ПМТФ, № 1, 1972

УДК 533.95

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ В СИСТЕМАХ С ПЛОТНОЙ ПЛАЗМОЙ, УДЕРЖИВАЕМОЙ СТЕНКАМИ

А. Г. Олейник

(Новосибирск)

Рассматриваются нестационарные течения плотной замагниченной плазмы с $\beta \gg 1$, в которой возможны энерговыделение и потери тепла теплопроводностью и излучением. Решения находятся в двух предельных случаях: $|f| \gg |\operatorname{div}(\eta\nabla T)|$ и $|f| \ll |\operatorname{div}(\eta\nabla T)|$ (f — интенсивность излучения, η — коэффициент теплопроводности, T — температура). В первом случае получено решение некоторых задач об охлаждении и нагревании плазмы, иллюстрирующее, в частности, эволюцию во времени температурного профиля в пристеночном слое. Во втором случае найдено автомодельное решение при произвольной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры, давления и магнитного поля.

1. Основные уравнения. Ниже рассматриваются одномерные нестационарные течения жидкости (плазмы), описываемые в общем случае следующей системой уравнений [1,2]:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Hv)=0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\gamma p}{(\gamma-1)T}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial T}{\partial x}\right)-f+g \tag{1.4}$$

$$p=R\rho T \tag{1.5}$$

Здесь $p(x, t)$, $\rho(x, t)$, $T(x, t)$, $v(x, t)$, $H(x, t)$, x, t — соответственно давление, плотность, температура, скорость, магнитное поле, координата и время; γ — показатель адиабаты; R — газовая постоянная; $\eta(T, p, H)$ — коэффициент теплопроводности, $f(p, T)$ и $g(p, T, x)$ — интенсивности излучения и выделения энергии. Предполагается, что магнитное поле, перпендикулярное x, вморожено в плазму. В точке $x = 0$ плазма находится в контакте с граничной стенкой (плоскостью), где выполняются условия

$$x=0,\quad v=0,\quad T=T_0 \tag{1.6}$$

Система уравнений (1.1) — (1.5) описывает процессы нагревания и охлаждения в условиях термоядерного реактора с плотной плазмой, удерживаемой стенками [1]. Характерной особенностью этих процессов является их медленность по сравнению со временем циркуляции звуковых волн. Например, время прохождения звуковой волны поперек плазменного столба с $T = 10^8$ °K диаметром 100 *см* будет порядка 10^{-6} *сек*, тогда как характерное время нагрева плазмы — порядка 10^{-4}—10^{-3} *сек*, а время остывания — порядка нескольких десятков микросекунд. Ввиду этого можно считать, что давление вдоль оси x успевает выравниваться

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) = 0 \tag{1.7}$$

Далее в системах с удержанием плазмы стенками магнитное давление обычно мало по сравнению с газокинетическим

$$p \gg H^2 / (8\pi) \tag{1.8}$$

и магнитное поле влияет только на теплопроводность.

Так как в общем случае получить аналитические решения системы (1.1) — (1.5) не удается, ниже будут рассматриваться два предельных случая: когда теплопроводность мала и доминируют процессы излучения и энерговыделения

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial T}{\partial x}\right)\right| \ll |f - g| \tag{1.9}$$

и наоборот, когда преобладает роль теплопроводности

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial T}{\partial x}\right)\right| \gg |f - g| \tag{1.10}$$

2. Случай доминирующей роли излучения и энерговыделения. Опуская в соответствии с условием (1.9) член с теплопроводностью в (1.4) и согласно (1.8) член с магнитным давлением в (1.7) (заменяющем (1.1)), видим, что магнитное поле теперь вообще не влияет на динамику процесса. С учетом (1.5) и (1.7) уравнения (1.2) и (1.4) запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{T}\right) + p\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{T}\right) = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\gamma}{(\gamma - 1)}\frac{p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial p}{\partial t} = -f + g \tag{2.2}$$

В данном случае их целесообразно записать в лагранжевых координатах. Независимыми переменными будут t и $a \equiv \xi\ (t = 0)$, а искомыми величинами — $T\ (a,\ t)$, $p\ (a,\ t)$, $\xi\ (a,\ t)$, где ξ — координаты лагранжевых точек. Уравнения (1.7), (2.1) и (2.2) перепишутся в виде

$$\frac{\partial p}{\partial a} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} - \frac{T(a,t)}{T_0(a)}\frac{p_0}{p(t)} = 0; \quad T_0(a) = T(a, t = 0), \quad p_0 = p(t = 0) \tag{2.4}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{T}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{dp}{dt} + f - g = 0 \tag{2.5}$$

Уравнения (2.3) — (2.5) удобны для решения, когда f и g — функции p и T и не зависят от ξ, a и t. Этот случай имеет место в задачах о нестационарном протекании термоядерной реакции (после нагрева) и об охлаждении плазмы излучением. Особенно просто находится решение, когда давление не меняется во времени: $p = p_0 = \mathrm{const}$. Этот случай представляет интерес для задачи об охлаждении плазмы, так как ввиду сильной зависимости скорости реакции от температуры значительное уменьшение энерговыделения может происходить уже при небольшом снижении $T_{\max}$, а следовательно, и p.

Если $p = \mathrm{const}$, уравнение (2.5) непосредственно интегрируется

$$t = F(T(a, t)) - F(T_0(a, t)), \quad F(t) = -\frac{\gamma p_0}{\gamma - 1}\int \frac{dT}{T(f - g)} \tag{2.6}$$

Подставляя найденное отсюда $T(a, t)$ в (2.4) и интегрируя его, найдем $\xi(a, t)$.

Рассмотрим случай, когда $g = 0$, $f = bT^{-1}$ и задача решается аналитически до конца. Из (2.6), (2.7) тогда найдем

$$T = -\frac{(\gamma - 1)}{\gamma}\frac{b}{p_0}t + T_0(a) \tag{2.7}$$

Возьмем начальный профиль в виде $T_0(a) = k\sqrt{a}$. Из (2.4) (2.7) тогда получим

$$\xi = a - 2\lambda t\sqrt{a}, \qquad \lambda = \frac{(\gamma - 1)b}{\gamma k p_0} \tag{2.8}$$

Выражая a через ξ и t и подставляя в (2.7), получим, возвращаясь к эйлеровым координатам ($\xi \equiv x$)

$$T(x, t) = k(x + 2\lambda^2t^2 + 2\lambda t\sqrt{\lambda^2t^2 + x})^{1/2} - \lambda kt \tag{2.9}$$

В силу (2.10) это выражение справедливо при

$$0 \leqslant x \leqslant l - 2\lambda t\sqrt{l}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{l}}{2\lambda}$$

где l — толщина слоя плазмы в начальный момент.

Из (2.9), в частности, видно, как меняется со временем крутизна профиля $T(x, t)$. Можно показать, что $\partial T / \partial x$ в данном случае возрастет не более чем в 2 раза, вопреки высказываемому иногда мнению, что высвечивание плазмы, удерживаемой стенками, приводит к значительному увеличению крутизны фронта.

В некоторых случаях можно получить решение системы (2.3) — (2.5), не делая предположения $p = \text{const}$. Рассмотрим случай $g = 0$, $f = bp^2T^{-3/2}$ (тормозное излучение). Уравнение (2.5) запишем в виде

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -b\left(\frac{dy}{dt}\right)^{-1}(ry - sz)$$

$$y = \ln p, \quad z = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\ln T - \ln p, \quad r = \frac{3 - \gamma}{2\gamma}, \quad s = \frac{3(\gamma - 1)}{2\gamma}$$

Интегрируя это выражение и возвращаясь к прежним обозначениям, получим

$$T^{3/2} = sp^s\left\{-b\int_0^t p^{-r}dt + \varphi(a)\right\} \tag{2.10}$$

$$\varphi(a) = T_0^{3/2}(a)(sp^s)^{-1}$$

С другой стороны, давление плазмы пропорционально ее внутренней энергии, поэтому

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{(\gamma - 1)}{l}\int_0^l f dx = -\frac{(\gamma - 1)bp_0p}{l}\int_0^l \frac{T^{-1/2}(a, t)}{T_0(a)}da \tag{2.11}$$

Обозначим

$$\zeta = \int_0^t p^{-r}dt, \qquad p = \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^{-1/r} \tag{2.12}$$

Подставляя эти выражения в (2.10) и затем T (ζ) и p (ζ) в (2.11), найдем дифференциальное уравнение для определения ζ (t)

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -A\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^{1-s/3r} F(\zeta) \tag{2.13}$$

$$A = (\gamma - 1)\, rs^{-1/3} bp_0 / l, \quad F(\zeta) = \int\limits_0^l \frac{(\varphi(a) - b\zeta)^{-1/3}}{T_0(a)}$$

Интегрируя (2.13), получим

$$t = \int \frac{d\zeta}{\left[-2A(3-\gamma)^{-1}\left(\int F(\zeta)\, d\zeta + C_1\right)\right]^{1/2(3-\gamma)}} + C_2 \tag{2.14}$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования. Выражения (2.10), (2.12) и (2.14) дают решение поставленной задачи.

В тех случаях, когда $g \neq 0$ и зависит от x (например, при нагревании плазмы внешними источниками тепла), решение (2.3) — (2.5) существенно усложняется. Упрощающим обстоятельством является, однако, то, что в практически интересных случаях зависимость g (x) весьма проста. Например

$$g = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < x_2 = l_0 - l_1 \\ g_0, & x_2 \leqslant x \leqslant x_3 \equiv l_0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Здесь l_0 — полуширина слоя плазмы с плоскостью симметрии в точке x_1; l_1 — полуширина зоны нагрева.

В различных областях изменения x можно найти решения подобно тому, как это делалось выше, и затем их сшить.

Приведем решение самой простой задачи подобного рода — о нагреве и расширении газа, когда g (x) имеет вид (2.15), а излучение отсутствует ($f = 0$). В этом случае будут иметь место решения трех разных типов соответственно для частиц плазмы, все время находящихся в зоне нагрева; для частиц, сначала находящихся в этой зоне, а затем выходящих из нее, и для частиц вне зоны нагрева. Обращаясь к нахождению решений первого типа, выразим, принимая во внимание (2.15), g через dp/dt из (2.11) (где вместо f надо теперь поставить g) и подставим в (2.5). Получим

$$\frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{(\gamma-1)\, l_1 + l_0}{(\gamma-1)\, l_0} \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$$

Отсюда

$$T = T_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{(\gamma-1)\, l_1 + l_0}{(\gamma-1)\, l_0} \tag{2.16}$$

Это решение справедливо в области $l_0 - l_1 \leqslant x \leqslant l_0$. В следующем случае частицы плазмы, пока они находятся внутри зоны нагрева, нагреваются по закону (2.16) до некоторой температуры $T_1 = T_0\,(p_1/p_0)^{\alpha}$, а затем от T_1 до T по адиабатическому закону $T = T_1\,(p/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}$. Следовательно

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\alpha-(1-\gamma)/\gamma} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha} \tag{2.17}$$

Если частицы с температурой T находятся в точке x, то

$$\frac{l_0 - x}{l_0 - l_1} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/\gamma}$$

Выражая отсюда p_1/p через x и подставляя в (2.17), получим решение второго типа

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha} \left(\frac{l_0 - x}{l_0 - l_1}\right)^{\alpha\gamma+1-\gamma}$$

Область его применимости

$$x_3 \leqslant x \leqslant l_0 - l_1, \qquad x_3 = l_0 - (l_0 - l_1)(p/p_0)^{-1/\gamma}$$

Наконец, решение третьего типа имеет вид

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

и справедливо при $0 \leqslant x < x_3$.

3. Случай доминирующей роли теплопроводности. Если выполняется условие (1.10), то в ряде задач удается найти автомодельные решения системы (1.1) — (1.5). Рассмотрим одну такую задачу. Допустим, что выполнено условие (1.7) и одновременно

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) = 0, \qquad p + \frac{H^2}{8\pi} = p_0 = \text{const} \tag{3.1}$$

Предполагается, что условие (1.8) не выполнено, это в условиях рассматриваемой задачи (удержание стенками) физически возможно, когда плазма с вмороженным полем перемещается к стенке и там охлаждается. Уравнение (1.4) в данном случае будет иметь вид

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{3.2}$$

а уравнение (1.2) возьмем в виде (2.1). В целом процесс описывается уравнениями (3.1), (3.2), (2.1) и (1.3) с граничным условием (1.6).

Предполагая, что температура выражается в энергетических единицах (эргах), введем размерные величины T_0, p_0, H_0, $S = T_0\eta(T_0, p_0, H_0)/p_0$ и образуем безразмерные параметры

$$\tau = \frac{x}{\sqrt{St}}, \quad \theta = \frac{T}{T_0}, \quad \sigma = \frac{p}{p_0}, \quad h = \frac{H}{\sqrt{8\pi p_0}}, \quad u = \frac{tv}{x}, \quad \varkappa = \frac{\eta(T, p, H)}{\eta_0(T_0, p_0, H_0)}$$

Уравнения (3.1), (3.2), (2.1) и (1.3) тогда запишутся в виде

$$\sigma + h^2 = 1 \tag{3.3}$$

$$\tau\left(u - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\sigma}{\theta}\frac{d\theta}{d\tau} - \frac{d\sigma}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\varkappa\frac{d\theta}{\partial\tau}\right) \tag{3.4}$$

$$\tau\left(u - \frac{1}{2}\right)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sigma}{\theta}\right) + \frac{\sigma}{\theta}\frac{d}{d\tau}(\tau u) = 0 \tag{3.5}$$

$$\tau\left(u - \frac{1}{2}\right)\frac{dh}{d\tau} + h\frac{d}{d\tau}(\tau u) = 0 \tag{3.6}$$

Таким образом, задача сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующее решение автомодельно. Подчеркнем, что автомодельность сохраняется при любой зависимости η от T, p и H, что оказывается возможным благодаря указанному выше виду параметров θ, δ и h (в них не вошли величины x и t) [1].

Из (3.5), (3.6) и (3.3) находим

$$h = C\frac{\sigma}{\theta}, \quad \theta = \frac{C\sigma}{\sqrt{1-\sigma}}$$

где C — произвольная константа.

---

[1] Автомодельные решения уравнения теплопроводности при произвольной зависимости $\varkappa(T)$ были указаны Н. А. Дмитриевым [3]