УДК 532.51

В. К. Андреев, А. А. Родионов

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ

В работе получено точное решение нестационарных уравнений вращательно-симметричного движения идеальной жидкости. Оно интерпретируется как движение цилиндрического слоя со свободными границами. При этом учитывается и влияние сил поверхностного натяжения. Дан анализ устойчивости по линейному приближению, и найдены асимптотики роста малых возмущений. Приводятся также результаты численных расчетов возмущений свободных границ слоя в зависимости от параметров: чисел Вебера, относительной толщины слоя, длины волны возмущения.

Основное движение. Рассмотрим вращательно-симметричное движение идеальной несжимаемой жидкости в лагранжевых координатах [1]:

$$r_{tt} - \frac{V}{r^3} + \frac{r}{\eta}(z_\zeta p_\eta - z_\eta p_\zeta) = 0,\ z_{tt} - \frac{r}{\eta}(r_\zeta p_\eta - r_\eta p_\zeta) = 0, \tag{1}$$
$$r(r_\eta z_\zeta - r_\zeta z_\eta) = \eta.$$

Здесь $\eta = r(\eta, \zeta, 0)$; $\zeta = z(\eta, \zeta, 0)$; t — время; p — давление; $V(\eta, \zeta)$ — квадрат начального распределения момента импульса жидкой частицы вокруг оси z; функция V считается заданной. Плотность жидкости принимается равной единице.

Групповые свойства системы (1) изучены в [2], где выделены специализации классифицирующей функции $V(\eta, \zeta)$, при которых происходит расширение основной группы. Пусть $V = V(\eta)$, тогда система (1) допускает двухпараметрическую подгруппу $\langle \partial_\zeta + \partial_z, t\partial_z \rangle$ [2]. Заметим, что начальные условия $r = \eta$, $z = \zeta$, $t = 0$ являются инвариантным многообразием относительно этой подгруппы. Поскольку инвариантами подгруппы служат переменные t, η, r, p, то для системы (1) можно искать лишь частично инвариантные решения [3] ранга 2 и дефекта 1 вида $r = r(\eta, t)$, $z = z(\eta, \zeta, t)$, $p = p(\eta, t)$. При этом из (1) находим

$$r = \left\{2\int_0^\eta \eta[1 + a(\eta)t]^{-1} d\eta + c(t)\right\}^{1/2}, \quad z = [1 + a(\eta)t]\zeta + b(\eta)t, \tag{2}$$
$$p = \int r_\eta\left(\frac{V}{r^3} - r_{tt}\right)d\eta + \varphi(t)$$

с произвольными функциями $c(t)$, ($c(0) = 0$), $a(\eta)$, $b(\eta)$, $\varphi(t)$. Решение (2) можно интерпретировать как движение вращающегося вокруг оси z и вытягивающегося в направлении этой оси бесконечного жидкого цилиндра ($c(t) \equiv 0$) или цилиндрического слоя со свободными границами.

Положим в (2) $a(\eta) \equiv k = \mathrm{const}$, $b(\eta) \equiv 0$ и будем считать $c(t) \neq 0$ (при $c(t) = 0$ получаем задачу о растяжении жидкого цилиндра [4]), так что

$$r = m(\eta, t)\eta,\ z = \tau\zeta,\ m = (1/\tau + c/\eta^2)^{1/2},\ \tau = 1 + kt. \tag{3}$$

В этом случае цилиндрический слой можно считать конечным. Действительно, пусть в начальный момент времени область, занятая жидкостью, представляет собой цилиндрический слой $\Omega = \{\eta, \zeta | \eta_1 < \eta < \eta_2,\ 0 < \zeta < h\}$. Плоскости $\zeta = 0$, $\zeta = h$ суть непроницаемые стенки, а цилиндрические поверхности $\eta = \eta_{1,2}$ — свободные границы. Начальное поле скоростей на Ω имеет вид $w_0 = k\zeta$, $u_0 = [c'(0) - k\eta^2]/2\eta$, тем самым постоянная k определяется начальной скоростью $W = kh$ твердой стенки $\zeta = h$.

Для изучения эволюции свободных границ цилиндрического слоя обозначим через $r_1(t)$ внутренний радиус, а через $r_2(t)$ — внешний. Из (3) получим $r_1(t) = m(\eta_1, t)\eta_1$, $r_2(t) = m(\eta_2, t)\eta_2$, и, значит,

$$r_2^2(t) - r_1^2(t) = (\eta_2^2 - \eta_1^2)/\tau. \tag{4}$$

Конечное соотношение (4) есть закон сохранения объема цилиндрического слоя. В процессе движения, как следует из (3), (4), жидкость сохраняет форму прямого полого цилиндра, причем твердая стенка $\zeta = 0$ остается неподвижной. Верхняя стенка движется по закону $z = \tau h$. Если $k > 0$, то цилиндрический слой вытягивается вдоль оси z, а при $k < 0$ за время $t = 1/|k|$ движущаяся плоскость встречается с неподвижной. Если u_{10} есть начальная скорость внутренней поверхности, то $c'(0) = 2\eta_1 u_{10} + k\eta_1^2$. Будем считать $c'(0) = 0$, так что движение определяется только постоянной $k = W/h$ — начальным растяжением или сжатием вдоль оси z. При $k = 0$, $c'(0) \neq 0$ получаем плоское течение кольца, исследованное в [4, 5].

Пусть σ_1, σ_2 — коэффициенты поверхностного натяжения на внутренней и внешней поверхностях. Из динамического условия на границах $p(r_2(t), t) - p(r_1(t), t) = \sigma_1/r_1(t) + \sigma_2/r_2(t)$ и равенств (2), (4) можно найти обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка на функцию $c(t)$. Вместо $c(t)$ удобно ввести новую функцию $g = 1 + \eta_1^{-2}\tau c$ и перейти к переменной $\mu = (1 + kt)^2 = \tau^2$ вместо t. Тогда упомянутое выше уравнение относительно $g(\mu)$ имеет вид

$$g'' \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{g}\right) + \frac{g'^2}{2}\left(\frac{1}{g+\varepsilon} - \frac{1}{g}\right) + \frac{3\varepsilon}{8\mu^2} - \tag{5}$$

$$- \frac{1}{2k^2\eta_1^4}\int_1^{1+\varepsilon} \frac{V(\eta_1\sqrt{y})}{(g-1+y)^2}\,dy + \frac{1}{\mu^{1/4}}\left(\frac{S_1}{\sqrt{g}} + \frac{S_2}{\sqrt{g+\varepsilon}}\right) = 0, \quad g(1) = 1, \quad g'(1) = 0,$$

где $\varepsilon = (\eta_2/\eta_1)^2 - 1 > 0$; $S_j = \sigma_j/\eta_1^3 k^2$ $(j = 1, 2)$ — числа Вебера (напомним, что плотность жидкости полагается равной единице). По функции $g(\mu)$ радиусы внутренней и внешней поверхностей определяются по формулам

$$r_1 = \eta_1\mu^{-1/4}g^{1/2}, \quad r_2 = \eta_1\mu^{-1/4}(g + \varepsilon)^{1/2}. \tag{6}$$

В случае потенциального движения слоя $V = 0$ и, как нетрудно видеть из (5), $g(\mu) \leqslant 1$ для всех $\mu \geqslant 1$. Более точные оценки показывают, что справедливо неравенство

$$-\left[(1-g)\frac{3\varepsilon}{4} - 4S_1\sqrt{g} - 4S_2\sqrt{g+\varepsilon} + \gamma\right]^{1/2} \leqslant \tag{7}$$

$$\leqslant \left[\ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{g}\right)\right]^{1/2}\frac{dg}{d\mu} \leqslant -\left[\gamma - 4S_1\sqrt{g} - 4S_2\sqrt{g+\varepsilon}\right]^{1/2}$$

($\gamma = 4S_1 + 4S_2\sqrt{1+\varepsilon}$). Отсюда ясно, что существует такое $\mu_* > 1$, что $g(\mu_*) = 0$. Обращаясь к формулам (6), получим $r_1(t_*) = 0$, $r_2(t_*) = \eta_1\mu_*^{-1/4}\varepsilon^{1/2}$ в момент времени $t_* = (\sqrt{\mu_*} - 1)/k$, $k > 0$. Используя оценку (7), легко показать, что скорость внутренней поверхности неограниченно растет, причем $dr_1/dt \sim c_0 r_1^{-1}[-\ln(r_1\sqrt{\tau}/\eta_1)]^{-1/2}$ при $r_1 \to 0$, $c_0 = k\eta_1^2\mu_*^{1/2}(3\varepsilon/8)^{1/2}$. Это отражает тот факт, что в момент исчезновения полости происходит гидравлический удар — схлопывание полости.

К сожалению, это движение не продолжимо за время $t > t_*$ как движение цилиндрической струи. Действительно, если $g = 0$ при $t \geqslant t_*$, то в формулах (2), (3) надо взять $c = -\eta_1^2/\tau$. Получим

$$r = \left(\frac{\eta^2 - \eta_1^2}{\tau}\right)^{1/2}, \quad z = \tau\zeta, \quad p = -\frac{3}{8\tau^3}\eta^2 + \varphi(t). \tag{8}$$

Ясно, что это решение описывает движение при $t \geqslant t_*$ сплошной цилиндрической струи со свободной границей $r_3(t) = [(\eta_2^2 - \eta_1^2)/\tau]^{1/2}$. При этом

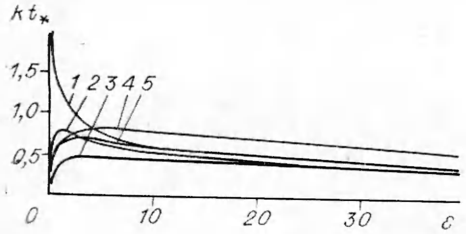

Рис. 1

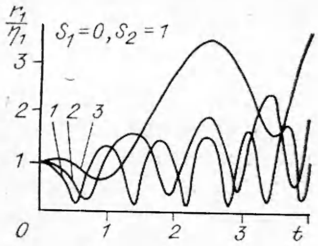

Рис. 2

$\varphi(t) = \sigma_2/r_3(t) + 3(\eta_2^2 - \eta_1^2)/8\tau^3$. Можно показать, что полная энергия цилиндрического слоя остается конечной в момент схлопывания, однако она не совпадает с энергией струи (8) в этот момент на величину, пропорциональную $\lim\limits_{t\to t_*}(g')^2 \ln(1+\varepsilon/g)$ и отличную от нуля в силу оценок (7). Кроме того, давление в цилиндрическом слое при $t \to t_*$ неограниченно возрастает и тем самым не совпадает с давлением в струе, распределенным по закону (8).

Замечание 1. Уравнения гидродинамики (1) вращательно-симметричного движения инвариантны относительно преобразований $t' = t + a$, $\eta' = \sqrt{\eta^2 + b(\zeta)d}$, $\zeta' = \zeta$, $r' = r$, $z' = z$, $p' = p$ с произвольными параметрами a, d и функцией $b(\zeta)$ [2]. Положив $a = -t_*$, $b = 1$, $d = -\eta_1^2$, убеждаемся, что (8) сводится к известному решению Л. В. Овсянникова [4] с линейным полем скоростей.

На рис. 1 приведены численно построенные зависимости безразмерного времени схлопывания $kt_*(\varepsilon)$ полости. Кривая *1* отвечает $S_1 = S_2 = 0$, *2* — $S_1 = 0{,}1$, $S_2 = 0$, *3* — $S_1 = S_2 = 1$, а угловой момент равен нулю (функция $V(\eta)$ в уравнении (5) равна нулю). Кривые *4* $(V = 0{,}2k^2\eta_1^4 y^2$, $S_1 = 1$, $S_2 = 0)$ и *5* $(V = 0{,}2k^2\eta_1^4 y$, $S_1 = 1$, $S_2 = 0)$ показывают, что схлопывание полости может происходить и при ненулевом вращении.

При определенных условиях задания функции $V(\eta)$ возможно установление колебательного движения цилиндрического слоя. На рис. 2 даны графики зависимостей радиуса внутренней свободной границы от времени t при $V = 0{,}2k^2\eta_1^4(1 + y^2)$, $S_1 = 0$, $S_2 = 1$ и $\varepsilon = 0{,}5$; 1; 3 (линии *1—3* соответственно). В тех случаях, когда силы инерции, связанные с вращением жидкости вокруг оси z, преобладают над другими силами, возможно неограниченное возрастание внутреннего радиуса. Такое движение может быть реализовано, например, при $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $V = 0{,}2k^2\eta_1^4(1 + y^2)$.

Малые возмущения цилиндрического слоя. Задача об эволюции малых возмущений произвольного потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости с учетом капиллярных сил имеет вид [6]

$$\text{div}\, M^{-1}M^{*-1}\nabla\Phi = 0,\ \xi \in \Omega,\ t \geqslant 0; \tag{9}$$

$$\Phi_t = \left[\frac{\partial p}{\partial n_{\Gamma_t}} + \sigma\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right)\right] R + \sigma\bar{\Delta}_\Gamma(t) R, \quad \xi \in \Gamma, \quad t \geqslant 0; \tag{10}$$

$$R = \frac{|\nabla f|}{|M^{*-1}\nabla f|}\,\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{s} + \int\limits_0^t M^{-1}M^{*-1}\nabla\Phi\, dt\right), \quad \xi \in \Gamma, \quad t \geqslant 0; \tag{11}$$

$$\Phi = 0,\ \text{div}\,\mathbf{s} = 0,\ \xi \in \Omega,\ t = 0. \tag{12}$$

Здесь M — матрица Якоби отображения $\xi \to \mathbf{x}(\xi, t)$ начальной области Ω на область течения Ω_t при $t > 0$ с элементами $M_{ij} = \partial x_i/\partial\xi_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$; M^*—сопряженная матрица; Γ — граница Ω; $f(\xi) = 0$ — ее уравнение; $\mathbf{n}(\xi)$ — нормаль к Γ; Γ_t — граница Ω_t; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны ее нормальных сечений; $\partial p/\partial n_{\Gamma_t}$ — производная по нормали к Γ_t от давления; $\overline{\Delta}_\Gamma(t)$ — оператор Лапласа — Бельтрами с коэффициентами $E = |M\xi_\alpha|^2$, $G = |M\xi_\beta|^2$, $F = (M\xi_\alpha,\ M\xi_\beta)$ $((\alpha,\ \beta) \to \xi(\alpha,\ \beta)$ — регулярная параметризация границы Γ); $\mathbf{s}(\xi)$ $(\xi \in \Gamma)$ — вектор смещения точек границы, характеризующий начальное возмущение области течения. Функция $R(\xi,\ t)$ $(\xi \in \Gamma)$ представляет собой отклонение свободной границы в возмущенном движении от свободной границы в основном [6]. Она наиболее наглядно характеризует влияние малых возмущений на движение со свободной границей.

Для потенциального движения цилиндрического слоя (3) отображение $\xi \to \mathbf{x}(\xi,\ t) = (m(\eta,\ t)\xi_1,\ m(\eta,\ t)\xi_2,\ \tau\zeta)$ и матрица Якоби M допускает представление

$$M = mE_1 + \eta m_\eta Q + \tau E_2 \qquad (\eta^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2,\ \xi_3 = \zeta),$$

где $E_1 = \operatorname{diag}(1,\ 1,\ 0)$; $E_2 = \operatorname{diag}(0,\ 0,\ 1)$, а элементы матрицы Q равны $\xi_i\xi_j/\eta^2$ $(i,\ j = 1,\ 2)$ и 0 при других значениях $i,\ j$. Поскольку $QE_2 = 0$, $Q^2 = Q$, $E_1E_2 = 0$, то для обратной матрицы M^{-1} получим выражение

$$M^{-1} = \frac{1}{m} E_1 - \tau\eta m_\eta Q + \frac{1}{\tau} E_2.$$

Учитывая, что $M = M^*$, $Q\nabla\Phi = (\xi_1,\ \xi_2,\ 0)\Phi_\eta/\eta$, из (9) после некоторых преобразований приходим к уравнению на функцию $\Phi(\eta,\ \theta,\ \zeta,\ t)$

(13) $$\Phi_{\eta\eta} + \frac{\eta^2 - \tau c}{(\eta^2 + \tau c)\,\eta}\Phi_\eta + \frac{\eta^2}{(\eta^2 + \tau c)^2}\Phi_{\theta\theta} + \frac{\eta^2}{(\eta^2 + \tau c)\,\tau^3}\Phi_{\zeta\zeta} = 0$$

при $(\eta,\ \theta,\ \zeta) \in \Omega = \{\eta_1 < \eta < \eta_2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 < \zeta < h\}$.

При преобразовании граничного условия (11) надо взять $\sigma = \sigma_1$ при $\eta = \eta_1$, $\sigma = \sigma_2$ при $\eta = \eta_2$. Введем обозначение $m_j(t) = m(\eta_j,\ t)$ $(j = 1,\ 2)$. Поскольку параметризация свободных границ $\Gamma_j(\eta = \eta_j)$ есть $\xi(\theta,\ \zeta) = (\eta_j \cos\theta,\ \eta_j \sin\theta,\ \zeta)$, то

$$E = (\eta_j m_j)^2, \quad G = \tau^2, \quad F = 0, \quad \overline{\Delta}_{\Gamma_j}(t)\, R = \frac{1}{(\eta_j m_j)^2}\frac{\partial^2 R}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tau^2}\frac{\partial^2 R}{\partial\zeta^2}.$$

Далее, уравнение свободных границ Γ_j есть $f = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \eta_j^2 = 0$, значит, $R_1^{-2} + R_2^{-2} = (\eta_j m_j)^{-2}$, $|\nabla f|/|M^{*-1}\nabla f| = 1/\tau m_j$, $\mathbf{n}_j = \mp(\xi_1,\ \xi_2,\ 0)/\eta_j$. Кроме того, из (2), (3), (11) находим

(14) $$\frac{\partial p}{\partial n_{\Gamma_t}} = \pm\, \eta_j m_{jtt} \quad (\eta = \eta_j);$$

(15) $$R = \frac{1}{\tau m_j}\left(s_j \mp \int_0^t \tau^2 m_j^2 \Phi_\eta\, dt\right) \quad (\eta = \eta_j), \quad s_j = \mathbf{s}\cdot\mathbf{n}_j \quad (j = 1,\ 2),$$

а граничное условие (11) приводит к соотношениям

(16) $$\Phi = \left[\pm\frac{\eta_j m_{jtt}}{\tau m_j} + \frac{\sigma_j}{\tau\eta_j^2 m_j^3}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\eta_j^2 m_j^2}{\tau^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 1\right)\right] \times$$
$$\times \left(s_j \mp \int_0^t \tau^2 m_j^2 \Phi_\eta\, dt\right) = 0 \quad (\eta = \eta_j,\ j = 1,\ 2),$$

где верхний знак соответствует $j = 1$, нижний — $j = 2$.

Так как возмущение скорости определяется по формуле [6]

(17) $$\mathbf{U} = M^{*-1}\nabla\Phi,$$

то условие непротекания твердых стенок $\zeta = 0$, $\zeta = h$ эквивалентно

(18) $$\Phi_\zeta = 0 \quad (\zeta = 0,\ \zeta = h).$$

Итак, для анализа поведения малых возмущений цилиндрического слоя жидкости требуется найти функцию $\Phi(\eta,\ \theta,\ \zeta,\ t)$ как решение начально-краевой задачи (13), (16), (18), (12), а затем вычислить $R^j(t) = R|_{\eta=\eta_j}$ согласно формуле (15).

Заметим, что в случае $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, согласно (15), (14), $\partial p/\partial n_{\Gamma_t} < 0$ при $\eta = \eta_j$ и задача (13), (16), (18), (12) корректно поставлена [7]. При $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ она корректно поставлена по Адамару независимо от знака $\partial p/\partial n_{\Gamma_t}$ [6].

Построение возмущенного движения и его асимптотический анализ. Заметим, что в задаче (13), (16), (18) переменные (η, τ), θ, ζ разделяются. С учетом равенств (18) положим

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_{n\lambda}(\eta, t)\, e^{i\lambda\theta} \cos\left(\frac{n\pi}{h}\zeta\right) \quad (i = \sqrt{-1}). \tag{19}$$

После подстановки (19) в (13) получим уравнение на $A(\eta, t) \equiv A_{n\lambda}(\eta, t)$:

$$A_{\eta\eta} + \frac{\eta^2 - \tau c}{\eta(\eta^2 + \tau c)} A_\eta - \left[\frac{\eta^2\lambda^2}{(\eta^2 + \tau c)^2} + \frac{\eta^2 q^2}{\tau^3(\eta^2 + \tau c)}\right] A = 0 \tag{20}$$

$(q = n\pi/h)$; можно проверить, что общее решение его имеет вид

$$A(\eta, t) = B_1(t) I_\lambda\left[\frac{q}{\tau^{3/2}}(\eta^2 + \tau c)^{1/2}\right] + B_2(t) K_\lambda\left[\frac{q}{\tau^{3/2}}(\eta^2 + \tau c)^{1/2}\right] \tag{21}$$

с произвольными функциями $B_1(t)$, $B_2(t)$ (I_λ, K_λ — модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода).

Пусть

$$N_j = \left[a_j + \frac{1}{k}\int_1^\tau \tau^2 m_j^2 A_\eta\, dt\right] \Big/ \eta_1 \quad (\eta = \eta_j), \tag{22}$$

где $a_j \equiv a_{n\lambda, j}$ — коэффициенты ряда Фурье начальных смещений поверхностей $s_j(\theta, \zeta)$. Введем также новые функции $A_j(\tau) = A(\eta_j, t)/k\eta_1^2$ и обозначим

$$f_j = I_\lambda\left[\frac{q}{\tau^{3/2}}(\eta_j^2 + \tau c)^{1/2}\right], \quad g_j = K_\lambda\left[\frac{q}{\tau^{3/2}}(\eta_j^2 + \tau c)^{1/2}\right].$$

Из (21) при $q \neq 0$ находим

$$A_\eta = \frac{k\eta_1^2}{\Delta}\left[\left(g_2\frac{dI_\lambda}{d\eta} - f_2\frac{dK_\lambda}{d\eta}\right)A_1 + \left(f_1\frac{dK_\lambda}{d\eta} - g_1\frac{dI_\lambda}{d\eta}\right)A_2\right], \quad \Delta = f_1 g_2 - f_2 g_1.$$

После подстановки полученных выражений в (16), (22) получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\frac{dA_j}{d\tau} = \left[\pm\frac{\eta_j m_{j\tau\tau}}{\eta_1 \tau m_j} - \frac{\eta_1^2 S_j}{\eta_j^2 \tau m_j^3}\left(\frac{m_j^2\beta_j^2}{\tau^2} + \lambda^2 - 1\right)\right] N_j; \tag{23}$$

$$\frac{dN_1}{d\tau} = \frac{\tau^2 m_1^2}{\Delta}\left(v_1 A_1 + \frac{1}{g}A_2\right), \quad \frac{dN_2}{d\tau} = \frac{\tau^2 m_2^2}{\Delta}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{g+\varepsilon}A_1 + v_2 A_2\right). \tag{24}$$

Здесь $\beta_1 = q\eta_1$; $\beta_2 = \sqrt{1+\varepsilon}\,\beta_1$; $\varepsilon = \eta_2^2/\eta_1^2 - 1$;

$$v_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{\tau^3 g}}\left(f_2\frac{dK_\lambda(x)}{dx} - g_2\frac{dI_\lambda(x)}{dx}\right); \quad x = \beta_1\sqrt{\frac{g}{\tau^3}};$$

$$v_2 = \frac{\beta_2}{\sqrt{\tau^3(g+\varepsilon)}}\left(-g_1\frac{dI_\lambda(y)}{dy} + f_1\frac{dK_\lambda(y)}{dy}\right); \quad y = \beta_2\sqrt{\frac{g+\varepsilon}{\tau^3}};$$

функция g есть решение задачи Коши (5) с $V \equiv 0$.

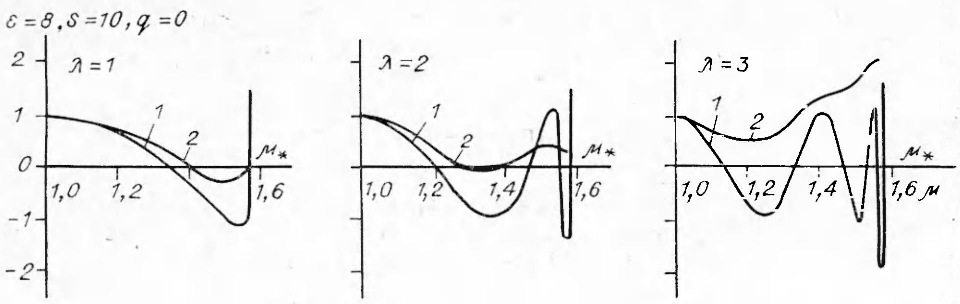

Рис. 3

Для построения возмущенного движения к системе следует добавить начальные условия

$$A_1(1) = A_2(1) = 0,\ N_1(1) = a_1/\eta_1,\ N_2(1) = a_2/\eta_1. \tag{25}$$

По известным функциям N_1, N_2 амплитуды отклонений свободных границ определяются очень просто:

$$R^1_{n\lambda} = \frac{\eta_1}{\tau m_1} N_1(\tau), \quad R^2_{n\lambda} = \frac{\eta_1}{\tau m_2} N_2(\tau). \tag{26}$$

Для двумерных возмущений, когда $q = 0$, уравнение (20) имеет решение

$$A = B_1(t)(\eta^2 + \tau c)^{\lambda/2} + B_2(t)(\eta^2 + \tau c)^{-\lambda/2}.$$

В этом случае изменятся лишь уравнения для $N_1(\tau)$, $N_2(\tau)$: вместо (24) будут уравнения

$$\frac{dN_1}{d\tau} = -\frac{\lambda\tau}{\Delta}\left\{\left[\left(\frac{g}{g+\varepsilon}\right)^{\lambda/2} + \left(\frac{g+\varepsilon}{g}\right)^{\lambda/2}\right]A_1 - 2A_2\right\}, \tag{27}$$

$$\frac{dN_2}{d\tau} = \frac{\lambda\tau}{\Delta\sqrt{1+\varepsilon}}\left\{-2A_1 + \left[\left(\frac{g}{g+\varepsilon}\right)^{\lambda/2} + \left(\frac{g+\varepsilon}{g}\right)^{\lambda/2}\right]A_2\right\}, \quad \Delta = \left(\frac{g}{g+\varepsilon}\right)^{\lambda/2} - \left(\frac{g+\varepsilon}{g}\right)^{\lambda/2}.$$

Конечно, в уравнениях (23) следует положить $q = 0$ ($\beta_1 = 0$).

Наконец, для чисто радиальных возмущений ($\lambda = 0$, $q = 0$) решение уравнения (20) есть $A = B_1(t) \ln(\eta^2 + \tau c) + B_2(t)$ и для N_1, N_2 имеем

$$\frac{dN_1}{d\tau} = \frac{2\tau}{\ln(1+\varepsilon/g)}(A_1 - A_2), \quad \frac{dN_2}{d\tau} = -\frac{2\tau}{\sqrt{1+\varepsilon}\ln(1+\varepsilon/g)}(A_1 - A_2). \tag{28}$$

При этом в уравнениях (23) надо положить $\lambda = 0$, $q = 0$.

Коэффициенты системы (23), (24) регулярны всюду, за исключением точки $\tau = \tau_* = 1 + kt_*$, в которой $g(\tau_*) = 0$. В ней они имеют логарифмические особенности, поскольку, например, при $g \to 0$

$$\frac{m_{1\tau\tau}}{\tau m_1} \sim \frac{3\varepsilon\tau}{4g^2 \ln g}; \quad \frac{m_{2\tau\tau}}{\tau m_2} \sim \frac{3\varepsilon}{4\sqrt{1+\varepsilon}\, g \ln^2 g}.$$

Наличие таких особенностей затрудняет нахождение асимптотического разложения решения задачи (23), (24) в окрестности особой точки $\tau = \tau_*$. Тем не менее такое разложение с помощью различных замен удается осуществить. Этот анализ требует больших выкладок и здесь излагаться не будет, приведем лишь его результаты.

Пусть $S_1 = S_2 = 0$ — инерционное схлопывание слоя. Оказывается, что различаются случаи $\lambda > 1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 0$. Минуя промежуточные выкладки, сразу же приведем асимптотики амплитуд функций R^1, R^2 при $r_1(t) \to 0$, когда $t \to t_*$. Именно

$$R^1_{n\lambda} \sim D_1(\tau)\left[-\ln\left(\frac{r_1\sqrt{\tau}}{\eta_1}\right)\right]^{1/4} \exp\left[i\sqrt{\lambda - 1}\ln\left(\frac{r_1}{\eta_1}\right)\right], \quad \lambda > 1; \tag{29}$$

$$(30)\qquad R^1_{n1} \sim D_2(\tau)\left[-\ln\left(\frac{r_1\sqrt{\tau}}{\eta_1}\right)\right]^{1/2}\exp\left\{i\left[-2\ln\left(\frac{r_1\sqrt{\tau}}{\eta_1}\right)\right]^{1/2}\right\},\quad \lambda = 1;$$

$$(31)\qquad R^1_{n0} \sim D_3(\tau)\left[-\ln\left(\frac{r_1\sqrt{\tau}}{\eta_1}\right)\right]^{1/4}\left(\frac{r_1}{\eta_1}\right)^{-1/2},\quad \lambda = 0$$

с некоторыми ограниченными при $\tau \to \tau_*$ функциями $D_1(\tau)$, $D_2(\tau)$, $D_3(\tau)$. Таким образом, внутренняя поверхность всегда неустойчива при схлопывании. Что касается внешней поверхности, то для всех $\lambda \geqslant 0$

$$(32)\qquad R^2_{n\lambda} \sim D_4(\tau)\, r_1\left[-\ln\left(\frac{r_1\sqrt{\tau}}{\eta_1}\right)\right]^{3/2},$$

поэтому она устойчива при схлопывании. Отметим, что при $\lambda > 1$ $R^1_{n\lambda}$ ведет себя так же, как и при сжатии кольца жидкости [5]. Данная асимптотика не зависит и от вида начальных возмущений — потенциальных или вихревых. При $\lambda = 1$ трехмерные возмущения несколько снижают неустойчивость, не устраняя ее полностью (для кольца $R^1_1 \sim D_2(\tau) \times \times[-\ln(r_1/\eta_1)]^{3/2}$ [5]).

Влияние капиллярности. Пусть $S_1 \neq 0$, $S_2 \neq 0$ в системах (5), (23). Можно показать, что и в этом случае главные члены асимптотик для $R^1_{n\lambda}$, $R^2_{n\lambda}$ при любых фиксированных λ, q совпадают с (29)—(32). Тем самым внутренняя поверхность неустойчива при схлопывании, однако для достаточно высоких гармоник с $\lambda \gg \left[-\frac{r_1}{\eta_1}\ln\left(\frac{r_1\sqrt{\tau}}{\eta_1}\right)\right]^{-1/2}$ или $q \gg \gg \left[-\left(\frac{r_1}{\eta_1}\right)^3\ln\left(\frac{r_1\sqrt{\tau}}{\eta_1}\right)\right]^{-1/2}$ при $r_1 \to 0$ капиллярные силы ограничивают рост возмущений: $|R^1_{n\lambda}| < \infty$, $t \to t_*$.

З а м е ч а н и е 2. При $q = 0$ (плоские возмущения) или $\lambda = 0$, $q = 0$ (радиальные) асимптотики совпадают с (29)—(32).

На рис. 3—5 приведены результаты расчетов амплитуд возмущений границ цилиндрического слоя. На всех рисунках кривая *1* соответствует $R^1_{n\lambda}$, а *2* — $R^2_{n\lambda}$. Линия *3* описывает поведение радиуса внутренней полости r_1, $\mu_* = (1 + kt_*)^2$, $\varepsilon = 8$, $S_1 = S_2 = 10$. Рис. 3 показывает поведение двумерных возмущений (23), (27) с $\lambda = 1, 2, 3$, а на рис. 4 представлены характерные кривые для радиальных возмущений (23), (28). Рис. 5 иллюстрирует поведение возмущений на свободных поверхностях слоя при $q = 1$, $\lambda = 0, 1, 2, 3$. Построенные численные кривые подтверждают асимптотические выводы предыдущего пункта — внутренняя поверхность неустойчива при схлопывании, в то время как возмущения на внешней поверхности затухают.

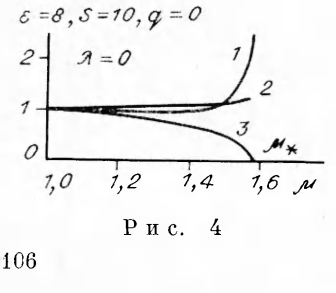

Рис. 4

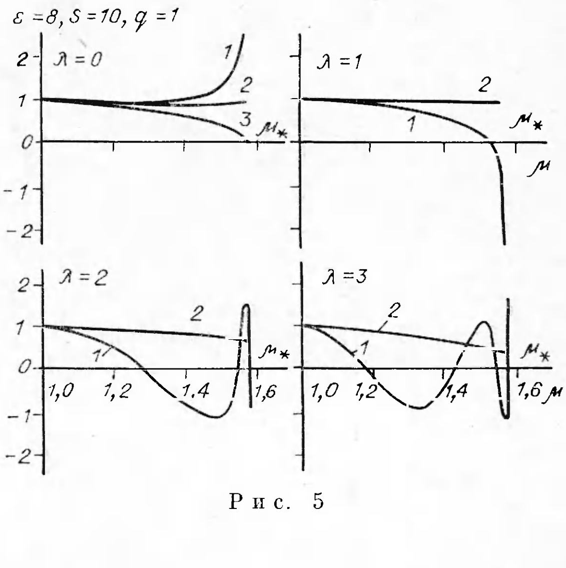

Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. **Налимов В. И., Пухначев В. В.** Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей // Новосибирск: НГУ, 1975.
2. **Андреев В. К., Родионов А. А.** Групповая классификация и точные решения уравнений плоского и вращательно-симметричного течения идеальной жидкости в лагранжевых координатах // Дифференц. уравнения.— 1988.— Т. 24, № 9.
3. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
4. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей.— Новосибирск: Наука, 1967.
5. **Меньщиков В. М.** О малых возмущениях неустановившихся одномерных движений идеальной несжимаемой жидкости с осевой симметрией // ПМТФ.— 1979.— № 2.
6. **Андреев В. К.** Малые возмущения неустановившегося движения со свободной границей с учетом капиллярных сил // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1977.— Вып. 32.
7. **Андреев В. К.** Корректность задачи о малых возмущениях движения жидкости со свободной границей // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1973.— Вып. 13.

г. Красноярск *Поступила 5/VI 1991 г.*

УДК 539.376

М. Н. Кирсанов

О ВЛИЯНИИ ВЫБОРА КРИТЕРИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ НА РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Для оценки устойчивости конструкции в условиях ползучести имеется ряд подходов [1]. Неопределенность выбора критерия неустойчивости препятствует точной постановке задачи оптимизации реологических систем. В имеющихся решениях [2, 3] нет сопоставления результатов решения задачи для различных подходов. Однако эти подходы существенно различаются по значению предсказываемого критического времени.

Цель настоящей работы — оценить влияние выбора критерия неустойчивости на решение задачи оптимизации. Рассматриваются так называемые условные критерии [4]. Приводятся уравнения задачи о максимуме критического времени произвольной стержневой конструкции, и на конкретном примере определяется условие минимума объема при фиксированном критическом времени. Показывается, что в первом случае выбор критерия не оказывает никакого влияния на оптимальную форму системы, во втором это влияние незначительно.

Предположим, что материал стержней подчиняется закону ползучести [5]

$$\dot{p}p^{\alpha} = f(\sigma) \tag{1}$$

($p = \varepsilon - \sigma/E$ — деформация ползучести, α — параметр упрочнения). Анализируя варианты условных критериев неустойчивости при ползучести, заметим, что для большинства из них справедливо представление критической деформации сжатого стержня в форме

$$p = \varphi(\sigma_0 - \sigma)/E, \tag{2}$$

где φ зависит от выбранного критерия (см. таблицу); $\sigma_0 = (\pi/l)^2 EI/F$ — критическое напряжение упругого стержня по Эйлеру; I, F — момент инерции и площадь поперечного сечения. Стержни в конструкции предполагаются шарнирно опертыми. Критерий [6] представлен в форме (2) приближенно при напряжениях, близких к σ_0.*

---

* Критическое время в условиях ползучести в [7] получено без учета [6] и повторяет известные результаты.