ЛИТЕРАТУРА

1. **Филлипс О.** Динамика верхнего слоя океана. М.: Мир, 1969.
2. **Самодуров А. С.** Внутренние волны в среде с меняющейся по горизонтали частотой Брента — Вяйсяля.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1972, т. 206, № 5.
3. **Миропольский Ю. З.** Распространение внутренних волн в океане с горизонтальными неоднородностями поля плотности.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1974, т. 10, № 5.
4. **Иванов Ю. А., Морозов Е. Г.** Деформация внутренних гравитационных волн потоком с горизонтальным сдвигом скорости.— Океанология, 1974, т. 14, вып. 3.
5. **Воронович А. Г., Леонов А. И., Миропольский Ю. З.** К теории образования тонкой структуры гидрофизических полей в океане.— Океанология, 1976, т. 11, № 5.
6. **Стурова И. В., Сухарев В. А.** Генерация внутренних волн локальными возмущениями в жидкости с заданным изменением плотности по глубине.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1981, т. 17, № 6.
7. **Миропольский Ю. З.** Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
8. **Пелиновский Е. Н.** Распространение волн в статистически неоднородном океане.— В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979.
9. **Ле Блон П., Майсек Л.** Волны в океане. Ч. I, II. М.: Мир, 1981.
10. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1974.
11. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
12. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
13. **Романовский П. И.** Ряды Фурье. М.: Наука, 1973.
14. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Наука, 1970.

УДК 538.4

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КЕЛЬВИНА — ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. М. Коровин

(Москва)

В работе [1] в результате анализа явления параметрической неустойчивости тангенциального разрыва в несжимаемой проводящей жидкости, возникающего под действием продольного магнитного поля, осциллирующего по времени около среднего значения $\langle \mathbf{H} \rangle \neq 0$, установлено, что переменное поле стабилизирует разрыв менее эффективно, нежели постоянное поле. В пренебрежении параметрическими эффектами в [2] исследовано влияние переменного поля (случай $\langle \mathbf{H} \rangle = 0$) на устойчивость поверхности раздела однородных потоков несмешивающихся проводящей и непроводящей жидкостей и получен качественно противоположный результат: ошибочно утверждается, что переменное поле всегда оказывает дестабилизирующее влияние. В данной работе показано, что длинноволновая часть спектра двумерных возмущений поверхности раздела проводящей и непроводящей жидкостей стабилизируется переменным полем, в то время как вызываемая самим полем неустойчивость имеет характер параметрического резонанса.

1. Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ с осью Oz, направленной против силы тяжести, плоскость $z = 0$ является невозмущенной поверхностью раздела между покоящейся проводящей жидкостью, заполняющей область $z > 0$, и более тяжелой непроводящей жидкостью, движущейся в области $z < 0$ с постоянной скоростью $\mathbf{u} = (u_x,\ u_y,\ 0)$. Исследуем влияние переменного магнитного поля, параллельного поверхности раздела, на механизм неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. В невозмущенном состоянии распределения магнитного поля и давления имеют вид

$$\mathbf{H}_1^0 = \left[H \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right), 0, 0\right], \quad \mathbf{H}_2^0 = (\mathbf{H} \cos \omega t, 0, 0), \quad p_2^0 = -\rho_2 g z,$$

$$p_1^0 = \frac{H^2}{16\pi}\left\{1 + \cos 2\omega t - \exp\left(-\frac{2z}{\delta}\right)\left[1 + \cos\left(\frac{2z}{\delta} - 2\omega t\right)\right]\right\} - \rho_1 g z,$$

где $\delta = (2\nu_m/\omega)^{1/2}$ — толщина скин-слоя, индекс 1 относится к области $z > 0$, а индекс 2 — к области $z < 0$.

Пусть в некоторый момент времени, принимаемый в дальнейшем за начало отсчета, конечному объему жидкости сообщается малая по сравнению с u вертикальная скорость. В линейной постановке задача о развитии возмущений скоростей $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2=\nabla U_2$, давлений p_1, p_2, магнитных полей $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2 = \nabla\theta$ и поверхности раздела $z = \zeta(x, y, t)$ записывается следующим образом:

$$(1.1)\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}_1 = 0,\quad \rho_1\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{4\pi}\mathbf{f},\quad \Delta U_2 = 0,\quad \Delta\theta = 0;$$

$$(1.2)\qquad \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial t} - \nu_m\Delta\mathbf{h}_1 = H_{1x}^0\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x} + \mathbf{G},\quad \operatorname{div}\mathbf{h}_1 = 0,$$

$$\mathbf{f} = \left[h_{1z}\frac{\partial H_{1x}^0}{\partial z},\ H_{1x}^0\left(\frac{\partial h_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial h_{1x}}{\partial y}\right),\ H_{1x}^0\left(\frac{\partial h_{1z}}{\partial x} - \frac{\partial h_{1x}}{\partial z}\right) - h_{1x}\frac{\partial H_{1x}^0}{\partial z}\right],$$

$$\mathbf{G} = \left(v_{1z}\frac{\partial H_{1x}^0}{\partial z}, 0, 0\right),\quad p_2 = -\rho_2\left(\frac{\partial U_2}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla U_2\right);$$

$$(1.3)\qquad z = 0{:}\ \frac{\partial\xi}{\partial t} = v_{1z},\quad \frac{\partial\xi}{\partial t} + u_x\frac{\partial\xi}{\partial x} + u_y\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial U_2}{\partial z};$$

$$(1.4)\qquad z = 0{:}\ p_1 - p_2 = \xi\left\{g(\rho_1 - \rho_2) - \frac{H^2}{8\pi\delta}\left[1 + \sqrt{2}\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\right]\right\} + \alpha\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right);$$

$$(1.5)\qquad z = 0{:}\ h_{1x} = \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\sqrt{2}\,\xi}{\delta}H\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right),\quad h_{1y} = \frac{\partial\theta}{\partial y},\quad h_{1z} = \frac{\partial\theta}{\partial z};$$

$$(1.6)\qquad z\to+\infty{:}\ \mathbf{v}_1\to 0,\ \mathbf{h}_1\to 0;\quad z\to-\infty{:}\ U_2\to 0,\ \theta\to 0;$$

$$(1.7)\qquad t = 0{:}\ \xi = 0,\ \mathbf{h}_1 = 0,\ v_{jz} = V_j,\ j = 1, 2;\quad V_1(x, y, 0) = V_2(x, y, 0).$$

Здесь α — коэффициент поверхностного натяжения; при записи (1.5) предполагается, что отношение ξ/δ имеет первый порядок малости. Учет в (1.7) начальных возмущений поверхности раздела и магнитного поля лишь усложняет несколько выкладки, но не приводит к качественному изменению результатов.

Пусть F — оператор преобразования Фурье по координатам x, y, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$ — волновой вектор, L — оператор преобразования Лапласа по времени t, s — параметр этого преобразования. Введем обозначения:

$$F\xi = \eta,\ l = \eta\cos(\omega t - \pi/4),\ F\theta = \varphi,\ F\mathbf{v}_1 = \mathbf{w},\ F\mathbf{h}_1 = \mathbf{b},$$
$$Fp_1 = q,\ FU_2 = P,\ FV_1(x, y, 0) = V,\ Ll = M,\ L\varphi = \Phi,\ L\mathbf{b} = \mathbf{B}.$$

2. Нетрудно видеть, что при $V_j = V_j(y, z)$ проводящая жидкость не возмущает магнитное поле в нижнем полупространстве. В этом случае задача (1.1)—(1.7) имеет решение вида

$$\xi = \xi(y, t),\quad \mathbf{v}_1 = \nabla U_1(y, z, t),\quad p_1 = -\rho_1\frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}_1^0\mathbf{h}_1,\quad \mathbf{h}_1 = [h_{1x}(y, z, t), 0, 0],\quad U_2 = U_2(y, z, t),\quad \theta = 0.$$

После простых выкладок приходим к следующей задаче, описывающей развитие фурье-компонент возмущения поверхности раздела:

$$(\rho_1 + \rho_2)\frac{d^2\eta}{dt^2} - 2i\rho_2 k_y u_y\frac{d\eta}{dt} + \left[k_y g(\rho_2 - \rho_1) - \rho_2(k_y u_y)^2 + \alpha k_y^3\right]\eta = 0,$$

$$i = \sqrt{-1};\quad t = 0{:}\ \eta = 0,\quad \frac{d\eta}{dt} = V.$$

Из условия ограниченности $|\eta|$ следует известный критерий устойчивости скачка тангенциальной скорости $\mathbf{u} = (0, u_y, 0)$ при наличии сил тяжести и поверхностного натяжения [3]. Таким образом, плоские возмущения поверхности раздела, гребни которых параллельны невозмущенному магнитному полю, не испытывают воздействия со стороны поля.

3. Из условия сопряжения h_{1x} и h_{2x} на поверхности раздела (1.5) видно, что зависимость $\mathbf{h}_1$ от времени проявляется как за счет колебания невозмущенного поля с частотой ω, так и за счет колебаний проводящей жидкости с гидродинамическими частотами Ω. Оценки показывают, что при $\Omega/\omega \ll 1$ стоящими в правой части линеаризованного уравнения индукции (1.2) членами, учитывающими влияние гидродинамических возмущений на $\mathbf{h}_1$, можно пренебречь. Переходя в задаче (1.1)—(1.7) к изображениям, в результате несложных выкладок получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} - k^2 w_z\right) = \frac{ik_x}{4\pi\rho_1}\left(b_z \frac{\partial^2 H_{1x}^0}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu_m} H_{1x}^0 \frac{\partial b_z}{\partial t}\right), \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2; \tag{3.1}$$

$$\frac{d^2\mathbf{B}}{dz^2} - k^2\left(\frac{s}{m}+1\right)\mathbf{B} = 0, \quad \frac{dB_z}{dz} - i\mathbf{kB} = 0, \quad m = \nu_m k^2; \tag{3.2}$$

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - k^2\Phi = 0, \quad P = \frac{e^{kz}}{k}\left(\frac{d\eta}{dt} - i\mathbf{ku}\eta\right); \tag{3.3}$$

$$q = \frac{1}{k^2}\left\{\frac{1}{4\pi}\left[ik_x b_z \frac{\partial H_{1x}^0}{\partial z} - k_y H_{1x}^0 (k_y b_x - k_x b_y)\right] - \rho_1 \frac{\partial^2 w_z}{\partial t\,\partial z}\right\}; \tag{3.4}$$

$$z = 0: \frac{\partial w_z}{\partial t} = \frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad b_x = \frac{\sqrt{2}}{\delta} Hl - ik_x\varphi, \quad b_y = -ik_y\varphi, \quad b_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}; \tag{3.5}$$

$$z = 0: q + \rho_2\left(\frac{\partial P}{\partial t} - i\mathbf{ku}P\right) = \eta\left\{g(\rho_1 - \rho_2) - \frac{H^2}{8\pi\delta}\left[1 + \sqrt{2}\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{4}\right)\right] - \alpha k^2\right\}; \tag{3.6}$$

$$z \to +\infty: \frac{\partial w_z}{\partial t} \to 0, \quad \mathbf{B} \to 0; \quad z \to -\infty: \Phi \to 0; \tag{3.7}$$

$$t = 0: \eta = 0, \quad \frac{d\eta}{dt} = V. \tag{3.8}$$

Выписав решения краевых задач (3.2), (3.3), (3.5), (3.7)

$$B_x = \frac{\sqrt{2}}{\delta} H (Me^{-\zeta kz} - \beta^2 N), \quad B_y = -\frac{\sqrt{2}\beta\gamma}{\delta} HN,$$

$$B_z = -\frac{i\sqrt{2}\beta}{\delta} HN, \quad \Phi = -\frac{i\sqrt{2}\beta}{k\delta}\frac{e^{kz}}{\zeta+1} HM,$$

$$N = \frac{e^{-\zeta kz}}{\zeta+1} M, \quad \zeta = \sqrt{\frac{s}{m}+1}, \quad \beta = \frac{k_x}{k}, \quad \gamma = \frac{k_y}{k}$$

и совершив обратное преобразование Лапласа, находим

$$b_x = \frac{\sqrt{2}}{\delta} H\left\{\int_0^t e^{-m\tau}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{kz}{2\sqrt{m\tau}}\right)\left[\frac{dl(t-\tau)}{dt} + ml(t-\tau)\right]d\tau - \beta^2\chi(z, t)\right\}, \quad b_y = -\frac{\sqrt{2}\beta\gamma}{\delta} H\chi(z, t), \tag{3.9}$$

$$b_z = -\frac{i\sqrt{2}\beta}{\delta} H\chi(z, t), \quad \varphi = -\frac{i\sqrt{2}\beta}{k\delta} H\chi(0, t)\, e^{kz},$$

$$\chi(z, t) = \int_0^t l(t-\tau)\left\{\sqrt{\frac{m}{\pi\tau}}\exp\left[-m\tau - \frac{(kz)^2}{4m\tau}\right] + me^{kz}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{kz + 2m\tau}{2\sqrt{m\tau}}\right)\right\}d\tau, \quad \mathrm{Erf}\, z = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-x^2}dx.$$

Принимая во внимание (3.9), можно записать решение краевой задачи (3.1), (3.5), (3.7) относительно $\partial w_z/\partial t$ и вычислить производную $\partial^2 w_z/\partial t \partial z$. Подставив далее (3.4) в динамическое условие на поверхности раздела (3.6), получим уравнение, описывающее развитие фурье-компонент возмущения поверхности раздела. Вводя безразмерные переменные $t_* = \omega t$, $\tau_* = \omega\tau$, имеем (звездочки опущены)

$$
(3.10) \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} - 2i\varepsilon_1 \frac{d\eta}{dt} + \left[\varepsilon_0 + \varepsilon_2 \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\right]\eta = \varepsilon_3 \int\limits_0^t K(t, \tau)\,\eta(t - \tau)\,d\tau,
$$

$$
K(t, \tau) = \left(\frac{e^{-\varkappa\tau}}{\sqrt{\pi\varkappa\tau}} - \operatorname{Erf}\sqrt{\varkappa\tau}\right)[\cos(2t - \tau) - \sin\tau],
$$

$$
\varepsilon_0 = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2, \quad \varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2\varkappa}}{\delta}\frac{\lambda r_2}{\omega}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\varkappa}\,\Gamma, \quad \varepsilon_3 = \varkappa\Gamma, \quad r_j = \frac{\rho_j}{\rho_1 + \rho_2}, \quad j = 1, 2,
$$

$$
\Omega^2 = g(r_2 - r_1)\frac{\sqrt{2\varkappa}}{\delta} + \omega^2\Gamma\sqrt{\frac{\varkappa}{2}} - 2\varkappa r_2\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2\varkappa}}{\delta}\right)^3\frac{\alpha}{\rho_1 + \rho_2},
$$

$$
\varkappa = \frac{(k\delta)^2}{2}, \quad \lambda = \beta u_x + \gamma u_y, \quad \Gamma = \frac{1}{4\pi(\rho_1 + \rho_2)}\left(\frac{\beta H}{\omega\delta}\right)^2.
$$

При переходе к переменной t_* начальные условия (3.8) преобразуются очевидным образом. Обозначим $\varepsilon = \max(|\sqrt{\varepsilon_0}|, \varepsilon_j)$, $c_j = \varepsilon_j/\varepsilon$, $j = 1, 2, 3$, $c_0 = \varepsilon_0/\varepsilon$. Перепишем задачу (3.10), (3.8) в виде

$$
(3.11) \quad \frac{d\eta}{dt} = \sqrt{\varepsilon}\,\vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\varepsilon}\left\{2i\sqrt{\varepsilon}\,c_1\vartheta - \left[c_0 + c_2\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\right]\eta + \right.
$$

$$
\left. + c_3\int\limits_0^t K(t, \tau)\,\eta(t - \tau)\,d\tau\right\}; \quad t = 0: \eta = 0, \quad \vartheta = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}V.
$$

Уравнение (3.10) получено в предположении $|\sqrt{\varepsilon_0}| \ll 1$. Считая также $\sqrt{\varepsilon} \ll 1$ и усредняя (3.11) по второй схеме, предложенной в [4], получим задачу Коши для системы из двух дифференциальных уравнений. Переходя в усредненной задаче к одному уравнению второго порядка, имеем

$$
\frac{d^2\mu}{dt^2} - 2i\varepsilon_1\frac{d\mu}{dt} + \left[\varepsilon_0 + \Gamma\frac{\sqrt{\varkappa}}{2}(1 + \Lambda)\right]\mu = 0; \quad t = 0: \mu = 0, \quad \frac{d\mu}{dt} = \omega V,
$$

$$
\Lambda(\varkappa) = \left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2 + 1}} - \frac{\varkappa}{\varkappa^2 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} + \varkappa\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2 + 1}} + \frac{\varkappa}{\varkappa^2 + 1}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2\varkappa}.
$$

Отсюда следует, что при заданных параметрах невозмущенного течения устойчивы те гармоники $\eta(k_x, k_y, t)$, для которых выполняется условие

$$
(3.12) \quad (\beta u_x + \gamma u_y)^2 < \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1\rho_2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\varkappa}}\left[g\delta(\rho_2 - \rho_1) + \frac{\beta^2}{8\pi}H^2(1 + \Lambda)\right] + \frac{\alpha}{\delta}\sqrt{2\varkappa}\right\}.
$$

На положительной полуоси функция $\Lambda(\varkappa) > 0$, так что при $k_x \neq 0$ переменное магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние, причем поле, как и сила тяжести, стабилизирует лишь длинноволновую часть спектра. В том случае, когда скачок скорости $\mathbf{u} = (u_x, 0, 0)$ параллелен силовым линиям невозмущенного поля, из (3.12) можно получить достаточное условие устойчивости при $\Omega/\omega \ll 1$

$$
u^4 < 4\alpha\left[g(\rho_2 - \rho_1) + \frac{H^2}{8\pi\delta}\right]\left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1\rho_2}\right)^2.
$$

4. Рассмотрим предельный случай, когда толщина скин-слоя и амплитуда волны (малая по сравнению с ее длиной) имеют одинаковый порядок. В такой ситуации возмущение магнитного поля, вызываемое ис-

кривлением поверхности раздела, по порядку величины сравнимо с невозмущенным полем, вследствие чего линеаризованное уравнение индукции (1.2) неприменимо. Рассматриваемая задача тем не менее упрощается, поскольку с принятой степенью точности скин-слой можно заменить поверхностью разрыва касательной составляющей магнитного поля, на которой локализована поверхностная пондеромоторная сила [5]. В таком приближении распределения поля и давления в невозмущенном состоянии описываются выражениями

$$\mathbf{H}_1^0 = 0, \quad p_1^0 = -\rho_1 g z + \frac{H^2}{8\pi}\cos^2\omega t,$$

$$\mathbf{H}_2^0 = (H\cos\omega t,\, 0, 0), \quad p_2^0 = -\rho_2 g z.$$

В задаче (1.1)—(1.7) в этом случае следует положить $\mathbf{h}_1 = 0$, а вместо условий (1.5), полученных в рамках предположения о непрерывности поля на поверхности раздела, для потенциала θ необходимо сформулировать условие, выражающее непрерывность только нормальной составляющей поля, и, кроме того, учесть в динамическом условии (1.4) возмущение поверхностной пондеромоторной силы

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = H\frac{\partial\xi}{\partial x}\cos\omega t,$$

$$p_1 - p_2 = \xi g(\rho_1 - \rho_2) + \frac{H}{4\pi}\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\omega t + \alpha\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right).$$

С учетом этих изменений в формулировке задачи (1.1)—(1.7) уравнение для $\eta(k_x,\, k_y,\, t)$ принимает вид

$$(\rho_1 + \rho_2)\frac{d^2\eta}{dt^2} - 2i\rho_2\mathbf{ku}\frac{d\eta}{dt} + \Big[gk(\rho_2 - \rho_1) - \rho_2(\mathbf{ku})^2 +$$

$$+ \alpha k^3 + \frac{1}{8\pi}(k_x H)^2(1 + \cos 2\omega t)\Big]\eta = 0.$$

Это уравнение легко привести к стандартному виду уравнения Матьё. Диаграмма устойчивости решений уравнения Матьё [6] подтверждает сделанный при $\Omega/\omega \ll 1$ качественный вывод о влиянии поля на развитие гармоник. В общем случае, когда отношение Ω/ω не является малым, из диаграммы устойчивости следует, что при $k_x \neq 0$ любую гармонику, неустойчивую без поля, можно стабилизировать выбором амплитуды H. При этом влияние поля имеет двоякий характер: стабилизируя некоторые области спектра, оно вместе с тем вызывает параметрическую неустойчивость гармоник, соответствующих другим областям спектра.

Поступила 21 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Drazin P. G.** Stability of parallel flow in an oscillating magnetic field.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1967, vol. 20, pt 2.
2. **Garnier M.** Rôle dêstabilisant d'un champ magnêtique alternatif appliqué au voisinage d'une interface.— C. r. acad. sci. Paris, 1977, Sér. B, t. 284, p. 365.
3. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Oxford Univ. Press, 1961.
4. **Филатов А. Н.** Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях. Ташкент: Фан, 1971.
5. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976.
6. **Чезари Л.** Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.