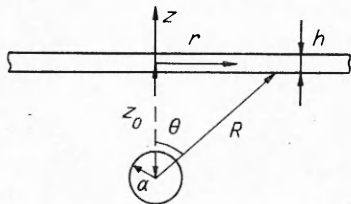


ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВРЕЖДЕНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ПЛАСТИНЫ
ПРИ РАЗДУВАНИИ ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ В ВОДЕ

Исследованию разрушения пластины под действием давления, создаваемого в воде газовым пузырем, посвящено большое число работ (см., например, [1]), где рассматривались, как правило, взрывные нагрузки. В данной работе изучаются небольшие давления в пузыре ($\Delta p \geq 10^5$ Па), создаваемые при выдувании газа из камеры высокого давления. В этом случае в задаче фактически нет малых параметров и для расчета разрушения пластины необходимо учитывать влияние пластины на расширяющийся пузырь, характер истечения из камеры высокого давления, напряженно-деформированное состояние пластины и накопление повреждений в пластине.



Р и с. 1

1. Постановка задачи. Рассмотрим пластину толщиной h , лежащую на поверхности жидкости неограниченной глубины (рис. 1). В некоторый момент на глубине H начинает расширяться газовая полость. Под действием избыточного давления Δp пластинка деформируется и разрушается с образованием отверстия радиуса r^* . Анализ этой весьма сложной проблемы будем выполнять в два этапа. Вначале исследуем линейную модель деформирования

неограниченной пластины. В результате решения задачи найдем распределение давления, действующего на поверхность пластины $p(r, t)$. На втором этапе зависимость $p(r, t)$ используем для расчета разрушения пластины конечных размеров с учетом нелинейных деформаций.

Сформулируем основные предположения данной модели: 1) материал сохраняет упругие свойства вплоть до разрушения; 2) характерная длина волны в пластине много больше ее толщины; 3) жидкость несжимаемая и идеальная, течение потенциальное; 4) газовая полость имеет сферическую форму.

В этих предположениях уравнения жидкости с граничными условиями на пластинке и пузыре имеют вид

$$(1.1) \quad \Delta \varphi = 0 \quad \text{при } z < 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{при } z = \zeta,$$

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g \zeta + D \Delta_{\perp}^2 \zeta + \rho_w h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0 \quad \text{при } z = \zeta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = u_0 \cos \theta + \dot{a}$$

$$\text{при } R = a,$$

где φ — потенциал течения; $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ — скорость жидкости; ζ — отклонение пластины от положения равновесия; r, z, α — радиальная, осевая координаты и полярный угол системы координат, связанной с пластиной; ρ — плотность жидкости; ρ_w, h — плотность и толщина пластины; D — цилиндрическая жесткость пластины; g — ускорение свободного падения; R, θ — радиальная координата и азимутальный угол сферической системы координат; a — радиус пузыря; \dot{a} — скорость его расширения; u_0 — скорость перемещения центра пузыря; Δ_{\perp} — оператор: $\Delta_{\perp} = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} +$

$+\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$. На большом удалении от пузыря справедливы условия покоящейся среды:

$$(1.2) \quad \zeta \rightarrow 0, \quad \partial \zeta / \partial t \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty, \quad z = 0.$$

Начальные условия для задачи:

$$(1.3) \quad \varphi = \zeta = \partial \zeta / \partial t = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Вплоть до момента разрушения повреждение материала будем описывать на основе импульсного критерия в форме [2]

$$(1.4) \quad \frac{dw_s}{dt} = \begin{cases} v_0 (\sigma_m / \sigma_* - 1), & \sigma_m > \sigma_*, \\ 0, & \sigma_m < \sigma_*. \end{cases}$$

Здесь w_s — поврежденность среды; σ_*, v_0 — параметры разрушения; $\sigma_m = (1/3) \times (\sigma_1 + \sigma_2)$ — нормальное растягивающее напряжение. В частности, при осевой симметрии на верхней поверхности пластины при ее выпучивании имеем

$$(1.5) \quad \sigma_1 = -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right), \quad \sigma_2 = -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right)$$

(E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона). При этом область разрушения — цилиндр, радиус которого определяется из уравнения

$$(1.6) \quad w_s(r^*, t) = 1.$$

Сформулируем закон расширения газов в пузыре. Считая давление однородным по объему полости, получим

$$(1.7) \quad dp_p/dt = \gamma_p(\dot{m}/m - \dot{V}_p/V_p)p_p,$$

$$\gamma_p = \begin{cases} \gamma & \text{при адиабатическом расширении,} \\ 1 & \text{при изотермическом,} \end{cases}$$

где p_p — давление в пузыре; V_p — объем пузыря; m — масса газа; γ — показатель адиабаты; \dot{m} определяется из системы уравнений, моделирующей истечение газа из камеры высокого давления, имеющей конечный объем V_K :

$$(1.8) \quad \dot{m} = G, \quad V_K dp_K/dt = -\gamma p_K G/\rho_K, \quad (V_K/T_K) dT_K/dt = -(\gamma - 1)G/\rho_K,$$

$$V_K d\rho_K/dt = -G,$$

$$G = FB_1 p_K / \sqrt{RT_K} \text{ при } p_K/p_p > ((\gamma + 1)/2)^{\gamma/(\gamma-1)},$$

$$G = FB_2 p_K / \sqrt{RT_K} \sqrt{(p_p/p_K)^{2/\gamma} - (p_p/p_K)^{\gamma/(\gamma-1)}},$$

$$B_1 = \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^\beta, \quad B_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}, \quad \beta = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}.$$

Здесь p_K , T_K , ρ_K — давление, температура и плотность газа в камере высокого давления; G — расход газа из камеры в пузырь; F — площадь проходного сечения; R — универсальная газовая постоянная.

2. Решение на первом этапе, динамика пузыря. Представим потенциал течения жидкости в виде $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где φ_1 — потенциал течения, созданного пузырем около жесткой стенки, φ_2 — потенциал течения, индуцированного колебаниями пластины в отсутствие пузыря. Производя линеаризацию в граничных условиях (1.1), выпишем систему уравнений для определения φ_1 и φ_2 :

$$(2.1) \quad \Delta\varphi_1 = 0, \quad \partial\varphi_1/\partial z = 0 \text{ при } z = 0,$$

$$\partial\varphi_1/\partial R = u_0 \cos \theta + \dot{a} \text{ при } R = a;$$

$$(2.2) \quad \Delta\varphi_2 = 0, \quad \partial\zeta/\partial t = \partial\varphi_2/\partial z \text{ при } z = \zeta, \quad \rho\partial\varphi_2/\partial t + \rho g\zeta + D\Delta_\perp^2 \zeta + \rho_w h\partial^2\zeta/\partial t^2 = p_1,$$

$$p_1 = -\rho\partial\varphi_1/\partial t - \rho v_1^2/2.$$

Решение задачи (2.1) известно и имеет вид [3–5]

$$(2.3) \quad \varphi_1 = a^2 \dot{a} (1/r_a + 1/r_b) + (a^3/2) (u_0 + \xi^2 (\dot{a} + \xi u_0)) \times$$

$$\times (P_1(\cos \theta_a)/r_a^2 + P_1(\cos \theta_b)/r_b^2) + (2/3) a^4 \xi^3 (\dot{a} + (2/3) \xi u_0) \times$$

$$\times (P_2(\cos \theta_a)/r_a^3 + P_2(\cos \theta_b)/r_b^3),$$

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = (3x^2 - 1)/2,$$

$$r_a = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}, \quad r_b = \sqrt{r^2 + (z + z_0)^2},$$

$$\cos \theta_a = (z - z_0)/r_a, \quad \cos \theta_b = (z + z_0)/r_b,$$

$$dp_z/dt = \partial L/\partial z_0, \quad \partial p_a/\partial t = \partial L/\partial a,$$

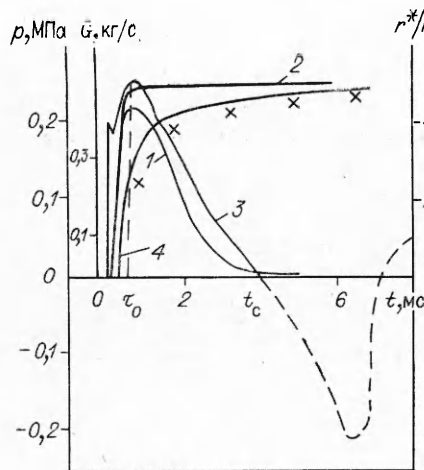
$$\frac{dz_0}{dt} = \frac{T_2 p_z + T_3 p_a}{2\pi\rho a^3 (T_1 T_2 - T_3^2)}, \quad \frac{da}{dt} = \frac{T_3 p_z + T_1 p_a}{2\pi\rho a^3 (T_1 T_2 - T_3^2)},$$

$$L = T - (4/3) \pi\rho a^3 (p_h - p_p), \quad \mu_h = p_\infty + \rho g z_0,$$

$$T = 2\pi\rho a^3 (T_1 u_0^2 + T_2 \dot{a}^2 - 2T_3 u_0 \dot{a}).$$

Здесь p_z и p_a — обобщенные импульсы; $\xi = a/2z_0$; z_0 — z -координата центра пузыря; T , L — кинетическая энергия и функция Лагранжа пузыря; T_1 , T_2 , T_3 — коэффициенты присоединенных масс пузыря, зависящие от ξ , приведенные в [3, 4]. Начальные данные для системы (2.3) задавались в виде

$$(2.4) \quad a(0) = a_0, \quad z_0(0) = H, \quad \dot{a}(0) = u_0 = 0.$$



Р и с. 2

$$\omega_k^2 = (\rho g k + D k^4) / (\rho + \rho_w k h), \quad \bar{p}_1 = \int_0^\infty p_1(r, t) J_0(kr) r dr$$

с начальными условиями $\eta(0) = d\eta(0)/dt = 0$. При вычислении образа избыточного давления \bar{p}_1 сингулярная часть $\sim 1/r$ выделялась и обращалась независимо по формуле

$$\int_0^\infty \frac{J_0(kr) r dr}{\sqrt{z_0^2 + r^2}} = \frac{e^{-kz_0}}{k}$$

Оставшаяся часть обращалась на сетке в N узлов по формулам Грегори 5-го порядка точности. После дискретизации параметра преобразования на сетке в N узлов система (2.2), (2.6) преобразовывалась к $2N$ уравнениям, записанным в нормальной форме Коши, которые интегрировались методом Рунге — Кутты. Для нахождения функций $\zeta(r, t)$ использовалась процедура численного интегрирования на сетке в M узлов, по формулам Грегори 5-го порядка точности. Путем численных экспериментов установлено, что наилучшая точность достигается при $M = N$. В силу быстрой сходимости метода хорошую точность в этом случае можно получить уже при $N = 10$.

На рис. 2 представлены результаты типичных расчетов, где кривые 1, 2 — две характерные зависимости $G(t)$, 3 — давление в центре плиты $p(t)$, 4 — радиус первой зоны повреждения. Кривая 1 описывает зависимость $G(t)$ при ограниченном объеме камеры высокого давления, а 2 — при неограниченном объеме. Зависимость $p(t)$ соответствует кривой 1 и подобна для кривых 1 и 2 (этот факт относится только к начальной нестационарной стадии расширения пузыря, в квазистационарной стадии расширения зависимости $p(t)$ в этих случаях, естественно, различные). Как следует из рис. 2, при $t > t_c$ давление становится отрицательным, что отвечает разрыву сплошности и обращению давления, действующего на пластину, в нуль. Таким образом, установлено, что давление, действующее на пластину в нестационарной стадии, можно считать трехгольным с параметрами, как от точечного источника:

$$(2.7) \quad p(r, t) = \frac{p_m \Psi(t)}{\sqrt{1 + r^2/H^2}}, \quad \Psi(t) = \begin{cases} t/t_1, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}, & t_1 < t < t_2, \\ 0, & t > t_2, \end{cases}$$

$$t_1 \approx 1,25\tau_0, \quad t_2 \approx t_c, \quad p_m = 0,5H^{-1}\tau_0^{-1/5}\rho^{2/5}(G_0RT_b)^{3/5}(1 - 1,95A),$$

$$t_c = 1,78\tau_0^{0,045}H^{1,58}(\rho/G_0RT_b)^{0,315}, \quad A = p_H\tau_0^{4/5}\rho^{-3/5}(G_0RT_b)^{-2/5}, \quad p_H = p_\infty + \rho g H$$

τ_0 — время установления расхода G_0 , T_b — температура жидкости, A — параметр противодавления).

3. Решение на втором этапе, разрушение пластины. Рассмотрим пластину толщины h и радиуса R , края которой свободны. Предположим, что к нижней поверхности пластины приложено давление, возникающее при расширении пузыря и определяемое по формуле (2.7). Под действием давления пластина будет деформироваться и разрушаться с образованием круглого отверстия радиуса r^* . Для описания этих

Система динамических уравнений (2.3) интегрировалась численно методом Рунге—Кутты 4-го порядка точности.

Решение линейной (относительно φ_2, ζ) системы (2.2) можно представить через фурье-образы

$$(2.5) \quad \zeta = \int_0^\infty k dk \sum_{n=0}^\infty e^{in\alpha} J_n(kr) \eta(k, n, t),$$

$$\varphi_2 = \int_0^\infty e^{hz} k dk \sum_{n=0}^\infty e^{in\alpha} J_n(kr) \Phi_2(k, n, t)$$

(η, Φ_2 — соответствующие фурье-образы, J_n — функция Бесселя порядка n). В случае осевой симметрии ($n = 0$) для η и Φ_2 имеем простые уравнения

$$(2.6) \quad d\eta/dt = k\Phi_2, \quad d^2\eta/dt^2 + \omega_k^2\eta = \bar{p}_1 k / (\rho + \rho_w kh),$$

процессов в пластине воспользуемся нелинейными уравнениями Кармана [6]:

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -D \Delta^2 \zeta + \sigma_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial r} + \frac{\sigma_i}{r} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial r} + pR/h,$$

$$\Delta^2 \zeta = \frac{\partial^4 \zeta}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \zeta}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{r},$$

$$e_1 = \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial r} \right)^2, \quad e_2 = \frac{u_1}{r}, \quad \sigma_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)} (e_1 + \nu e_2), \quad \sigma_2 = \frac{E}{(1-\nu^2)} (e_2 + \nu e_1),$$

$$\Sigma_1 = \sigma_1 - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right), \quad \Sigma_2 = \sigma_2 - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \right)$$

(Σ_1, Σ_2 — полные напряжения на поверхности пластины). Система (3.1) записана в безразмерном виде. Связь размерных и безразмерных величин определяется по формулам

$$D = D_p / (\rho c_0^2 R^2 h), \quad \zeta = \zeta_p / R, \quad t = t_p / T, \quad T = R / c_0, \quad \sigma_i = \sigma_{ip} / \bar{p}_0,$$

$$E = E_p / \bar{p}_0, \quad \bar{p}_0 = \rho c_0^2, \quad D_p = E h^3 / 12 (1 - \nu^2), \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}}$$

Процесс накопления повреждений описывается формулой (1.4), в которой вместо σ_i необходимо подставить Σ_i . Предполагая края пластины свободными, граничные условия запишем как

$$(3.2) \quad \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \right|_{r=R} + \frac{\nu}{R} \left. \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad \left. \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) \right|_{r=R} = 0, \quad \sigma_1|_{r=0} = 0.$$

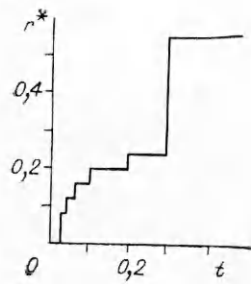
В центре пластины из условия симметрии имеем

$$(3.3) \quad u_1|_{r=0} = 0, \quad \partial \zeta / \partial r|_{r=0} = 0, \quad \partial^3 \zeta / \partial r^3|_{r=0} = 0.$$

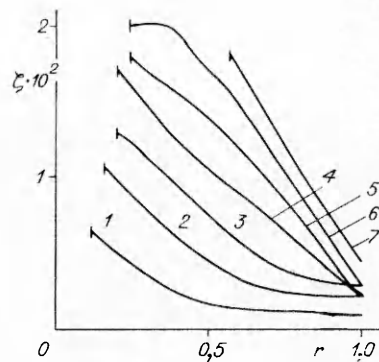
После разрушения пластины в точке r^* ставится условие свободной границы (3.2). Система уравнений (3.1) с граничными условиями (3.2), (3.3) решалась численно по явной схеме «крест» с порядком аппроксимации $O(\tau^2, (\Delta h)^2)$, где $\tau, \Delta h$ — шаги по t и r . Расчеты проводились при безразмерных параметрах пластины: $h = 2 \cdot 10^{-2}$, $D = 0,25$, $E = 6,7 \cdot 10^3$, $\rho = 1$, $\nu = 0,325$. Давление на поверхности пластины определялось формулой (2.7) с $t_1 = 10^{-3}$, $t_2 = 2 \cdot 10^{-2}$, $H = 5 \cdot 10^{-2}$, $p_m = 1,1$. После разрушения пластины в точке r^* ставится условие свободной границы (3.2).

На рис. 3 приведена рассчитанная зависимость радиуса разрушения от времени $r^*(t)$ (аналогичная зависимость $r^*(t)$ наблюдалась для всех значений p_m и t_2 , при которых происходило разрушение пластин конечных размеров). Сравнивая эту зависимость с $r^*(t)$ для бесконечной пластины (кривая 4 на рис. 2), видим одно принципиальное отличие. Суть его в том, что после выхода кривой $r^*(t)$ на насыщение происходит еще одно разрушение с существенно большим радиусом r^* (рис. 3). Это позволяет предположить, что природа последнего разрушения отличается от всех предыдущих. Рассмотрим более подробно механизм разрушения. После воздействия импульса давления пластина начинает двигаться вверх. Поскольку скорость в пластине w быстро убывает с увеличением r , в ней возникают изгибные напряжения, максимальные при $r \approx H$. В этой области возникает первое разрушение. Если скорость частиц оставшейся пластины ($r^* < r < R$) достаточно велика, то через некоторое время опять возникнет напряжение больше критического и произойдет следующее разрушение (рис. 4, здесь показана пластина на несколько моментов времени $t_1 \div t_7$ при $t_1 = \Delta t = 4,2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta t = t_i - t_{i-1}$). После нескольких разрушений этот процесс заканчивается при некотором r^* . Однако кроме энергии растяжения в пластине имеются значительные запасы энергии сжатия. После выхода волн сжатия на свободные края пластины они отражаются в виде волн растяжения (рис. 5, где приведена зависимость $\Sigma_1(r)$ на моменты $t_1 \div t_7$). Видно, что в момент $t \approx t_4$ происходит отражение волны от свободного края. Интерференция отраженных волн растяжения приводит к существенному увеличению Σ_1 , в результате чего происходит последнее разрушение в точке, где $\Sigma_1 > \sigma_*$. Это объяснение подтверждается рис. 4, на котором видно, как при отражении волны от свободного края меняется знак кривизны поверхности пластины.

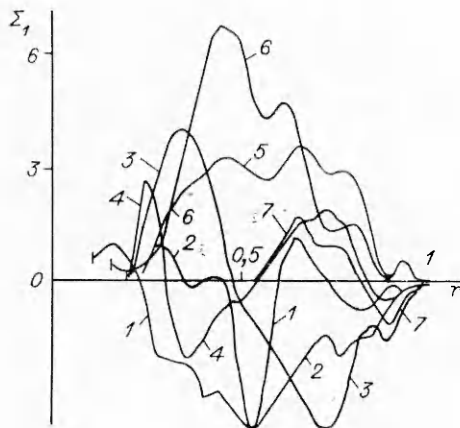
Для исследования зависимости r^* от p_m проведена серия расчетов, результаты которых показаны на рис. 6. Как отмечалось выше, минимальное значение r^* равно H , а быстрый рост $r^*(p_m/\sigma_*)$ на начальном участке связан с интерференционными эффектами. Выход кривой $r^*(p_m/\sigma_*)$ на асимптоту объясняется влиянием свободного края пластины, где вследствие разгрузки «трудно создать» необходимое для разрушения напряжение растяжения. Исходя из равенства кинетической энергии K и энергии изгиба \mathcal{E} , оценим минимальное значение p_m , при котором начинается разрушение. Пренебрегая напряжениями в течение действия импульса давления $t < t_2$, получи-



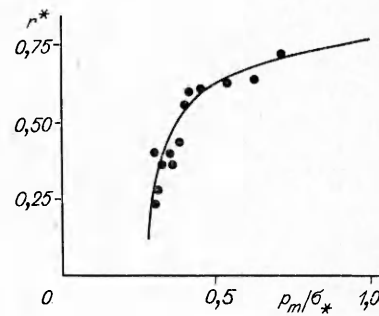
Р и с. 3



Р и с. 4



Р и с. 5



Р и с. 6

$w = (1/2)pt_2/\rho h$. Отсюда найдем относительную скорость двух точек, расположенных на расстоянии Δr : $\Delta w = -0,5pt_2r\Delta r/(H^2 + r^2)$. Поскольку разрушение происходит при $r \approx \Delta r \approx H$, получим $|\Delta w| \approx (1/\sqrt{2}4)p_m t_2/\rho h$, а кинетическая энергия, переходящая в упругую энергию растяжения, имеет вид $K \approx (\rho h/2)(\Delta w)^2 \approx (p_m t_2)^2/(4^2 \rho h)$. Согласно [6], энергию изгиба оценим по формуле $\mathcal{E} \approx (Eh^3/24)(\partial^2 \zeta/\partial r^2)^2$.

Из равенства $K = \mathcal{E}$ найдем кривизну $(\partial^2 \zeta/\partial r^2)^* \approx (3/8)p_m t_2/(\sqrt{E\rho}h^2)$. Считая, что разрушение происходит при $\sigma_* \approx (1/3)\Sigma_1 \approx (E/6)h(\partial^2 \zeta/\partial r^2)^*$, получим искомую формулу $(p_m/\sigma_*)_{\min} \approx 16h/t_2 c$, $c = \sqrt{E/\rho}$. Подставляя в нее безразмерные параметры при которых проводились расчеты, имеем $(p_m/\sigma_*)_{\min} \approx 0,2$. Эта оценка достаточно хорошо согласуется со значением $(p_m/\sigma_*)_{\min} \approx 0,28$, найденным в численных расчетах (см. рис. 6).

В заключение авторы выражают благодарность А. Беккер за проведение некоторых расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галиев Ш. У. Нелинейные волны в ограниченных сплошных средах. — Киев: Наук. думка, 1988.
2. Трунев А. П., Фомин В. М. Континуальная модель ударной эрозии // ПМТФ. — 1985. — № 6.
3. Воинов О. В. О движении двух сфер в идеальной жидкости // ПММ. — 1969. — Т. 33, вып. 4.
4. Воинов О. В., Петров А. Г. Движение сферы переменного объема в идеальной жидкости около плоской поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1971. — № 5.
5. Wraith A. E., Kakutani T. The pressure beneath a growing rising bubble // Chem. Eng. Sci. — 1974. — V. 29, N 1.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1987.

г. Новосибирск

Поступила 17/1 1990 г.