ПМТФ, № 1, 1972

УДК 533.95

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ В СИСТЕМАХ С ПЛОТНОЙ ПЛАЗМОЙ, УДЕРЖИВАЕМОЙ СТЕНКАМИ

А. Г. Олейник

(Новосибирск)

Рассматриваются нестационарные течения плотной замагниченной плазмы с $\beta \gg 1$, в которой возможны энерговыделение и потери тепла теплопроводностью и излучением. Решения находятся в двух предельных случаях: $|f| \gg |\operatorname{div}(\eta\nabla T)|$ и $|f| \ll |\operatorname{div}(\eta\nabla T)|$ (f — интенсивность излучения, η — коэффициент теплопроводности, T — температура). В первом случае получено решение некоторых задач об охлаждении и нагревании плазмы, иллюстрирующее, в частности, эволюцию во времени температурного профиля в пристеночном слое. Во втором случае найдено автомодельное решение при произвольной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры, давления и магнитного поля.

1. Основные уравнения. Ниже рассматриваются одномерные нестационарные течения жидкости (плазмы), описываемые в общем случае следующей системой уравнений [1,2]:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Hv)=0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\gamma p}{(\gamma-1)T}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial T}{\partial x}\right)-f+g \tag{1.4}$$

$$p=R\rho T \tag{1.5}$$

Здесь $p(x, t)$, $\rho(x, t)$, $T(x, t)$, $v(x, t)$, $H(x, t)$, x, t — соответственно давление, плотность, температура, скорость, магнитное поле, координата и время; γ — показатель адиабаты; R — газовая постоянная; $\eta(T, p, H)$ — коэффициент теплопроводности, $f(p, T)$ и $g(p, T, x)$ — интенсивности излучения и выделения энергии. Предполагается, что магнитное поле, перпендикулярное x, вморожено в плазму. В точке $x=0$ плазма находится в контакте с граничной стенкой (плоскостью), где выполняются условия

$$x=0, \quad v=0, \quad T=T_0 \tag{1.6}$$

Система уравнений (1.1) — (1.5) описывает процессы нагревания и охлаждения в условиях термоядерного реактора с плотной плазмой, удерживаемой стенками [1]. Характерной особенностью этих процессов является их медленность по сравнению со временем циркуляции звуковых волн. Например, время прохождения звуковой волны поперек плазменного столба с $T=10^8\,°\mathrm{K}$ диаметром 100 *см* будет порядка 10^{-6} *сек*, тогда как характерное время нагрева плазмы — порядка 10^{-4}—10^{-3} *сек*, а время остывания — порядка нескольких десятков микросекунд. Ввиду этого можно считать, что давление вдоль оси x успевает выравниваться

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\frac{H^2}{8\pi}\right)=0 \tag{1.7}$$

Далее в системах с удержанием плазмы стенками магнитное давление обычно мало по сравнению с газокинетическим

$$p \gg H^2 / (8\pi) \tag{1.8}$$

и магнитное поле влияет только на теплопроводность.

Так как в общем случае получить аналитические решения системы (1.1) — (1.5) не удается, ниже будут рассматриваться два предельных случая: когда теплопроводность мала и доминируют процессы излучения и энерговыделения

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right| \ll |f-g| \tag{1.9}$$

и наоборот, когда преобладает роль теплопроводности

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right| \gg |f-g| \tag{1.10}$$

2. Случай доминирующей роли излучения и энерговыделения. Опуская в соответствии с условием (1.9) член с теплопроводностью в (1.4) и согласно (1.8) член с магнитным давлением в (1.7) (заменяющем (1.1)), видим, что магнитное поле теперь вообще не влияет на динамику процесса. С учетом (1.5) и (1.7) уравнения (1.2) и (1.4) запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{T}\right)+p\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{T}\right)=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\gamma}{(\gamma-1)}\frac{p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{\partial p}{\partial t}=-f+g \tag{2.2}$$

В данном случае их целесообразно записать в лагранжевых координатах. Независимыми переменными будут t и $a\equiv\xi$ $(t=0)$, а искомыми величинами — $T(a, t)$, $p(a, t)$, $\xi(a, t)$, где ξ — координаты лагранжевых точек. Уравнения (1.7), (2.1) и (2.2) перепишутся в виде

$$\frac{\partial p}{\partial a}=0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial a}-\frac{T(a,t)}{T_0(a)}\frac{p_0}{p(t)}=0;\quad T_0(a)=T(a,t=0),\quad p_0=p(t=0) \tag{2.4}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{T}\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{dp}{\partial t}+f-g=0 \tag{2.5}$$

Уравнения (2.3) — (2.5) удобны для решения, когда f и g — функции p и T и не зависят от ξ, a и t. Этот случай имеет место в задачах о нестационарном протекании термоядерной реакции (после нагрева) и об охлаждении плазмы излучением. Особенно просто находится решение, когда давление не меняется во времени: $p=p_0=\mathrm{const}$. Этот случай представляет интерес для задачи об охлаждении плазмы, так как ввиду сильной зависимости скорости реакции от температуры значительное уменьшение энерговыделения может происходить уже при небольшом снижении $T_{\max}$, а следовательно, и p.

Если $p=\mathrm{const}$, уравнение (2.5) непосредственно интегрируется

$$t=F(T(a,t))-F(T_0(a,t)),\quad F(t)=-\frac{\gamma p_0}{\gamma-1}\int\frac{dT}{T(f-g)} \tag{2.6}$$

Подставляя найденное отсюда $T(a, t)$ в (2.4) и интегрируя его, найдем $\xi(a, t)$.

Рассмотрим случай, когда $g = 0$, $f = bT^{-1}$ и задача решается аналитически до конца. Из (2.6), (2.7) тогда найдем

$$T = -\frac{(\gamma - 1)}{\gamma}\frac{b}{p_0}t + T_0(a) \qquad (2.7)$$

Возьмем начальный профиль в виде $T_0(a) = k\sqrt{a}$. Из (2.4) (2.7) тогда получим

$$\xi = a - 2\lambda t\sqrt{a}, \qquad \lambda = \frac{(\gamma - 1)b}{\gamma k p_0} \qquad (2.8)$$

Выражая a через ξ и t и подставляя в (2.7), получим, возвращаясь к эйлеровым координатам ($\xi \equiv x$)

$$T(x, t) = k(x + 2\lambda^2 t^2 + 2\lambda t\sqrt{\lambda^2 t^2 + x})^{1/2} - \lambda k t \qquad (2.9)$$

В силу (2.10) это выражение справедливо при

$$0 \leqslant x \leqslant l - 2\lambda t\sqrt{l}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\sqrt{l}}{2\lambda}$$

где l — толщина слоя плазмы в начальный момент.

Из (2.9), в частности, видно, как меняется со временем крутизна профиля $T(x, t)$. Можно показать, что $\partial T / \partial x$ в данном случае возрастет не более чем в 2 раза, вопреки высказываемому иногда мнению, что высвечивание плазмы, удерживаемой стенками, приводит к значительному увеличению крутизны фронта.

В некоторых случаях можно получить решение системы (2.3) — (2.5), не делая предположения $p = \text{const}$. Рассмотрим случай $g = 0$, $f = bp^2T^{-3/2}$ (тормозное излучение). Уравнение (2.5) запишем в виде

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -b\left(\frac{dy}{dt}\right)^{-1}(ry - sz)$$

$$y = \ln p, \quad z = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\ln T - \ln p, \quad r = \frac{3 - \gamma}{2\gamma}, \quad s = \frac{3(\gamma - 1)}{2\gamma}$$

Интегрируя это выражение и возвращаясь к прежним обозначениям, получим

$$T^{3/2} = sp^s\left\{-b\int_0^t p^{-r}dt + \varphi(a)\right\} \qquad (2.10)$$

$$\varphi(a) = T_0^{3/2}(a)(sp^s)^{-1}$$

С другой стороны, давление плазмы пропорционально ее внутренней энергии, поэтому

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{(\gamma - 1)}{l}\int_0^l f dx = -\frac{(\gamma - 1)bp_0 p}{l}\int_0^l \frac{T^{-1/2}(a, t)}{T_0(a)}da \qquad (2.11)$$

Обозначим

$$\zeta = \int_0^t p^{-r}dt, \qquad p = \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^{-1/r} \qquad (2.12)$$

Подставляя эти выражения в (2.10) и затем T (ζ) и p (ζ) в (2.11), найдем дифференциальное уравнение для определения ζ (t)

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -A\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^{1-s/3r} F(\zeta) \tag{2.13}$$

$$A = (\gamma - 1)\, r s^{-1/3} b p_0 / l, \quad F(\zeta) = \int_0^l \frac{(\varphi(a) - b\zeta)^{-1/3}}{T_0(a)}$$

Интегрируя (2.13), получим

$$t = \int \frac{d\zeta}{\left[-2A(3-\gamma)^{-1}\left(\int F(\zeta)\, d\zeta + C_1\right)\right]^{1/2(3-\gamma)}} + C_2 \tag{2.14}$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования. Выражения (2.10), (2.12) и (2.14) дают решение поставленной задачи.

В тех случаях, когда $g \neq 0$ и зависит от x (например, при нагревании плазмы внешними источниками тепла), решение (2.3) — (2.5) существенно усложняется. Упрощающим обстоятельством является, однако, то, что в практически интересных случаях зависимость g (x) весьма проста. Например

$$g = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < x_2 = l_0 - l_1 \\ g_0, & x_2 \leqslant x \leqslant x_3 \equiv l_0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Здесь l_0 — полуширина слоя плазмы с плоскостью симметрии в точке x_1; l_1 — полуширина зоны нагрева.

В различных областях изменения x можно найти решения подобно тому, как это делалось выше, и затем их сшить.

Приведем решение самой простой задачи подобного рода — о нагреве и расширении газа, когда g (x) имеет вид (2.15), а излучение отсутствует ($f = 0$). В этом случае будут иметь место решения трех разных типов соответственно для частиц плазмы, все время находящихся в зоне нагрева; для частиц, сначала находящихся в этой зоне, а затем выходящих из нее, и для частиц вне зоны нагрева. Обращаясь к нахождению решений первого типа, выразим, принимая во внимание (2.15), g через dp/dt из (2.11) (где вместо f надо теперь поставить g) и подставим в (2.5). Получим

$$\frac{\gamma}{(\gamma-1)} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{(\gamma-1)\, l_1 + l_0}{(\gamma-1)\, l_0} \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}$$

Отсюда

$$T = T_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{(\gamma-1)\, l_1 + l_0}{(\gamma-1)\, l_0} \tag{2.16}$$

Это решение справедливо в области $l_0 - l_1 \leqslant x \leqslant l_0$. В следующем случае частицы плазмы, пока они находятся внутри зоны нагрева, нагреваются по закону (2.16) до некоторой температуры $T_1 = T_0\, (p_1/p_0)^{\alpha}$, а затем от T_1 до T по адиабатическому закону $T = T_1\, (p/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}$. Следовательно

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\alpha-(1-\gamma)/\gamma} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha} \tag{2.17}$$

Если частицы с температурой T находятся в точке x, то

$$\frac{l_0 - x}{l_0 - l_1} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/\gamma}$$

Выражая отсюда p_1/p через x и подставляя в (2.17), получим решение второго типа

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\alpha} \left(\frac{l_0 - x}{l_0 - l_1}\right)^{\alpha\gamma+1-\gamma}$$

Область его применимости

$$x_3 \leqslant x \leqslant l_0 - l_1, \qquad x_3 = l_0 - (l_0 - l_1)(p/p_0)^{-1/\gamma}$$

Наконец, решение третьего типа имеет вид

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

и справедливо при $0 \leqslant x < x_3$.

3. Случай доминирующей роли теплопроводности. Если выполняется условие (1.10), то в ряде задач удается найти автомодельные решения системы (1.1) — (1.5). Рассмотрим одну такую задачу. Допустим, что выполнено условие (1.7) и одновременно

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) = 0, \qquad p + \frac{H^2}{8\pi} = p_0 = \text{const} \tag{3.1}$$

Предполагается, что условие (1.8) не выполнено, это в условиях рассматриваемой задачи (удержание стенками) физически возможно, когда плазма с вмороженным полем перемещается к стенке и там охлаждается. Уравнение (1.4) в данном случае будет иметь вид

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{3.2}$$

а уравнение (1.2) возьмем в виде (2.1). В целом процесс описывается уравнениями (3.1), (3.2), (2.1) и (1.3) с граничным условием (1.6).

Предполагая, что температура выражается в энергетических единицах (эргах), введем размерные величины T_0, p_0, H_0, $S = T_0\eta\,(T_0, p_0, H_0)\,/\,p_0$ и образуем безразмерные параметры

$$\tau = \frac{x}{\sqrt{St}}, \quad \theta = \frac{T}{T_0}, \quad \sigma = \frac{p}{p_0}, \quad h = \frac{H}{\sqrt{8\pi p_0}}, \quad u = \frac{tv}{x}, \quad \varkappa = \frac{\eta\,(T, p, H)}{\eta_0\,(T_0, p_0, H_0)}$$

Уравнения (3.1), (3.2), (2.1) и (1.3) тогда запишутся в виде

$$\sigma + h^2 = 1 \tag{3.3}$$

$$\tau\left(u - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\sigma}{\theta}\frac{d\theta}{d\tau} - \frac{d\sigma}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\varkappa\frac{d\theta}{\partial\tau}\right) \tag{3.4}$$

$$\tau\left(u - \frac{1}{2}\right)\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sigma}{\theta}\right) + \frac{\sigma}{\theta}\frac{d}{d\tau}(\tau u) = 0 \tag{3.5}$$

$$\tau\left(u - \frac{1}{2}\right)\frac{dh}{d\tau} + h\frac{d}{d\tau}(\tau u) = 0 \tag{3.6}$$

Таким образом, задача сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующее решение автомодельно. Подчеркнем, что автомодельность сохраняется при любой зависимости η от T, p и H, что оказывается возможным благодаря указанному выше виду параметров θ, δ и h (в них не вошли величины x и t)[1].

Из (3.5), (3.6) и (3.3) находим

$$h = C\frac{\sigma}{\theta}, \quad \theta = \frac{C\sigma}{\sqrt{1-\sigma}}$$

где C — произвольная константа.

---

[1] Автомодельные решения уравнения теплопроводности при произвольной зависимости $\varkappa\,(T)$ были указаны Н. А. Дмитриевым [3]

Уравнения (3.4) и (3.5) теперь запишутся так:

$$\tau\left(u-\frac{1}{2}\right)\frac{d\sigma}{d\tau}-\frac{C(\gamma-1)(1-\sigma)}{\gamma\sigma+2(1-\sigma)}\frac{d}{d\tau}\left[\varkappa(2-\sigma)(1-\sigma)^{-3/2}\frac{d\sigma}{d\tau}\right]=0 \quad (3.7)$$

$$\tau\left(u-\frac{1}{2}\right)\frac{d\sigma}{d\tau}-2(1-\sigma)\frac{d}{d\tau}(u\tau)=0 \quad (3.8)$$

Найдем решение вблизи $\tau=0$, пытаясь удовлетворить краевому условию (1.6), которое теперь имеет вид

$$\sigma=0, \quad \tau u=0 \quad \text{при } \tau=0 \quad (3.9)$$

Допустим, что

$$\varkappa(\theta,\sigma,h)=\theta^l\sigma^m h^n \quad (3.10)$$

где l, m, n — постоянные. Зависимость типа (3.10) характерна для замагниченной плазмы, если ее температура много больше температуры замагничивания. Предположим, что вблизи $\tau=0$

$$\sigma(\tau)=\sigma_0\tau^\alpha, \quad u=u_0\tau^\beta \quad (3.11)$$

Чтобы удовлетворить условию (3.9), необходимо

$$\alpha>0, \quad \beta+1>0 \quad (3.12)$$

Из (3.8) получим

$$-\alpha\sigma_0\tau^\alpha(u_0\tau^\beta-{}^1/_2)+u_0(1+\beta)\tau^\beta=0$$

Это уравнение удовлетворяется при $\tau\to0$, если положить

$$\beta=\alpha, \quad u_0=-\alpha\sigma_0/2(\alpha+1)$$

Пренебрегая в уравнении (3.7) малыми слагаемыми, запишем его в виде

$$\tau\frac{d\sigma}{d\tau}+2C(\gamma-1)\frac{d}{d\tau}\left(\varkappa\frac{d\sigma}{d\tau}\right)=0$$

Подставляя сюда (3.10) и (3.11), получим

$$\alpha\sigma_0\tau^\alpha+2C(\gamma-1)\alpha[(m+l+1)\alpha-1]\tau^{(m+l+1)\alpha-2}=0 \quad (3.13)$$

Если положить

$$\alpha=(m+l+1)^{-1} \quad (3.14)$$

и если

$$m+l+1>0 \quad (3.15)$$

то первый член (3.13), пропорциональный положительной степени τ при $\tau\to0$, будет мал в сравнении со вторым членом, пропорциональным τ^{-1}. Поскольку коэффициент перед вторым членом при условии (3.14) обращается в нуль, то это означает, что уравнение (3.13) удовлетворяется выражением $\sigma=\sigma_0\tau^\alpha$ в пределе $\tau\to0$. При соблюдении (3.15) выполняются также условия (3.12), поэтому найденное решение удовлетворяет граничным условиям.

Автор благодарит Г. И. Будкера за постановку задачи.

Поступила 6 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Alikhanov S. G., Konkashbaev I. K., Chebotaev P. Z. The energy balance in a dense fusion plasma contained by walls. Nucl. Fusion, 1970, vol. 10, No. 1.
2. Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н. Газовая динамика. М., «Высшая школа», 1965.
3. Зельдович Я. Б., Компанеец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сборник, посвященный семидесятилетию академика А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950.