11}$$

Здесь $D_1^{\alpha} = \partial^{|\alpha|}/\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}$; $D_2^{\alpha} = \partial^{|\alpha|}/\partial x^{\alpha_1} \partial \eta^{\alpha_2}$; $D_3^{\alpha} = \partial^{|\alpha|}/\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \eta^{\alpha_2}$.

Необходимо принять во внимание, что в краевых условиях (1.11) погранслои записаны в преобразованной системе координат. Заметим, что только последнее условие в (1.11) $k = m + 1$ содержит множителем наименьшую степень малого параметра ε, в силу условий А, Б на нулевом шаге итерационного процесса функции Q_{1i}, R_{1i}, R_{4i} должны компенсировать невязки в последнем краевом условии (1.11) $k = m + 1$

$$(1.12)\quad \left[B_{m+1}w_0 + \varepsilon^{\beta-q_{m+1}} T^0_{m+1}Q_{10}\right] + \varepsilon^{\beta}\left[\varepsilon^{-\varkappa_2}T^2_{m+1}Q_{20} + \varepsilon^{\gamma-\varkappa_1}T^1_{m+1}R_{10}\right] + $$
$$+ \varepsilon^{\beta}\left[\varepsilon^{-\varkappa_2}T^2_{m+1}Q_{40} + \varepsilon^{\gamma-\varkappa_1}T^1_{m+1}R_{40}\right]\Big|_{\Gamma_1} = 0,$$

где $\varkappa_1 = \max\limits_{\alpha}(|\alpha| - p_{m+1,\alpha})$; $\varkappa_2 = \max\limits_{\alpha}(\alpha_2 - p_{m+1,\alpha})$. Операторы $T^1_{m+1}(T^2_{m+1})$ содержат только те производные, коэффициенты которых имеют порядок $\varepsilon^{-\varkappa_1}(\varepsilon^{-\varkappa_2})$.

Согласно [6], функция Q_{10} устраняет невязку для w_0, а $R_{10}(R_{40})$ устраняет невязку, вносимую функцией $Q_{20}(Q_{40})$ в краевое условие (1.12) в окрестности угловой точки (0, 0) (точки (0, a)). Следовательно, условие (1.12) распадается:

$$(1.13)\qquad \varepsilon^{\beta-q_{m+1}}\left(T^0_{m+1}Q_{10}\right)\big|_{\Gamma_1} = -B_{m+1}w_0\big|_{\Gamma}.$$

Причем основная часть решения w_0 считается уже построенной. Аналогичные условия будут и для функций Q_{l0} на Γ_l.

Для функций R_{10} на Γ_1 получаем

$$(1.14)\qquad \varepsilon^{\gamma-\varkappa_1}T^1_{m+1}R_{10}\big|_{\Gamma_1} = -\varepsilon^{-\varkappa_2}T^2_{m+1}Q_{20}\big|_{\Gamma_1}.$$

На Γ_2 для R_{10} имеем условия, сходные с (1.14). Краевые условия для других угловых погранслоев R_{l0} в окрестности других вершин прямоугольника строятся аналогично.

Для правильного построения итерационного процесса в левой и правой частях (1.13), (1.14) должны стоять величины одного порядка малости. Поэтому параметры β и γ в разложении (1.4) запишем в виде

$$\beta = q_{m+1},\ \gamma = \varkappa_1 - \varkappa_2.$$

Далее собираем члены при одинаковых степенях малого параметра в соотношениях (1.11) ($k = 1, 2, 3, \ldots, m$). Сначала собираем члены при ε в нулевой степени:

$$(1.15)\qquad B_k w_0\big|_{\Gamma_l} = \Phi_k(Q_{10}, Q_{20}, Q_{40}, R_{10}, \ldots)\big|_{\Gamma_l}.$$

Правая часть условий (1.15) есть дифференциальный оператор от функций погранслоя, определенных в окрестности Γ_l и смежных сторон. В силу (1.13) на Γ_1 и аналогичных условий на Γ_l функции Q_{l0} находятся через w_0. Из (1.14) и подобных ему условий в окрестности других угловых точек следует, что и R_{l0} определяется через w_0. Подставляя представление Q_{l0} и R_{l0} через w_0 в правые части (1.15), приходим к краевым условиям для w_0

$$(1.16)\qquad B_k w_0 - \Phi^0_k(w_0)\big|_{\Gamma_l} = 0\quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Таким образом, для определения w_0 имеем задачу (1.5), (1.16), которую назовем укороченной. Зная ее решение, можно легко восстановить погранслои. Итак, нулевое приближение w_0, Q_{l0}, R_{l0} исходной задачи найдено.

Собирая члены при ε в первой степени в (1.11), получаем краевые условия для определения погранслоев Q_{l1} и R_{l1}, аналогичные (1.13) и (1.14), но с правой частью, зависящей от w_0, w_1, Q_{l0}, R_{l0}. Формулировки задач для последующих приближений проводятся подобным образом.

Остаточные члены удовлетворяют краевым условиям

$$(1.17)\qquad B_k Z_n + \varepsilon^{\beta}\sum_{|\alpha|=0}^{N_k} a_{k\alpha}(\varepsilon)D^{\alpha}z_n\big|_{\Gamma} = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}A_i(Q_{li}, R_{li})$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, m, m+1)$$

(A_i — некоторые дифференциальные операторы). По условию A задача (1.5), (1.10), (1.17) имеет решение и притом единственное.

Перейдем к изучению конкретных задач.

2. Рассмотрим систему уравнений, описывающую свободные колебания трансверсально-изотропной прямоугольной пластины:

$$\Delta\Delta w(x,\ y) - \omega^2 k^2 (1 - \vartheta\Delta)\, w(x,\ y) = 0; \tag{2.1}$$

$$\varepsilon^2 \Delta v(x,\ y) - v(x,\ y) = 0. \tag{2.2}$$

В уравнения (2.1), (2.2) введены безразмерные величины [1]: $w(x,\ y)$ — прогиб пластины, $v(x,\ y)$ — разрешающая функция, ω — частота колебаний, k — большой параметр, характеризующий изгибную жесткость пластины, ϑ — приведенная толщина пластины, ε — малый параметр, характеризующий сдвиговую жесткость пластины,

$$\omega = \omega^* a \sqrt{\rho\, E},\quad k^2 = 12\,(1 - \nu^2)\, a^2\, h^2,\quad \vartheta = \left(2\frac{G}{G'} - \nu'\,\frac{E}{E'}\right)\frac{h^2}{10a^2\,(1 - \nu)}, \tag{2.3}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{h^2}{10a^2}\,\frac{G}{G'},$$

где ω^* — размерная частота колебаний; a, b и h — длины сторон и толщина пластины; ρ — удельная масса; ν, G, E — коэффициент Пуассона, модуль сдвига и модуль Юнга в плоскости изотропии; ν', G', E' — те же параметры в плоскостях, нормальных плоскости изотропии.

В соотношениях (2.3) k, ϑ, ε в разной мере содержат малую величину h/a, но тем не менее их следует различать, так как они имеют разный механический смысл. Несомненно, представляют интерес асимптотики решений по нескольким малым параметрам. Здесь эти задачи не изучаются.

Безразмерные моменты, усилия и другие величины определяются из соотношений

$$M_n = \frac{1}{Eh} M_n^*,\quad M_{ns} = \frac{1}{Eh} M_{ns}^*,\quad N_n = \frac{a}{Eh} N_n^*,$$

$$v = \frac{1}{Eh} v^*,\quad \alpha_n = \frac{ah^2}{12E}\alpha_n^*,\quad \alpha_s = \frac{ah^2}{12E}\alpha_s^*.$$

Здесь M_n^*, M_{ns}^* — изгибающий и крутящий моменты; N_n^* — перерезывающее усилие; v^* — разрешающая функция; α_n^*, α_s^* — сдвиги соответственно по нормали к границе и вдоль границы. Величины M_n, M_{ns}, N_n, α_n, α_s можно представить через искомые функции w и v:

$$M_n|_{\Gamma_l} = -\left(\frac{1}{k^2} M_{0n} + \varepsilon^2 B_1 w + (-1)^l 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial n\, \partial s}\right)_{\Gamma_l}, \tag{2.4}$$

$$M_{ns}|_{\Gamma_l} = -\left(\frac{1}{k^2} M_{0ns} + \varepsilon^2 B_2 w + (-1)^l \left(v - 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial n^2}\right)\right)_{\Gamma_l},$$

$$N_s|_{\Gamma_l} = \alpha_n|_{\Gamma_l} = \left(-\frac{1}{k^2} N_{0s} + (-1)^l \frac{\partial v}{\partial n}\right)_{\Gamma_l},$$

$$N_n|_{\Gamma_l} = \alpha_s|_{\Gamma_l} = \left(-\frac{1}{k^2} N_{0n} - (-1)^l \frac{\partial v}{\partial s}\right)_{\Gamma_l},$$

где

$$\Delta^* = \frac{\partial}{\partial n^2} + \nu\frac{\partial}{\partial s^2};\quad B_1 = \frac{2}{k^2\,(1 - \nu)}\Delta\Delta^* - 2\gamma\frac{1 + \nu}{1 - \nu}\omega^2\Delta^* - \frac{\nu' E G' \omega^2}{E' G\,(1 - \nu)};$$

$$B_2 = \frac{2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial n\, \partial s}\Delta + 2\gamma\,(1 + \nu)\,\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial n\, \partial s},$$

Таблица 1

№ п/п	Краевые условия системы (2.1), (2.2)	Краевые условия укороченной задачи (нулевое приближение)	β, γ
1	$w = 0, \quad M_n = 0, \quad M_{ns} = 0$	$w_0 = 0, \quad M_{0n} + k^2 F(w_0) = 0$ *	0,0
2	$w = 0, \; M_n = 0, \quad \alpha_n = 0$	$w_0 = 0, \quad M_{0n} = 0$	1,1
3	$w = 0, \quad M_{ns} = 0, \quad -\frac{\partial w}{\partial n} + \varkappa\alpha_s = 0$	$w_0 = 0, \quad -\frac{\partial w_0}{\partial n} + \varkappa \frac{1}{k^2}\left[N_{0n} + \frac{\partial M_{0ns}}{\partial s}\right] = 0$	0,0
4	$w = 0, \quad \alpha_n = 0, \quad -\frac{\partial w}{\partial n} + \varkappa\alpha_s = 0$	$w_0 = 0, \quad -\frac{\partial w_0}{\partial n} + \varkappa \frac{1}{k^2} N_{0n} = 0$	1,1
5	$N_n = 0, \quad M_n = 0, \quad M_{ns} = 0$	$N_{0n} + \frac{\partial M_{0ns}}{\partial s} = 0, \quad M_{0n} + k^2 F(w_0) = 0$ *	0,0
6	$N_n = 0, \quad M_n = 0, \quad \alpha_n = 0$	$N_{0n} = 0, \quad M_{0n} = 0$	1,1
7	$N_n = 0, \quad M_{ns} = 0, \quad -\frac{\partial w}{\partial n} + \varkappa\alpha_s = 0$	$N_{0n} + \frac{\partial M_{0ns}}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0$	0,0
8	$N_n = 0, \quad \alpha_n = 0, \quad -\frac{\partial w}{\partial n} + \varkappa\alpha_s = 0$	$N_{0n} = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0$	1,1

* $F(w) = (-1)^l \, 2 \left[M_{0ns} \left|_{\Gamma_l \cap \Gamma_{l+1}} f_{l1}(s) + M_{0ns} \right|_{\Gamma_l \cap \Gamma_{l-1}} f_{l2}(s) \right]$.

а M_{0n}, M_{0ns}, N_{0n} — изгибающий, крутящий моменты и перерезывающее усилие, отвечающие классической теории:

$$M_{0n} = \Delta^* w, \quad M_{0s} = (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \, \partial s},$$

$$N_{0n} = \frac{\partial}{\partial n} \Delta w + k^2 \omega^2 \gamma (1 + \nu) \frac{\partial w}{\partial n}, \quad N_{0s} = \frac{\partial}{\partial s} \Delta w + k^2 \omega^2 \gamma (1 + \nu) \frac{\partial w}{\partial s}.$$

Краевые условия для системы (2.1), (2.2) приведены в табл. 1. Рассмотрим сначала краевое условие 1, соответствующее шарнирно опертому краю. Из (2.4) на Γ_l получим

$$w|_{\Gamma_l} = 0; \tag{2.5а}$$

$$\frac{1}{k^2} M_{0n} + \varepsilon^2 B_1 w + (-1)^l 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial n \, \partial s} \bigg|_{\Gamma_l} = 0; \tag{2.5б}$$

$$\frac{1}{k^2} M_{0ns} + \varepsilon^2 B_2 w + (-1)^l \left(v - 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right)_{\Gamma_l} = 0. \tag{2.5в}$$

Очевидно, ε-порядок влияния условий (2.5б), (2.5в) равен $q_2 = -1$, $q_3 = 0$, значит, погранслой должен устранять невязку в последнем условии.

Подставляем разложение (1.4) в уравнения (2.1), (2.2) и краевые условия (2.5). Для нулевого разложения, согласно п. 1, имеем задачи: для Q_{10} — уравнение (1.8) ($i = 0$), условие на бесконечности (1.6) и граничное условие на Γ_1

$$\varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2 Q_{10}}{\partial \xi_1^2} - Q_{10} \right)_{\Gamma_1} = (-1)^l \frac{1}{k^2} M_{0xy}^{(0)} |_{\Gamma_1}. \tag{2.6}$$

Здесь и далее принято обозначение $M_{0n}^{(i)}, M_{0ns}^{(i)}, N_{0n}^{(i)}, N_{0s}^{(i)}$, соответствующее i-му члену разложения (1.4).

В качестве примера рассмотрим функцию R_{10}, которая определяется из уравнения (1.9), условия на бесконечности (1.7) и граничных условий

$$(2.7)\quad \varepsilon^{\gamma}\left(2\frac{\partial R_{10}}{\partial\xi_1^2}-R_{10}\right)_{\Gamma_1}=Q_{20}|_{\Gamma_1},\qquad \varepsilon^{\gamma}\left(2\frac{\partial R_{10}}{\partial\eta_1^2}-R_{10}\right)_{\Gamma_2}=Q_{10}|_{\Gamma_2}.$$

В (2.6), (2.7) $\beta=0$, $\gamma=0$. Функция w_0 находится из уравнения (2.1) и краевых условий. Так, на Γ_l

$$(2.8)\qquad w_0|_{\Gamma_l}=0,\quad \frac{1}{k^2}M_{0n}^{(0)}-2\left(\frac{\partial^2 R_{10}}{\partial\xi_1\partial\eta_1}+\frac{\partial^2 R_{40}}{\partial\xi_1\partial\eta_2}\right)_{\Gamma_l}=0.$$

Далее нам понадобится конкретный вид погранслоев Q_{10} и Q_{20}:

$$(2.9)\qquad Q_{10}(\xi_1,y)=p_{10}(y)\exp(-\xi_1),\quad p_{10}(y)=-\frac{1}{k^2}M_{0xy}^{(0)}|_{\Gamma_1},$$

$$Q_{20}(x,\eta_1)=p_{20}(x)\exp(-\eta_1),\quad p_{10}(x)=-\frac{1}{k^2}M_{0xy}^{(0)}|_{\Gamma_2}.$$

Подставляя (2.9) в (2.7), получаем для R_{10} краевые условия

$$(2.10)\qquad \left(2\frac{\partial^2 R_{10}}{\partial\xi_1^2}-R_{10}\right)_{\Gamma_1}=p_{20}(0)\exp(-\eta_1),$$

$$\left(2\frac{\partial^2 R_{10}}{\partial\eta_1^2}-R_{10}\right)_{\Gamma_2}=p_{10}(0)\exp(-\xi_1).$$

Из (2.9) следует, что у краевых условий (2.10) есть разрыв в угловой точке, т. е.

$$p_{20}(0)-p_{10}(0)=\frac{2}{k^2}M_{0xy}^{(0)}|_{\Gamma_1\cap\Gamma_2}.$$

Функция Грина задачи (1.9), (1.7), (2.10) строится методом отображений и имеет вид

$$(2.11)\qquad G(\xi,\eta,\tau,t)=(1/2\pi)[K_0(r_1)+K_0(r_2)-K_0(r_3)-K_0(r_4)],$$

где $K_0(r)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента:

$$r_1=[(\xi-\tau)^2+(\eta-t)^2]^{1/2},\quad r_2=[(\xi+\tau)^2+(\eta+t)^2]^{1/2},$$

$$r_3=[(\xi-\tau)^2+(\eta+t)^2]^{1/2},\quad r_4=[(\xi+\tau)^2+(\eta-t)^2]^{1/2}.$$

Тогда решение задачи (1.9), (1.7), (2.10) представляется как

$$(2.12)\qquad R_{10}(\xi,\eta)=p_{20}(0)I_1(\xi,\eta)+p_{10}(0)I_2(\xi,\eta),$$

$$I_1=\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial G(\xi,\eta,\tau,t)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}\exp(-t)\,dt,\quad I_2=\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\partial G(\xi,\eta,\tau,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}\exp(-\tau)\,d\tau.$$

Функции R_{l0} в окрестности других угловых точек строятся аналогично. Подставляя R_{10} и R_{40} в граничные условия (2.8) и учитывая выражения (2.9), (2.12), получим краевые условия для w_0 на Γ_1. Окончательно краевые условия для нулевого приближения можно записать в виде

$$(2.13а)\qquad \frac{1}{k^2}M_{0n}^{(0)}|_{\Gamma_l}=(-1)^l 2\left[M_{0n}^{(0)}|_{\Gamma_l\cap\Gamma_{l+1}}f_{l1}(s)+M_{0n}^{(0)}|_{\Gamma_l\cap\Gamma_{l-1}}f_{l2}(s)\right];$$

$$(2.13б)\qquad w_0|_{\Gamma_l}=0,$$

$$f_{lk}=\sum_{p=1}^{2}\frac{\partial^2 I_p(\xi_l,\eta_k)}{\partial\xi_l\partial\eta_k}\quad(l=1,3),\qquad f_{lk}=\sum_{p=1}^{2}\frac{\partial^2 I_p(\xi_k,\eta_l)}{\partial\xi_k\partial\eta_l}\quad(l=2,4).$$

В выражении (2.13) принято, что $\Gamma_0 = \Gamma_4$ и $\Gamma_5 = \Gamma_1$. Функция $f_{lk}(s)$ имеет экспоненциальные оценки [6, 7], схема доказательства которых приведена в [6]:

$$|f_{11}(\eta_1)| \leqslant C \exp(-\delta\eta_1), \quad |f_{12}(\eta_2)| \leqslant C \exp(-\delta\eta_2) \tag{2.14}$$

($0 < \delta \leqslant 1$, C и δ — произвольные константы).

Для w_0 получаем обобщенную задачу на собственные функции и числа (2.1), (2.13), которую назовем укороченной задачей (нулевое приближение) исходной задачи (2.1), (2.2) с краевыми условиями из табл. 1. Из (2.14) вытекает, что правые части в (2.13) существенно отличаются от нуля лишь вблизи угловых точек. При упрощенном анализе укороченной задачи влиянием поправочных членов $f_{kl}(s)$ в краевых условиях можно пренебрегать. Пусть найдено решение укороченной задачи, тогда восстанавливаем краевые эффекты в разложении (1.4). Таким образом, завершено построение решения (нулевое приближение).

Перейдем к построению последующих приближений w_i и v_i задачи (2.1), (2.2) с краевыми условиями из табл. 1 ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$). Подставляя разложение (1.4) в уравнение и краевые условия исходной задачи и приравнивая нулю члены одного порядка малости, получаем следующие задачи.

Для Q_{i1} имеем уравнение (1.8), граничные условия (1.6) и

$$2\frac{\partial^2 Q_{1i}}{\partial \xi_1^2} - Q_{1i}|_{\Gamma_1} = -\frac{1}{k^2} M_{0xy}^{(i)} - B_2 w_{i-2}|_{\Gamma_1}. \tag{2.15}$$

Угловой погранслой R_{1i} определяется из уравнения (1.9), краевых условий (1.7) и

$$2\frac{\partial^2 R_{1i}}{\partial \xi_1^2} - R_{1i}|_{\Gamma_1} = Q_{2i} - 2\frac{\partial^2 Q_{2,i-2}}{\partial x^2}\bigg|_{\Gamma_1}, \tag{2.16}$$

$$2\frac{\partial^2 R_{1i}}{\partial \eta_1^2} - R_{1i}|_{\Gamma_2} = Q_{1i} - 2\frac{\partial^2 Q_{2,i-2}}{\partial y^2}\bigg|_{\Gamma_2}.$$

Функция w_i определяется из уравнения (2.1) и условия на границе. Так, на Γ_1

$$\frac{1}{k^2} M_{0n}^{(i)} - 2\left(\frac{\partial^2 R_{1i}}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + \frac{\partial^2 R_{1i}}{\partial \xi_1 \partial \eta_2}\right)\bigg|_{\Gamma_1} = -B_1 w_{i-2} + \tag{2.17}$$

$$+ 2[Q_{1i-1} + Q_{2i-1} + Q_{4i-1}], \quad w_i|_{\Gamma_1} = 0.$$

Здесь и далее выражения с отрицательными индексами тождественно равны нулю.

Решение задачи (1.8), (1.6), (2.16) ищем в виде

$$Q_{10}(\xi_1, y) = [p_{10}(y) + \beta_{1i}(\xi_1, y)] \exp(-\xi_1), \tag{2.18}$$

где первое слагаемое есть решение однородного уравнения (1.8) с неоднородными краевыми условиями (2.16), а второе — решение неоднородного уравнения (1.8) с однородными краевыми условиями (2.16). Тогда

$$p_{1i}(y) = -\left(\frac{1}{k^2} M_{0n}^{(i)} - B_2 w_{i-2}\right)_{\Gamma_1}, \tag{2.19}$$

$$\beta_{1i}(\xi_1, y) = -\int_0^{\xi_1} \operatorname{sh}(\tau) g_{1i}(\tau, y)\, d\tau - \int_{\xi_1}^{\infty} \operatorname{sh}(\xi_1) \exp(\xi_1 - \tau) g_{1i}(\tau, y)\, d\tau$$

Нетрудно показать (см. (1.8)), что неоднородность $g_{1i}(\xi_1, y) = \varphi_i(\xi_1, y) \exp(-\xi_1)$ ($\varphi_i(\xi_1, y)$ — многочлен относительно ξ_1 с коэффициентами, зависящими от y).

Поэтому $\beta_{1i}(\xi_1, y)$ есть ограниченная функция по ξ_1 и для Q_{1i} верна экспоненциальная оценка

$$|Q_{1i}(\xi_1, y)| \leqslant C(y) \exp(-\delta\xi_1).$$

Угловой погранслой с учетом (2.16), (2.18) определяется из следующих условий на границе. Так, для R_{1i}

$$2\frac{\partial^2 R_{1i}}{\partial \xi_1^2} - R_{1i}|_{\Gamma_1} = [p_{2i}(0) + \varkappa_{2i}(\eta_1)] \exp(-\eta_1), \tag{2.20}$$

$$2\frac{\partial^2 R_{1i}}{\partial \eta_1^2} - R_{1i}|_{\Gamma_2} = [p_{1i}(0) + \varkappa_{1i}(\xi_1)] \exp(-\xi_1),$$

где $\varkappa_{1i}(\xi_1) = \beta_{1i}(\xi_1, 0) + [\beta_{1i-2}(\xi_1, 0) + p_{1i-2}(0)]_{yy}$;

$$\varkappa_{2i}(\eta_1) = \beta_{2i}(0, \eta_1) + [\beta_{1i-2}(0, \eta_1) + p_{2i-2}(0)]_{xx}.$$

Здесь, так же как для нулевого приближения, краевые условия разрывны в угловой точке и величина разрыва первого рода определяется из (2.15) и аналогичного условия для Q_{li}. Имеем ограничения, вытекающие из (2.20), на функцию $p_{li}(s)$, а значит, и на w_i: у функций $p_{li}(s)$ есть ограниченные производные $p_{li,ss}(s)|_{s=0\pm 0}$ при $i = 0, 1, 2, \ldots, n-2$.

Решение задачи (1.9), (1.7), (2.20) находится из формул, аналогичных (2.12):

$$R_{1i}(\xi, \eta) = p_{2i}(0)I_1(\xi, \eta) + p_{1i}(0)I_2(\xi, \eta) + T_{2i}(\xi, \eta) + T_{1i}(\xi, \eta),$$

$$T_{1i} = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial G(\xi, \eta, \tau, t)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} \varkappa_{2i}(t) \exp(-t)\, dt,$$

$$T_{2i} = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial G(\xi, \eta, \tau, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} \varkappa_{1i}(\tau) \exp(-\tau)\, d\tau,$$

выражения для $I_k(\xi, \eta)$ приведены в (2.12).

В итоге получаем краевые условия для укороченной задачи (i-е приближение):

$$w_i|_{\Gamma_l} = 0; \tag{2.21а}$$

$$\frac{1}{k^2} M_{0n}^{(i)}|_{\Gamma_l} + (-1)^l 2\left[M_{0ns}^{(i)}|_{\Gamma_l\cap\Gamma_{l+1}} f_{l1}(s) + M_{0ns}^{(i)}|_{\Gamma_l\cap\Gamma_{l-1}} f_{l2}(s)\right] = \tag{2.21б}$$

$$= B_2 w_{i-2} + 2Q_{1i-1} + g_{l1i}(s) + g_{l2i}(s),$$

$$g_{lki}(s) = \left(\frac{\partial^2 T_{li}(\xi_l, \eta_k)}{\partial \xi_l\, \partial \eta_k}\right)_{\Gamma_l} \quad (l = 1, 3),$$

$$g_{lki}(s) = \left(\frac{\partial^2 T_{li}(\xi_k, \eta_l)}{\partial \xi_k\, \partial \eta_l}\right)_{\Gamma_l} \quad (l = 2, 4).$$

Функции $g_{lki}(s)$ имеют экспоненциальные оценки типа (2.14) и существенно отличаются от нуля только в окрестности угловых точек.

Зная решение укороченной задачи (i-е приближение), восстанавливаем краевые эффекты. Укороченная задача (i-е приближение) находится на спектре и поэтому должна удовлетворять определенным условиям разрешимости, которые здесь не приводятся.

Как видно из табл. 1, граничные условия делятся на две группы: 1, 3, 5, 7 и 2, 4, 6, 8. Решение исходной задачи с краевыми условиями первой группы строится аналогично задаче (2.1), (2.2) с краевыми условиями из табл. 1. Легко заметить, что для погранслойной части асимптотики для нулевого приближения верны формулы (2.6), (2.7), (2.9)—(2.14), а для последующих приближений — (2.15), (2.16), (2.18)—(2.21). Краевые условия укороченной задачи находятся методом исключения (см. п. 1). Более подробно рассмотрим случай края 5, свободного от связей. Первое граничное условие укороченной задачи будет совпадать с (2.13а) ($i = 0$) и с (2.21б) ($i = 1, 2, \ldots, n$), второе на Γ_1 имеет вид

$$N_{0n}^{(i)}|_{\Gamma_l} = -k^2 \frac{\partial}{\partial y} [Q_{1i} + Q_{2i} + Q_{4i} + R_{1i} + R_{4i}]_{\Gamma_l}.$$

Подставляя Q_{li} и R_{li} в это выражение, для нулевого приближения w_0 находим

$$N_{0n}^{(i)}|_{\Gamma_1} = -k^2 \left[\frac{\partial}{\partial y} p_{10}(y) - \frac{1}{\varepsilon} p_{20}(0) \exp(-\eta_1) + \frac{1}{\varepsilon} p_{20}(0) \frac{\partial I_1(0, \eta_1)}{\partial \eta_1} + \right.$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon} p_{10}(0) \frac{\partial I_2(0, \eta_1)}{\partial \eta_1} - \frac{1}{\varepsilon} p_{40}(0) \exp(-\eta_2) + \frac{1}{\varepsilon} p_{40}(0) \frac{\partial I_1(0, \eta_2)}{\partial \eta_2} +$$
$$\left. + \frac{1}{\varepsilon} p_{10}(0) \frac{\partial I_2(0, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right].$$

Непосредственным дифференцированием из (2.11) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial G(\xi, \eta, \tau, t)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \right]_{\xi=0} = \delta(\eta - t), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial G(\xi, \eta, \tau, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \right]_{\xi=0} = 0,$$

где $\delta(\eta - t)$ — функция Дирака. Тогда из (2.12) следует

$$\frac{\partial I_1(0, \eta)}{\partial \eta} = \exp(-\eta), \quad \frac{\partial I_2(0, \eta)}{\partial \eta} = 0. \tag{2.22}$$

С учетом соотношений (2.22), (2.9) и соответствующих выражений на других сторонах пластинки окончательно запишем краевое условие для нулевого приближения:

$$N_{0n}^{(i)}|_{\Gamma_1} = -k^2 (-1)^l \frac{\partial}{\partial s} p_{l0}(s)|_{\Gamma_l} = -\frac{\partial}{\partial s} M_{0ns}^{(0)}|_{\Gamma_l}. \tag{2.23}$$

Краевое условие (2.23) отвечает обобщенной силе Кирхгофа.

Аналогичным образом получаем краевые условия укороченной задачи (i-е приближение): первое совпадает с (2.12б), а второе имеет вид

$$N_{0n}^{(i)} + \frac{\partial}{\partial s} M_{0ns}^{(i)}|_{\Gamma_1} = -\frac{\partial}{\partial y} \beta_{1i}(y) - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{2} \left(\beta_{p_k i}(0, \eta) - \varkappa_{p_k i}(\eta) \right) \times$$
$$\times \exp(-\eta) \qquad (p_1 = 2,\ p_2 = 4).$$

Итак, получено преобразование Кирхгофа в окрестности угловой точки, т. е. для кусочно-гладкого контура.

Перейдем к краевым условиям 2, 4, 6, 8 (см. табл. 1). Рассмотрим в качестве примера условия 2, отвечающие шарнирно опертому краю с жесткой диафрагмой, препятствующей сдвигу пакета:

$$w_l|_{\Gamma_l} = 0; \tag{2.24а}$$

$$\frac{1}{k^2} M_{0n} + \varepsilon^2 B_1 w + (-1)^l 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial n \, \partial s} \Big|_{\Gamma_l} = 0; \tag{2.24б}$$

$$\frac{1}{k^2} N_{0s} - (-1)^l \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Gamma_l} = 0. \tag{2.24в}$$

Здесь ε-порядок влияния краевых условий (2.24б), (2.24в) равен $q_2 = -1$, $q_3 = 1$. Согласно п. 1, погранслой определяется из (2.24в). Так, для Q_{1i} имеем краевые условия

$$\varepsilon^{\beta-1} \frac{\partial Q_{1i}}{\partial \xi_1} \Big|_{\Gamma_1} = (-1)^l \frac{1}{k^2} N_{0s}^{(i)}|_{\Gamma_1}.$$

Угловой погранслой R_{1i} определяется из уравнения (1.9) и краевых условий

$$\varepsilon^{\gamma-1} \frac{\partial R_{1i}}{\partial \xi_1}\Big|_{\Gamma_1} = -\frac{\partial Q_{2i}}{\partial x}\Big|_{\Gamma_1}, \quad \varepsilon^{\gamma-1} \frac{\partial R_{1i}}{\partial \eta_1}\Big|_{\Gamma_2} = -\frac{\partial Q_{1i}}{\partial y}\Big|_{\Gamma_2},$$

где $\beta = 1$, $\gamma = 1$.

Обыкновенный погранслой содержит множитель ε, а угловой погранслой ε^2. Тогда функции w_i находятся из уравнения (2.1) и краевых условий

$$(2.25) \qquad w_i|_{\Gamma_l} = 0, \quad M_{0n}^{(i)} = k^2 \left\{ B_1 w_{i-2} - (-1)^l \left[\frac{\partial^2 Q_{l,i-2}}{\partial (n/\varepsilon)\, \partial s} + \frac{\partial^2 R_{l,i-2}}{\partial \xi\, \partial \eta} \right] \right\}_{\Gamma_l}.$$

Правая часть для нулевого и первого приближений в (2.25) тождественно равна нулю.

Для Q_{1i} справедливы формулы типа (2.18), где верны соотношения

$$p_{1i}(y) = -\frac{1}{k^2} N_{0s}^{(i)}|_{\Gamma_l},$$

$$\beta_{1i}(\xi, y) = -\int_0^{\xi_1} \operatorname{ch}(\tau) g_{1i}(\tau, y)\, d\tau - \int_{\xi_1}^{\infty} \operatorname{ch}(\xi_1) g_{1i}(\tau, y) \exp(\xi_1 - \tau)\, d\tau.$$

Для углового погранслоя R_{1i} справедлива формула

$$R_{1i}(\xi, \eta) = -\int_{\Gamma_1} G_1(\xi, \eta, \tau, t)|_{\tau=0} [p_{2i,\tau}(0) + \beta_{2i,\tau}(0, t)] \exp(-t)\, dt -$$

$$-\int_{\Gamma_2} G_1(\xi, \eta, \tau, t)|_{t=0} [p_{1i,t}(0) + \beta_{1i,t}(\tau, 0)] \exp(-\tau)\, d\tau$$

$$\left(G_1(\xi, \eta, \tau, t) = \frac{1}{2\pi} [K_0(r_1) + K_0(r_2) + K_0(r_3) + K_0(r_4)]\right).$$

При рассмотрении краевых условий 4, 6, 8 из табл. 1 процедура получения краевых условий укороченной задачи аналогична. В табл. 1 приведены краевые условия для нулевого приближения, которые, за исключением условий 1 и 5, соответствуют краевым условиям в классической постановке. Следует обратить внимание на то, что в краевые условия 3, 4 входят дополнительные члены

$$\varkappa \frac{1}{k^2} \left(N_{0n} + \frac{\partial M_{0ns}}{\partial s} \right), \quad \varkappa \frac{1}{k^2} (N_{0n}), \quad \varkappa = \frac{6E}{h^2 G'} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z_0^2}{3} \right),$$

которые являются малыми, так как $k^2 \gg 1$, и описывают влияние сдвига всего пакета по толщине. При переходе к классической теории пластин, не учитывающей влияния сдвига по толщине, ими необходимо пренебрегать. Заметим также, что преобразование Кирхгофа для свободного края не всегда имеет место. Так, если для края 5, свободного от связей, есть преобразование Кирхгофа, то для свободного края с диафрагмой, препятствующей сдвигу пакета, его нет, и в классической постановке вместо обобщенной силы Кирхгофа надо задавать перерезывающее усилие.

Краевые условия 1 и 5 содержат дополнительные слагаемые вида

$$M_{0ns}|_{\Gamma_l \cap \Gamma_{l+1}} f_{lk}(s), \quad |f_{lk}(s)| \leqslant C \exp(-\delta s).$$

Их появление связано только с наличием угловых точек, так как если граница гладкая, то в краевых условиях укороченной задачи их нет [3—5, 10, 11]. Это явление с механической точки зрения может иметь следующее объяснение. Скручивающий момент M_{ns} на стороне Γ_l в окрестности угловых точек на смежных сторонах Γ_{l+1} и Γ_{l-1} воспринимается как изгибающий момент. И функция $f_{lk}(s)$ характеризует глубину проникновения этого дополнительного изгибающего момента в окрестности угловых точек на смежных сторонах Γ_{l+1} и Γ_{l-1}.

3. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях трехслойной пластины [2]

$$(1 - \vartheta\mu^2\Delta)\Delta\Delta X(x, y) - \omega^2 k^2(1 - \mu^2\Delta)X(x, y) = 0; \tag{3.1}$$

$$\varepsilon^2\Delta v(x, y) - v(x, y) = 0 \tag{3.2}$$

(X — разрешающая функция, v — функция, характеризующая сдвиг трехслойного пакета). Здесь введены обозначения

$$\omega = \omega^* a\sqrt{\rho/E}, \quad k^2 = 12(1 - \nu^2)a^2/h^2\eta_*, \tag{3.3}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1-\nu}{2}\frac{h^2}{\beta_* a^2}, \quad \mu^2 = \frac{h^2}{\beta_* a^2},$$

малые параметры ε и μ имеют одинаковый порядок, но разный механический смысл: поле углов поворота состоит из потенциальной части (ей отвечает μ) и вихревой (ей соответствует ε), и поэтому их следует различать.

В соотношения (3.3) входят параметры: ω^* — размерная частота колебаний; a, b, h — длины сторон и приведенная толщина пластины; E, ν — приведенные модуль Юнга и коэффициент Пуассона [2]. Малый параметр ϑ характеризует собственную изгибную жесткость несущих слоев, большой параметр k — изгибную жесткость всего трехслойного пакета, η_* — взаимное расположение слоев, β_* — способность пластины сопротивляться поперечной нагрузке, γ_* — параметр, равный отношению поперечной силы, воспринимаемой заполнителем, к полной поперечной силе.

Параметры k, ε, μ в разной мере содержат отношение h/a, тем не менее их надо различать, так как у них разный механический смысл. Рассматривается асимптотика только по ε.

Введем безразмерные моменты, обобщенные моменты, усилия и другие величины:

$$M_n = \frac{1}{Eh}M_n^*, \quad M_{ns} = \frac{1}{Eh}M_{ns}^*, \quad N_n = \frac{a}{Eh}N_n^*,$$

$$H_n = \frac{1}{Eh}H_n^*, \quad H_{ns} = \frac{1}{Eh}H_{ns}^*, \quad \alpha_n = \alpha_n^*, \quad \alpha_s = \alpha_s^*,$$

где M_n, M_{ns} — изгибающий и крутящий моменты; H_n, H_{ns} — обобщенные изгибающий и крутящий моменты; N_n — перерезывающее усилие; α_n и α_s — нормальный и касательный углы сдвига, которые выражаются следующим образом:

$$M_n|_{\Gamma_l} = -\frac{1}{k^2}\left[M_{0n} + (-1)^l(1-\nu)(1-\vartheta)\frac{\partial^2 v}{\partial n\,\partial s}\right]_{\Gamma_l},$$

$$M_{ns}|_{\Gamma_l} = -\frac{1}{k^2}\left[M_{0ns} - (-1)^l\frac{(1-\nu)(1-\vartheta)}{2}\left(2\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} - \frac{v}{\varepsilon^2}\right)\right]_{\Gamma_l},$$

$$H_n|_{\Gamma_l} = -\frac{\gamma_*}{k^2}\left[H_{0n} + (-1)^l(1-\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial n\,\partial s}\right]_{\Gamma_l},$$

$$H_{ns}|_{\Gamma_l} = -\frac{\gamma_*}{k^2}\left[H_{0ns} - (-1)^l\frac{(1-\nu)}{2}\left(2\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} - \frac{v}{\varepsilon^2}\right)\right]_{\Gamma},$$

$$N_n|_{\Gamma_l} = -\frac{\gamma_*}{k^2}\left[N_{0n} + (-1)^l\frac{(1-\nu)(1-\vartheta)}{2}\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial v}{\partial s}\right]_{\Gamma_l},$$

$$\alpha_n|_{\Gamma_l} = -\frac{1-\vartheta}{\gamma_*}\left[\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial n}\Delta X - (-1)^l\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial v}{\partial n}\right]_{\Gamma_l},$$

$$\alpha_s|_{\Gamma_l} = -\frac{1-\vartheta}{\gamma_*}\left[\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial n}\Delta X - (-1)^l\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial v}{\partial s}\right]_{\Gamma_l},$$

Таблица 2

№ п/п	Краевые условия системы (3.1), (3.2)	Краевые условия уравнения (3.1) (нулевое приближение)	β, γ
1	$w=0,\quad M_n=0,\quad H_n=0,\quad H_{ns}=0$	$w_0=0,\quad H_{0n}+F(w_0)=0^*$ $M_{0n}+(1-\vartheta)F(w_0)=0$	2,0
2	$w=0,\quad M_n=0,\quad H_n=0,\quad \alpha_n=0$	$w_0=0,\quad M_{0n}=0,\quad H_{0n}=0$	3,1
	$w=0,\quad \frac{\partial w}{\partial n}=0,\quad \alpha_s=0,\quad H_{ns}=0$	$w_0=0,\quad \frac{\partial w_0}{\partial n}=0,\quad \frac{\partial}{\partial n}\Delta X_0+$ $+\frac{\partial}{\partial s}H_{0ns}=0$	2,0
4	$w=0,\quad \frac{\partial w}{\partial n}=0,\quad \alpha_n=0,\quad \alpha_s=0$	$w_0=0,\quad \frac{\partial w_0}{\partial n}=0,\quad \frac{\partial}{\partial n}\Delta X_0=0$	3,1
5	$N_n=0,\quad M_n=0,\quad H_n=0,\quad H_{ns}=0$	$N_{0n}+(1-\vartheta)\frac{\partial}{\partial s}H_{0ns}=0,$ $M_{0n}+(1-\vartheta)F(w_0)=0^*,$ $H_{0n}+F(w_0)=0^{**}$	2,0
6	$N_n=0,\quad M_n=0,\quad H_n=0,\quad \alpha_n=0$	$N_{0n}=0,\quad M_{0n}=0,\quad H_{0n}=0$	3,1
7	$\frac{\partial w}{\partial n}=0,\quad \alpha_s=0,\quad N_n=0,\quad H_{ns}=0$	$\frac{\partial w_0}{\partial n}=0,\quad N_{0n}+(1-\vartheta)\frac{\partial}{\partial s}H_{0ns}=0,$ $\frac{\partial}{\partial n}\Delta X_0+\frac{\partial}{\partial s}H_{0ns}=0^{**}$	2,0
8	$\frac{\partial w}{\partial n}=0,\quad \alpha_s=0,\quad N_n=0,\quad \alpha_n=0$	$\frac{\partial w_0}{\partial n}=0,\quad N_{0n}=0,\quad \frac{\partial}{\partial n}\Delta X_0=0$	3,1

* $F(w_0)=(-1)^l(1-\vartheta)\,2\left[H_{0ns}\big|_{\Gamma_l\cap\Gamma_{l+1}} f_{l1}(s)+H_{0ns}\big|_{\Gamma_l\cap\Gamma_{l-1}} f_{l2}(s)\right].$

$$w=(1-\mu^2\Delta)X,\quad M_{0n}=\Delta^*w,\quad M_{0ns}=(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial n\,\partial s},$$

$$H_{0n}=\Delta^*X,\quad H_{0ns}=(1-\nu)\frac{\partial^2 X}{\partial n\,\partial s},\quad N_{0n}=\frac{\partial}{\partial n}\Delta w.$$

Краевые условия для системы (3.1), (3.2) приведены в табл. 2. Однотипность краевых условий по v для трехслойной и трансверсально-изотропной пластин позволяет без каких-либо ограничений перенести результаты ип. 1, 2 на трехслойные пластины. В табл. 2 даны краевые условия укороченной задачи.

Обосновано преобразование Кирхгофа (обобщенная перерезывающая сила) в окрестности угловой точки. В условиях 5 и 7 стоит знак **, который показывает, что в преобразовании Кирхгофа вместо $(1-\vartheta)H_{0ns}$ следует подставлять M_{0ns}, так как M_{0ns} — момент более общего порядка. Это несоответствие вытекает из строгих асимптотических выкладок, которые точнее, чем исходные гипотезы, положенные в основу теории трехслойных пластин Григолюка — Чулкова: несущие слои описываются по теории Кирхгофа — Лява, а заполнитель — по теории с учетом сдвига. Поэтому момент H_{ns} (описывающий крутящий момент в заполнителе) надо заменить на M_{ns} (крутящий момент во всей пластине).

Уточненные теории Амбарцумяна для анизотропных пластин и Григолюка — Чулкова для трехслойных одинакового порядка точности.

Поэтому появление дополнительных членов в краевых условиях 1 и 5 в табл. 2

$$(M_{0ns}|_{\Gamma_l \cap \Gamma_{l+1}}) f_{lk}(s), \quad |f_{lk}(s)| \leqslant C \exp(-\delta s)$$

имеет то же механическое объяснение, что и для трансверсально-изотропных пластин. Наличие этих дополнительных членов в первую очередь связано с точностью основных гипотез, положенных в основу теории изгиба как трансверсально-изотропных, так и трехслойных пластин. Только привлечение более точных гипотез может дать окончательный ответ на особенности поведения решения в окрестности угловых точек в случае, когда на границе заданы изгибающий и крутящий моменты.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных пластин.— М.: Наука, 1987.
2. **Григолюк Э. И., Чулков П. П.** Устойчивость и колебания трехслойных оболочек.— М.: Машиностроение, 1973.
3. **Friedrichs K. O., Dressler R. F.** A boundary-layers theory for elastic plates // Communs Pure and Appl. Math.— 1961.— V. 14, N 1.
4. **Григолюк Э. И., Корнев В. М.** Обоснование уравнений трехслойных пластин несимметричной структуры с жестким заполнителем // Инж. журн. МТТ.— 1966.— № 6.
5. **Григолюк Э. И., Корнев В. М.** К асимптотическому анализу уравнений теории трехслойных пластин и оболочек // Изв. АН СССР. МТТ.— 1976.— № 4.
6. **Бутузов В. В.** Асимптотика решения уравнения $\mu^2\Delta u - k^2(x, y)u = f(x, y)$ в прямоугольной области // Дифференц. уравнения.— 1973.— Т. 9, № 9.
7. **Корнев В. М., Мулькибаев А. О.** Асимптотика свободных колебаний защемленной прямоугольной пластины. Формулировка укороченной задачи // ПМТФ.— 1987.— № 2.
8. **Вахромеев Ю. М., Корнев В. М.** Динамический краевой эффект в стержнях. Формулировка укороченных задач // Изв. АН СССР. МТТ.— 1972.— № 4.
9. **Вахромеев Ю. М., Корнев В. М.** О краевых задачах с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1977.— Т. 13, № 7.
10. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН.— 1957.— Т. 12, вып. 5.
11. **Гольденвейзер А. Л.** Теория тонких упругих оболочек.— М.: Гостехиздат, 1953.

г. Новосибирск,
г. Алма-Ата

Поступила 14/V 1991 г.

УДК 539.218

В. А. Буряченко, В. З. Партон

ЭФФЕКТИВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТОВ В СОПРЯЖЕННЫХ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Развитие современной техники, эксплуатируемой в сложных условиях нагружения взаимодействующих физических факторов, стимулировало создание теории сопряженных (например, электромагнитоупругих) полей в упругих телах и, в частности, в композитных материалах. В механике микронеоднородных сред случайной структуры разработаны высокоэффективные методы расчета линейных эффективных свойств среды в различных физико-механических полях по свойствам компонентов среды и проведено сравнение с экспериментом [1—6]. При этом, как правило, проводится оценка средних значений различных полей в компонентах, зависящих линейно от случайных полей в среде, что существенно упрощает решение указанной классической задачи. Прогнозирование прочностных свойств среды принципиально осложняется существенно нелинейной зависимостью законов прочности от локальной напряженности поля. Например, простейшим методом оценки эффективных параметров