

- вого кольца.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 3. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1969.
6. Meng J. C. S. The physics of vortex ring evolution in a stratified and shearing environment.— J. Fluid Mech., 1978, vol. 84, N 3.
  7. Maxworthy T. Some experimental studies of vortex-ring.— J. Fluid Mech., 1977, vol. 81, N 3.
  8. Linden P. F. The interaction of a vortex ring with a sharp density interface: a model for turbulent entrainment.— J. Fluid Mech., 1973, vol. 60, N 3.
  9. Honji H., Tatsuno M. Vortex rings in a stratified fluid.— J. Phys. Soc. Jap., 1976, vol. 41, N 6.
  10. Pao H.-P., Kao T. Vortex structure in the wake of a sphere.— Phys. Fluids, 1977, vol. 20, N 2.

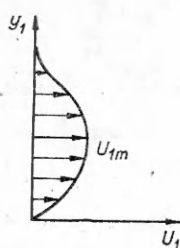
УДК 533.6.12

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ВДОЛЬ СТЕНКИ СТРУИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

О. С. Рыжов  
(Москва)

Рассматривается плоская струя несжимаемой вязкой жидкости, которая граничит с твердой стенкой. Для изучения ее устойчивости применяется теория свободного взаимодействия пограничного слоя с внешним потенциальным потоком. Дисперсионное соотношение, связывающее частоту свободных колебаний с волновым числом, оказывается в точности таким же, какое определяет устойчивость течения Пуазейля в безграничном канале. От положения корней дисперсионного соотношения зависят свойства решения задачи о гармонических возмущениях, порождаемых установленным на стенке осциллятором. Отмечается, что анализ колебаний с нарастающей во времени амплитудой может основываться на нелинейных уравнениях Прандтля с включенным в них самоиндуцированным давлением.

1. Пусть плоская струя несжимаемой вязкой жидкости распространяется вдоль расположенной снизу твердой стенки. Всю толщину струи можно рассматривать в качестве пограничного слоя, распределение безразмерной скорости  $U_1$  по сечению которого изображено на фиг. 1. Существование, что сверху на выходе из пограничного слоя обращаются в нуль как сама скорость, так и ее производная по поперечной координате  $y_1$ . Профиль скорости подобного вида присущ не только струям; как известно, аналогичные поля скоростей могут быть получены в стационарных движениях жидкости на подогреваемой вертикальной пластинке [1] и вращающемся диске [2]. Для исследования особенности этих движений вблизи кромок твердых тел использована теория свободного взаимодействия пограничного слоя с внешним потенциальным потоком [3]. Дальнейшие примеры обсуждаются в [4], где построено решение уравнений Прандтля, которое описывает отрыв струи и последующее развитие зоны рециркуляционного течения. Применим названную теорию к анализу устойчивости струи по отношению к длинноволновым возмущениям с прилегающим к обтекаемой стенке критическим слоем нейтральных колебаний [5, 6]. Эти возмущения определяют в линейном приближении асимптотику кривых, дающих зависимость волнового числа от числа Рейнольдса при неограниченном увеличении последнего [7].



Фиг. 1

Для поставленной цели разобьем все поле скоростей на две области. Согласно основным представлениям теории свободного взаимодействия [8, 9], влияние вязкости на структуру возмущенного течения в верхней области 1 пренебрежимо мало. Введем малый параметр  $\epsilon = \text{Re}^{-1/4}$ , где число Рейнольдса  $\text{Re} = \rho^* U_m^* L^* / \lambda^*$  выражается через плотность  $\rho^*$  и коэффициент вязкости  $\lambda^*$  жидкости, максимальную скорость  $U_m^*$  частиц в струе и ее характерную длину  $L^*$ . Для времени  $t^*$  и декартовых координат  $x^*$ ,  $y^*$  пространства справедливы равенства

$$(1.1) \quad t^* = \frac{L^*}{U_m^*} (t_0 + \varepsilon^4 t_1), \quad x^* = L^* (x_0 + \varepsilon^6 x_1), \quad y^* = \varepsilon^7 L^* y_1,$$

в которых  $t_0$  и  $x_0$  — произвольные постоянные. Асимптотические разложения для давления  $p^*$  и составляющих  $v_x^*$ ,  $v_y^*$  вектора скорости имеют вид

$$(1.2) \quad p^* = p_\infty^* + \rho^* U_m^{*2} [\varepsilon^4 p_1(t_1, x_1, y_1) + \dots], \\ v_x^* = U_m^* [U_1(y_1) + \varepsilon^2 u_1(t_1, x_1, y_1) + \dots], \quad v_y^* = U_m^* [\varepsilon^3 v_1(t_1, x_1, y_1) + \dots],$$

причем  $p_\infty^*$  означает давление на верхнем краю струи, а функция  $U_1(y_1)$  задает профиль скорости в первоначальном невозмущенном движении.

Подставим формулы (1.1), (1.2) в систему уравнений Навье — Стокса и удержим в полученных таким образом соотношениях только главные члены. В результате находим [3, 4]

$$(1.3) \quad p_1 = P(t_1, x_1) + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_1^2} \int_0^{y_1} U_1^2(Y_1) dY_1, \quad u_1 = A_2(t_1, x_1) \frac{dU_1}{dy_1}, \\ v_1 = -U_1(y_1) \frac{\partial A_2}{\partial x_1}.$$

Здесь функция  $P(t_1, x_1)$  задает возмущенное давление вдоль ограничивающей струю снизу твердой стенки, а функция  $A_2(t_1, x_1)$  выражает мгновенное смещение линий тока. Обе эти функции произвольны. В задаче об устойчивости течения на них следует наложить условие периодичности по продольной координате  $x_1$ . Построенное решение квазистационарно: время играет в нем роль параметра [10—12].

На внешнем краю пограничного слоя возмущения должны затухать. В силу оговоренного выше предположения ( $U_1 \rightarrow 0$ ,  $dU_1/dy_1 \rightarrow 0$  при  $y_1 \rightarrow \infty$ ) компоненты  $u_1$ ,  $v_1$  вектора скорости удовлетворяют этому требованию автоматически. Обращение в нуль избыточного давления  $p_1$  приводит к равенству  $P = -\Delta \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_1^2}$ ;  $\Delta = \int_0^\infty U_1^2(Y_1) dY_1$ , связывающему между

собой функции  $P$  и  $A_2$ . Численное значение коэффициента  $\Delta$  зависит от распределения скорости поперек пограничного слоя в исходной задаче.

2. В тонкой пристеночной области 2 вязкость жидкости оказывает решающее влияние на структуру возмущений. Здесь независимые переменные

$$(2.1) \quad t^* = \frac{L^*}{U_m^*} (t_0 + \varepsilon^4 t_2), \quad x^* = L^* (x_0 + \varepsilon^6 x_2), \quad y^* = \varepsilon^9 L^* y_2,$$

а искомые функции

$$(2.2) \quad p^* = p_\infty^* + \rho^* U_m^{*2} [\varepsilon^4 p_2(t_2, x_2, y_2) + \dots], \\ v_x^* = U_m^* [\varepsilon^2 u_2(t_2, x_2, y_2) + \dots], \quad v_y^* = U_m^* [\varepsilon^5 v_2(t_2, x_2, y_2) + \dots].$$

Как обычно в задачах на свободное взаимодействие [8, 9], поток полагается имеющим слоистую структуру, в связи с чем масштабы времени и продольной координаты выбираются одинаковыми в обеих областях, а их толщина оценивается по-разному. Отсюда  $t_1 = t_2$ ,  $x_1 = x_2$ , но  $y_1 \neq y_2$ .

Подстановка формул (2.1), (2.2) в систему уравнений Навье — Стокса дает для главных членов

$$(2.3) \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t_2} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} = \\ = -\frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_2^2}.$$

Это — уравнения Прандтля, однако давление  $p_2$  в них не предписывается заранее, а находится в результате решения всей задачи в целом. Действительно, сращивание с разложениями для внешней области, в которых функция  $p_1$  выражена при помощи первого из равенств (1.3) и соотношения (1.4), позволяет заключить, что

$$(2.4) \quad p_2 = -\Delta \partial^2 A_2 / \partial x_2^2.$$

Кроме того, сращивание главных членов для продольной составляющей вектора скорости ведет к предельному условию

$$(2.5) \quad u_2 - \lambda y_2 \rightarrow \lambda A_2(t_2, x_2) \text{ при } y_2 \rightarrow \infty$$

с постоянной  $\lambda = dU_1(0)/dy_1$ . Остальные граничные условия для системы уравнений (2.3), (2.4) формулируются в виде требований периодичности искомых функций по продольной координате  $x_1$  и равенств  $u_2 = v_2 = 0$  при  $y_2 = 0$ , обеспечивающих прилипание частиц жидкости к обтекаемой поверхности. Отметим, что согласно формуле (2.4) избыточное давление пропорционально кривизне линий тока [3, 4], а не интегралу от их наклона, как это имеет место в пограничном слое на теле, помещенном в равномерный на бесконечности поток [9].

Легко видеть, что система уравнений (2.3) инвариантна по отношению к преобразованию подобия

$$(2.6) \quad \begin{aligned} t_2 &= \Delta^{2/7} \lambda^{-8/7} t, \quad x_2 = \Delta^{3/7} \lambda^{-5/7} x, \quad y_2 = \Delta^{1/7} \lambda^{-4/7} y, \\ p_2 &= \Delta^{2/7} \lambda^{6/7} p, \quad A_2 = \Delta^{1/7} \lambda^{-4/7} A, \quad u_2 = \Delta^{1/7} \lambda^{3/7} u, \\ v_2 &= \Delta^{-1/7} \lambda^{4/7} v, \end{aligned}$$

в то время как коэффициент  $\Delta$  исключается при помощи этого преобразования из формулы (2.4), а постоянная  $\lambda$  — из предельного условия (2.5). В дальнейшем будем считать преобразование (2.6) выполненным и опустим индекс 2 как у независимых переменных, так и у искомых функций. Используя новую систему единиц отсчета, необходимо положить  $\Delta = \lambda = 1$  в соотношениях (2.4), (2.5).

3. Как обычно в теории устойчивости [7], решение, описывающее свободные колебания вязкой жидкости, будем искать в виде

$$(3.1) \quad p = -k^2 A = -ak^2 e^{\omega t + kx}, \quad u = y - ae^{\omega t + kx} \frac{df}{dy}, \quad v = ake^{\omega t + kx} f(y).$$

Подставим разложения (3.1) в систему уравнений (2.3), (2.4) и линеаризуем полученные таким образом соотношения по амплитуде  $a$  возмущений. В результате для функции  $f$  возникает обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$(3.2) \quad d^3 f / dy^3 - (\omega + ky) df / dy + kf - k^3 = 0,$$

которое удобно рассматривать [13] на плоскости комплексного переменного  $z = \omega k^{-2/3} + k^{1/3} y$ . Чтобы выделить однозначную ветвь функции  $k^{1/3}$ , проведем в комплексной плоскости  $k$  разрез вдоль отрицательной вещественной полуоси и положим  $-\pi \leq \arg k \leq \pi$ . Продифференцировав (3.2) по  $y$  и совершив переход к переменному  $z$ , имеем уравнение Эйри для второй производной  $d^2 f / dz^2$ . Теперь легко написать решение для самой функции  $f$ , которое позволяет удовлетворить условиям прилипания частиц жидкости к пластинке  $y = 0$ , именно

$$(3.3) \quad f = c \int_{\zeta}^z dz'' \int_{\zeta}^{z''} \text{Ai}(z') dz', \quad \zeta = \frac{\omega}{k^{2/3}}.$$

Здесь  $\text{Ai}(z')$  — функция Эйри;  $c$  — произвольная постоянная. Подстановка формулы (3.3) в исходное уравнение (3.2) дает значение постоянной

$$c = k^2 \left[ \frac{d \text{Ai}(\zeta)}{dz} \right]^{-1}.$$

Остается удовлетворить предельному условию на внешней границе пристеночной области. Как видно из формулы (2.5),  $df/dy \rightarrow -1$  при  $y \rightarrow \infty$ . Отсюда выводим дисперсионное соотношение

$$(3.4) \quad \frac{d\text{Ai}(\xi)}{dz} \left[ \int_{\xi}^{\infty} \text{Ai}(z) dz \right]^{-1} = Q = -k^{7/3},$$

связывающее частоту свободных колебаний с волновым числом. Можно проверить, что в точности таким же оказывается дисперсионное соотношение, которое определяет устойчивость течения Пуазейля в плоском канале по отношению к длинноволновым антисимметричным возмущениям с прилегающими к стенкам критическими слоями нейтральных колебаний. Решающее влияние на свойства устойчивости движения жидкости в обоих случаях оказывает тот факт, что оно происходит в узкой полосе. В первом случае струя соприкасается сверху с областью покоя, во втором — верхней границей полосы служит твердая стенка. Однако независимо от вида этих границ и характера движения жидкости дисперсионное соотношение получается одинаковым.

Можно сразу указать два свойства его решений, которые позволяют судить о потере устойчивости рассматриваемым движением. Для этой цели воспользуемся известными результатами исследования свободного взаимодействия пограничного слоя на пластинке, помещенной в безграничный равномерный поток несжимаемой жидкости [5, 6].

Во-первых, каждому заданному  $k$  (или  $\omega$ ) в комплексной плоскости  $\xi$  соответствует бесчисленное множество корней, расположенных в окрестности отрицательной вещественной полуоси. Пусть  $\arg \xi = \vartheta = \pi + \vartheta'$ ,  $\arg k = \vartheta_k$ . Следуя [13], положим  $|\xi| \rightarrow \infty$ , в то время как  $\vartheta' |\xi|^{3/2} \rightarrow 0$ . Применим асимптотическое представление  $\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi z^{1/4}}} \left[ \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) + i \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \right]$  функции Эйри, остающееся непрерывным при переходе через отрицательную вещественную полуось, к упрощению дисперсионного соотношения (3.4). После несложных преобразований последнее сводится к двум действительным равенствам:

$$|\xi|^{1/4} \cos\left(\frac{2}{3} |\xi|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\pi} |k|^{7/3} \cos \frac{7}{3} \vartheta_k,$$

$$\vartheta' |\xi|^{7/4} \sin\left(\frac{2}{3} |\xi|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\pi} |k|^{7/3} \sin \frac{7}{3} \vartheta_k,$$

откуда непосредственно вытекает сформулированное утверждение. В частности, при  $\vartheta_k = (3/7)\pi$  корни дисперсионного соотношения с большими номерами в комплексной плоскости  $\xi$  находятся в точках отрицательной вещественной полуоси.

Во-вторых, из всех корней с чисто мнимыми значениями  $k$  (играющих основную роль при изучении устойчивости движений вязкой жидкости) лишь у одного реальная часть  $\omega$  может принимать как отрицательные, так и положительные значения. Что касается реальной части  $\omega$  у всех остальных корней, то она меньше нуля, если  $|k| \neq 0$ . Частный случай с равной нулю реальной частью  $\omega$  у первого корня  $\xi_1$  отвечает бегущим волнам Толлмина — Шлихтинга, в которых происходят нейтральные колебания жидкости с постоянной во времени амплитудой. Все корни с мнимыми значениями  $k$  находятся простым пересчетом аналогичных решений из теории свободного взаимодействия пограничного слоя с потоком несжимаемой жидкости около полубесконечной пластинки [5, 6], когда в правой части дисперсионного соотношения (3.4) величина  $Q = \mp ik^{4/3}$ , причем верхний знак берется при  $\text{Im} k > 0$ , нижний — при  $\text{Im} k < 0$ . Действительно, и для течения в струе, и для пограничного слоя на полубесконечной пластинке разными получаются только  $|Q|$ , в то время как  $\arg Q =$

$= \pm \pi/6$ , где выбор знаков производится по изложенному только что правилу. Поскольку  $\zeta = \omega/k^{2/3}$ , то  $\arg \omega$  также одинаков для возмущений, которые распространяются в обоих сопоставляемых друг с другом потоках. Используя приведенные в [5, 6] результаты, сразу находим критическое значение  $k_*$  модуля волнового числа, соответствующего нейтральным колебаниям жидкости в струе с  $\text{Re } \omega = 0$  у первого корня  $\zeta_1$ ; именно  $k_* = 1,0003$ .

4. Рассмотрим вынужденные колебания струи, порождаемые установленным на стенке осциллятором. Зададим его форму уравнением  $y = ae^{i\Omega t} h(x)$ , причем будем считать функцию  $h$  отличной от нуля только на интервале  $0 \leq x \leq l$ . Граничные условия на колеблющейся стенке принимают вид

$$(4.1) \quad u = 0, \quad v = ia\Omega e^{i\Omega t} h(x).$$

Как и выше, предположим амплитудный параметр  $a \ll 1$  в граничном условии (4.1) и линеаризуем уравнения движения жидкости по этому параметру. Выделив у искомого функций-возмущений временные множители посредством соотношений

$$(4.2) \quad p = ae^{i\Omega t} p'(x), \quad A = ae^{i\Omega t} A'(x), \\ u = y + ae^{i\Omega t} u'(x, y), \quad v = ae^{i\Omega t} v'(x, y),$$

разложим зависящие от пространственных координат части в интегралы Фурье. Принимая во внимание равенство (2.4), запишем

$$(4.3) \quad \bar{p}(K) = K^2 \bar{A}(K) = K^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iKx} A'(x) dx, \\ \bar{u}(K, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iKx} u'(x, y) dx, \quad \bar{v}(K, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iKx} v'(x, y) dx.$$

Введем функцию  $F(K, y)$  как

$$(4.4) \quad \bar{u} = -dF/dy, \quad \bar{v} = iKF.$$

Подстановка формул (4.2)–(4.4) в уравнения движения дает

$$(4.5) \quad \frac{d^3 F}{dy^3} - i(\Omega + Ky) \frac{dF}{dy} + iKF + iK^3 \bar{A} = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение отличается от (3.2) лишь величиной параметра, играющего роль свободного члена; коэффициенты обоих уравнений при  $\Omega = -i\omega$ ,  $K = -ik$ , разумеется, совпадают. Из предыдущего ясно, что на плоскости комплексного переменного  $Z = i^{1/3}(\Omega K^{-2/3} + K^{1/3}y)$  оно сводится к уравнению Эйри для второй производной  $d^2 F/dZ^2$ . Из соотношений (4.1) вытекают граничные условия

$$F = (\Omega/K)\bar{h}, \quad dF/dy = \bar{h} \quad \text{при } y = 0$$

для уравнения (4.5), где  $\bar{h}(K)$  — трансформанта Фурье функции  $h(x)$ , задающей форму осциллятора. Они позволяют заключить, что на плоскости комплексного переменного  $Z$  третья производная

$$(4.6) \quad d^3 F/dZ^3 = -K^2 \bar{A} \quad \text{при } Z = Z^0 = i^{1/3} \Omega K^{-2/3}.$$

Недостающее требование дает предельное условие (2.5), откуда

$$(4.7) \quad dF/dZ \rightarrow -(iK)^{-1/3} \bar{A} \quad \text{при } |Z| \rightarrow \infty.$$

Удовлетворяющее граничному условию (4.6) и затухающее на бесконечности решение уравнения Эйри имеет вид

$$\frac{d^2 F}{dZ^2} = -K^2 \bar{A} \left[ \frac{d\text{Ai}(Z^0)}{dZ} \right]^{-1} \text{Ai}(Z).$$

Учитывая граничное условие на колеблющейся стенке, проинтегрируем один раз последнее соотношение. Подстановка результата интегрирования в предельное условие (4.7) определяет трансформанту Фурье

$$(4.8) \quad \bar{A} = -\frac{\bar{h}(K)\Phi(Z^0)}{\Phi(Z^0) - K^2(iK)^{1/3}}, \quad \Phi(Z^0) = \frac{d\text{Ai}(Z^0)}{dZ} \left[ \int_{Z^0}^{\infty} \text{Ai}(Z) dZ \right]^{-1}$$

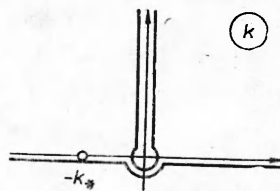
мгновенного смещения линий тока.

5. Чтобы установить основные свойства поля скоростей жидкости при различных частотах осциллятора, не обязательно знать детали обращения интегральных преобразований (4.3), которые можно выяснить при помощи развитой в [14] техники. Заменяя во втором из выражений (4.6) для  $Z^0$  действительные числа  $\Omega$  и  $K$  на произвольные комплексные величины  $-i\omega$  и  $-ik$  соответственно, приравняем нулю знаменатель правой части формулы для  $\bar{A}$ . В результате возникает дисперсионное соотношение (3.4), связывающее частоту свободных колебаний с волновым числом. Как было отмечено выше, эти колебания являются предельной формой волн Толлмина — Шлихтинга (которая отвечает неограниченно возрастающим числам Рейнольдса). Особую важность представляет тот факт, что первая мода свободных колебаний может быть как устойчивой, так и неустойчивой. Согласно приведенным вычислениям, реальная часть  $\omega$  у первого корня  $\zeta$ , дисперсионного соотношения (3.4) меняет знак, проходя через нуль при  $k = \pm k_* i = \pm 1,0003i$ . Пересчет результатов из [5, 6] показывает, что при этом  $\omega = \mp \Omega_* i = \pm 2,298i$ .

Поскольку  $\omega = i\Omega$ ,  $k = iK$ , то определяемая первым корнем  $Z_1^0$  дисперсионного соотношения величина  $\Omega = \Omega_*$  при  $K = -k_*$ . Рассмотрим теперь обратные преобразования Фурье на плоскости комплексного переменного  $K$ , считая продольную координату  $x > 0$ . Чтобы обеспечить выбор однозначной ветви функции  $K^{1/3}$ , входящей в выражение для  $Z$ , сделаем разрез вдоль положительной мнимой полуоси (фиг. 2). На основании теоремы Коши интегралы по действительной оси сводятся к умноженной на  $2\pi i$  сумме вычетов подынтегральных аналитических функций и интегралам по обоим берегам разреза. Из всей бесконечной суммы вычетов возьмем лишь тот, который соответствует первому корню  $Z_1^0$  дисперсионного соотношения, где частота  $\Omega$  фиксирована, а  $K$  принимает любые комплексные значения. Пусть  $K_1$  — значения, принадлежащие первому корню. Обращаясь к формуле (4.8), заключаем, что вклад в выражение для мгновенного смещения линий тока, даваемый рассматриваемым вычетом, равен

$$\frac{3iK_1 \bar{h}(K_1) I(Z_1^0) \Phi(Z_1^0)}{K_1^2 (iK_1)^{1/3} [2Z_1^0 \text{Ai}(Z_1^0) + 7I(Z_1^0)] + 2(Z_1^0)^2 \text{Ai}(Z_1^0)} e^{iK_1 x}, \quad I(Z_1^0) = \int_{Z_1^0}^{\infty} \text{Ai}(Z) dZ.$$

Аналогичные слагаемые, которые пропорциональны  $\exp iK_1 x$ , являются в соотношениях для остальных параметров жидкости. Ясно, что при  $\Omega \rightarrow \Omega_* = 2,298$  имеем  $\text{Re } K_1 \rightarrow -k_* = -1,0003$ ,  $\text{Im } K_1 \rightarrow 0$ . Таким образом, возбуждаемые осциллятором возмущения затухают на бесконечности вниз по потоку только для достаточно низких частот  $\Omega < \Omega_*$ , причем с приближением  $\Omega$  к  $\Omega_*$  декремент затухания получается как угодно малым. В пределе при  $\Omega = \Omega_*$  колебания становятся нейтральными с постоянной по длине струи амплитудой. Если же осциллятор обладает сравнительно высокой частотой  $\Omega > \Omega_*$ , возмущения должны экспоненциально нарастать вниз по потоку, как это следует из установленных выше свойств устойчивости струи.



Фиг. 2

6. Вспомним теперь, что изложенные результаты получены в специальной безразмерной системе единиц, вводимой формулами (2.1), (2.2) и (2.6). Переход от частоты  $\omega$  и волнового числа  $k$  в этой системе к частоте  $\nu$  и волновому числу  $\alpha$  в исходной (также безразмерной) системе единиц осуществляется по формулам  $\omega = \Delta^{2/7} \lambda^{-8/7} \text{Re}^{-2/7} \nu$ ,  $k = \Delta^{3/7} \lambda^{-5/7} \text{Re}^{-3/7} \alpha$ .

Подстановка этих равенств в дисперсионное соотношение (3.4) позволяет записать выражение для постоянной  $\zeta$  как  $\zeta = \lambda^{-2/3} \nu / \alpha^{2/3}$ , а его правую часть  $Q$  преобразовать к виду  $Q = -\Delta \lambda^{-5/3} \text{Re}^{-1} \alpha^{7/3}$ .

Как ясно из предыдущего, условие устойчивости свободно взаимодействующей струи несжимаемой жидкости на пластинке гласит, что

$$(6.1) \quad \Delta^{3/7} \lambda^{-5/7} \text{Re}^{-3/7} |\alpha| \leq k_* = 1,0003.$$

Аналогичное условие, предъявляемое к частоте колебаний осциллятора, имеет вид

$$(6.2) \quad \Delta^{2/7} \lambda^{-8/7} \text{Re}^{-2/7} |\nu| \leq \Omega_* = 2,298.$$

Знак равенства в формулах (6.1), (6.2) отвечает нейтральным длинноволновым колебаниям, амплитуда которых остается неизменной во времени и по длине струи. Сформулированные критерии позволяют судить, как изменяется положение нейтральной кривой в плоскости  $\text{Re}$ ,  $|\alpha|$ , обычно используемой в линейной теории устойчивости, при варьировании коэффициентов  $\Delta$  и  $\lambda$ . Поскольку первый из этих коэффициентов определяется профилем скорости в пограничном слое, формулы (6.1), (6.2) дают возможность проводить сравнение различных движений жидкости, которые упоминаются в [1—4].

Экспериментальные данные по устойчивости рассматриваемых течений, по-видимому, отсутствуют. Однако было выполнено большое количество экспериментов, в которых изучалось развитие возмущений в пограничном слое на пластинке, обтекаемой безграничным равномерным потоком жидкости [15, 16]. Результаты опытов хорошо согласуются с расчетами формы нейтральной кривой в рамках линейной теории устойчивости. С другой стороны, опытные данные свидетельствуют, что развитие неустойчивых колебаний приводит в конечном счете к разрушению ламинарного течения в пограничном слое и его переходу в турбулентное. Переходу предшествует существенно нелинейный процесс усиления амплитуды пульсаций в исходных волнах Толлмина — Шлихтинга.

Как показано в [5, 6], асимптотическое поведение длинноволновых возмущений с прилегающим к обтекаемой пластинке критическим слоем нейтральных колебаний правильно устанавливается при помощи теории свободного взаимодействия, опирающейся на линеаризованную систему уравнений Прандтля (2.3) с включенным в нее самоиндуцированным давлением (2.4). Эта система была применена в [17] для нахождения предельных циклов, отвечающих от нейтральной кривой устойчивости при учете слабо нелинейных эффектов. Полные уравнения Прандтля с самоиндуцированным давлением можно использовать для изучения существенно нелинейного процесса нарастания амплитуды неустойчивых волн Толлмина — Шлихтинга с достаточно большим периодом. Основной интерес представляет выяснение вопроса, существуют ли у названных уравнений зависящие от времени решения со стохастическими свойствами. В случае его положительного решения уравнения Прандтля будут применимы к исследованию возникновения турбулентных режимов.

Поступила 19 II 1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Von Schmidt E., Beckmann W. Das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld von einer Wärme abgebenden senkrechten Platte bei natürlicher Konvektion.— Forsch. aus dem Gebiete des Ingenieurwesens. Tech. Mech. und Therm., 1930, Bd 1, N 10, 11.

2. Von Kármán Th. Über laminare und turbulente Reibung.— ZAMM, 1921, Bd 1, Ht. 4.
3. Messiter A. F., Linán A. The vertical plate in laminar free convection: effects of leading and trailing edges and discontinuous temperature.— ZAMP, 1976, vol. 27, N 5.
4. Smith F. T., Duck P. W. Separation of jets or thermal boundary layers from a wall.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1977, vol. 30, pt 2.
5. Smith F. T. On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer.— Proc. Roy. Soc., Ser. A., 1979, vol. 366, N 1724.
6. Жук В. И., Рыжов О. С. Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— ДАН СССР, 1980, т. 253, № 6.
7. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
8. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений.— Тр. ЦАГИ, 1974, вып. 1529.
9. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies.— In: Advances in Appl. Mech. Vol. 14. New York — San Francisco — London: Academic Press, 1974.
10. Schneider W. Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers.— J. Fluid Mech., 1974, vol. 63, pt 3.
11. Brown S. N., Daniels P. G. On the viscous flow about the trailing edge of a rapidly oscillating plate.— J. Fluid Mech., 1975, vol. 67, pt 4.
12. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
13. Ryzhov O. S., Zhuk V. I. Internal waves in the boundary layer with the self-induced pressure.— J. de mecanique, 1980, vol. 19, N 3.
14. Терентьев Е. Д. Расчет давления в линейной задаче о вибраторе в сверхзвуковом пограничном слое.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 6.
15. Dryden H. L. Recent advances in the mechanics of boundary layer flow.— In: Advances in Appl. Mech. Vol. 1. N. Y.: Academic Press, 1948.
16. Ross J. A., Barnes F. H. et al. The flat plate boundary layer. Pt 3. Comparison of theory with experiment.— J. Fluid Mech., 1970, vol. 43, pt 4.
17. Smith F. T. Nonlinear stability of boundary layers for disturbances of various sizes.— Proc. Roy. Soc., Ser. A., 1979, vol. 368, N 1735.

УДК 532.516 : 541.24 : 532.5

## ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ПЛЕНКИ ПО ПОВЕРХНОСТИ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. Попов

(Ленинград)

1. **Равновесная толщина пленки.** Если поместить некоторое количество легкой жидкости на неограниченную поверхность более тяжелой, причем жидкости не смешиваются, то конечное состояние системы определяется знаком величины  $\gamma$ :

$$(1.1) \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_a - \gamma_{1a},$$

где  $\gamma_1$ ,  $\gamma_a$  и  $\gamma_{1a}$  — коэффициенты поверхностных натяжений границ легкая жидкость — тяжелая жидкость, легкая жидкость — атмосфера и тяжелая жидкость — атмосфера соответственно (фиг. 1). Если  $\gamma < 0$  (величина  $-\gamma$  называется коэффициентом растекания [1]), то образуется мономолекулярная пленка. При  $\gamma > 0$  образуется пленка конечной толщины  $H_0$ , определяемой формулой [2]

$$(1.2) \quad H_0^2 = \frac{2\gamma}{\rho g (1 - \rho/\rho_1)},$$

где  $\rho$  и  $\rho_1$  — плотности верхней и нижней жидкостей;  $g$  — ускорение силы тяжести.

Полная сила, действующая на сечение пленки  $AB$  справа, равна сумме поверхностных натяжений горизонтальных границ верхней жидкости за вычетом гидростатического давления ее слоя высоты  $H$ . Сила, действующая