

## К ОБРАЗОВАНИЮ УДАРНЫХ ВОЛН ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ РАЗРЯДЕ В ВОДЕ

А. И. Иоффе, Е. А. Наугольных

(Москва)

При электрическом разряде в жидкости образующийся канал разряда быстро расширяется, что сопровождается излучением волны сжатия. Если скорость расширения канала приближается к скорости звука, то на переднем фронте излучаемого импульса сжатия образуется ударная волна.

Характеристики процесса расширения канала и параметры ударной волны могут быть определены по заданному режиму выделения энергии в канале разряда. Для простоты рассмотрим разряд, длина разрядного промежутка которого мала по сравнению с характерным радиусом канала, что позволяет считать форму канала сферической. Движение жидкости, вызванное расширением канала, будем считать изэнтропическим, что позволяет использовать уравнение состояния в виде

$$p = A (\rho / \rho_0)^n - B \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $p$  — давление,  $A = 3001 \text{ атм}$ ,  $B = 3000 \text{ атм}$ ,  $n = 7$  для воды.

При расчете гидродинамических характеристик разряда можно выделить две последовательно решаемые задачи: 1) расчет расширения канала при заданном режиме выделения энергии и 2) определение излучения ударной волны каналом, расширяющимся по известному закону.

Процесс расширения канала приближенно можно описать системой уравнений

$$P \frac{dV}{d\tau} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{d(PV)}{d\tau} = N(\tau) \quad (V = 4\pi R^3/3) \quad (2)$$

$$R \frac{d^2 R}{d\tau^2} \left(1 - \frac{U}{c}\right) + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{U}{3c}\right) U^2 = \left(1 + \frac{U}{c}\right) H + \frac{R}{c} \left(1 - \frac{U}{c}\right) \frac{dH}{d\tau} \quad (3)$$

$$H = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{c^2 - c_0^2}{n-1} = \frac{c_0^2}{n-1} \left[ \left( \frac{P+B}{A} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right] \quad (4)$$

первое из которых выражает закон сохранения энергии при разряде [1,2], а второе и третье можно рассматривать как соотношения, определяющие давление на поверхность расширяющейся сферы, равное давлению внутри канала  $P$ , в функции радиуса канала  $R$  и его производных  $R' = U$  и  $R''$ .

Уравнения (3),(4) вытекают из гидродинамических уравнений и уравнения состояния при использовании приближений теории Кирквуда-Бете [3,4], предложенной для описания распространения ударных волн в жидкости.

Остальные обозначения следующие:  $V$  — объем канала,  $\gamma$  — эффективный показатель адиабаты для плазмы; при разрядах в воде [1]  $\gamma = 1.2$ ,  $N(\tau)$  — выделяющаяся в канале мощность,  $c$  — локальная скорость звука,  $H$  — энтальпия. Начальные условия выбираются следующим образом:  $R \rightarrow 0$ ,  $R' \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ . Практически оказывается достаточным при  $\tau = 0$  задать значения  $R$  и  $U$ , достаточно малые, по сравнению с характерными значениями этих величин.

Численное интегрирование системы (2) — (4) позволяет определить зависимость радиуса канала от времени, скорость расширения, давление в канале, а также значения функции  $G(\tau) = R(H + U^2/2)$  на поверхности расширяющейся сферы. Определение этой функции — исходный пункт решения задачи об излучении в теории Кирквуда-Бете, предполагающий, что значения функции  $G = r(h + u^2/2)$  ( $r$  — радиальная координата,  $h$  — удельная энтальпия,  $u$  — гидродинамическая скорость в точке  $r$ ) остаются постоянными в точках, бегущих со скоростью  $c + u$ , что позволяет по известным значениям этой функции на поверхности сферы  $G(\tau)$  определить ее в любой точке пространства. Практически оказывается более удобным вычислять функцию, обратную  $G(t, r)$ , по формулам [4]

$$t(G, r) = \tau(G) + \frac{G\beta}{c_0^2} \left[ \frac{1 + 2\beta u}{\beta u (1 + \beta u)} - \frac{1 + \beta U}{\beta U (1 + \beta U)} - 2 \ln \frac{(1 + \beta u) \beta U}{\beta u (1 + \beta U)} \right] \\ \left( U = u(R, \tau), \beta u = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{n+1}{rc_0^2} G \right)^{1/2} - 1 \right], \beta = \frac{n+1}{4c_0} \right) \quad (5)$$

При малых возмущениях ( $\beta u \ll 1$ ) выражение (5) переходит в решение  $t = (r - R)/c_0 = \tau(G)$ , соответствующее приближению линейной акустики.

По известным значениям функции  $G(t, r)$  нетрудно определить гидродинамическую скорость и давление  $p$  [4]

$$p = A \left[ \frac{2}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} \left( 1 + \frac{n+1}{rc_0^2} G \right)^{1/2} \right]^{2n/(n-1)} - B \quad (6)$$

и найти профиль волны сжатия в любой точке пространства.

На достаточном удалении от разряда профиль волны сжатия может стать неоднозначным, что, как известно [5], означает образование ударных фронтов. Положение их и величина разрыва определяются по полученному решению при помощи соотношения Ренкина-Гюгонно, сводящемуся в случае ударных волн слабой интенсивности к простому правилу «равенства площадей» [5].

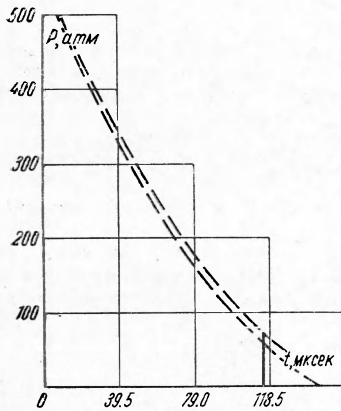
На больших расстояниях от разряда, где нелинейные эффекты приводят к сильному искажению первоначального профиля волны, ударная волна принимает форму, слабо зависящую от детальных особенностей функции  $G(\tau)$  на поверхности канала. Это позволяет получить простые асимптотические выражения, описывающие ударную волну вдали от разряда и позволяющие, в частности, выяснить характер ее затухания. При этом возможны два случая. Если скорость расширения канала равна или превосходит скорость звука, то ударные волны возникают в непосредственной близости от разряда.

В этом случае можно использовать асимптотические выражения теории, развитой Кирквудом и Бете для описания ударных волн от взрыва и пригодных на большом расстоянии от него [3]. Согласно этой теории, форма волны приближенно предполагается экспоненциальной

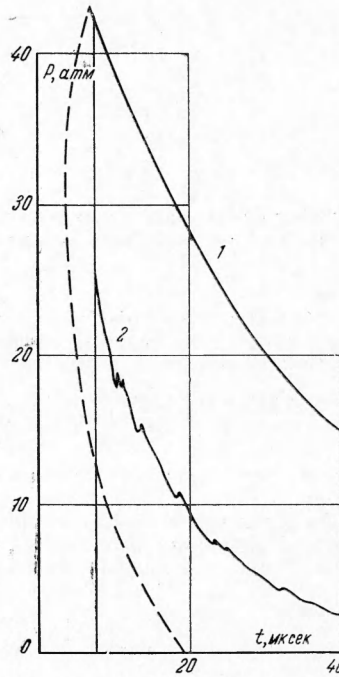
$$p = p_m \exp \frac{-t}{\theta}, \quad p_m = \frac{\rho G_m}{r}, \quad G_m = x G_0$$

$$x = 2 \left[ 1 + \left( 1 + 43 \frac{r G_0}{c_0^2 T} \ln \frac{r}{R_0} \right)^{1/2} \right]^{-1}$$

$$\theta \approx \frac{23 G_0}{c_0^2} \ln \frac{r}{R_0} \quad (7)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$G_0$  — максимальное значение функции  $G(\tau)$  на поверхности сферы, а  $x$  — величина, характеризующая затухание ударной волны,  $R_0$  и  $T$  — характерные значения радиуса канала и времени его расширения.

Формулы (7) применимы при выполнении условий

$$2\beta G_0 / T c_0^2 > 1, \quad \ln(r/R_0) \gg 1 \quad (8)$$

первое из которых выражает условие образования разрыва вблизи разряда, а второе позволяет пользоваться асимптотическими формулами теории Кирквуда-Бете. Как видно, параметры ударной волны на больших расстояниях определяются просто максимальной величиной функции  $G_0$  при условии, что известны характерные значения  $R_0$  и  $T$ .

В свою очередь, для грубых оценок, на основании уравнения (3) можно принять, что  $G_0 \approx 3/2 R_0^3 T^{-1}$ , а величину  $R_0$  можно определить по формуле [2]

$$R_0^5 = 3(\gamma - 1) T^2 E / 4\pi \rho_0 \quad (9)$$

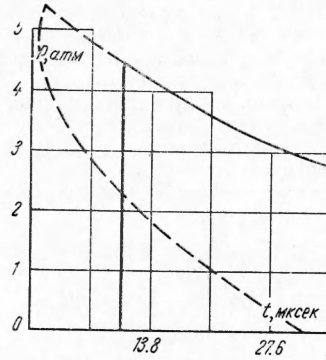
где  $\rho_0$  — равновесная плотность жидкости.

Таким образом, можно найти порядок величины давления в ударной волне, излучаемой интенсивным разрядом, по заданным длительности разряда  $T$  и полной энергии, выделившейся в канале  $E$ .

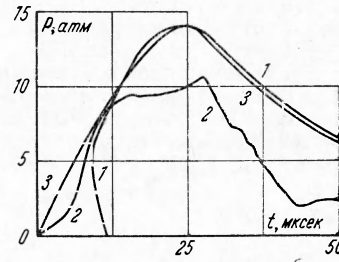
Используя приведенную выше оценку для  $G_0 \approx 3R_0^3 / 2T^2$  и соотношение (9), можно переписать первое неравенство (8) следующим образом:

$$\frac{2\beta G_0}{c_0^2 T} = 6 \left( \frac{R_0}{c_0 T} \right)^3 = \left( \frac{E/R_0^3}{\rho_0 c_0^3} \right)^{3/2} \approx \left( \frac{E}{\rho_0 c_0^5 T^3} \right)^{3/2} > 1 \quad (10)$$

Отсюда следует, что возможность образования ударной волны зависит от отношения плотности энергии в канале, пропорциональной давлению в нем, к характерному давлению в жидкости  $\rho_0 c_0^2$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

Если скорость расширения канала меньше скорости звука, что имеет место в случае, когда вместо первого неравенства (8) выполняется обратное неравенство

$$2\beta G_0 / c_0^2 T < 1 \quad (11)$$

то ударные волны могут образоваться на некотором удалении от разряда в результате накапливающихся нелинейных эффектов. Учет этого обстоятельства, проведенный в приближении нелинейной акустики [6], приводит к следующему выражению для  $G_m$

$$\frac{\beta G_m^2}{c_0^2} = \frac{5 G_0 T}{4} \left[ \ln \frac{r}{R_0} \right]^{-1}, \quad p_m = \frac{\rho_0 G_m}{r} \quad \text{при} \quad \ln \frac{r}{R_0} \geq \frac{c_0 T}{2\beta G_0} \quad (12)$$

Выполнение последнего условия означает, что ударная волна сформировалась на расстоянии  $r$ .

Переходя к численному интегрированию системы (2) — (4), заметим, что на основании экспериментальных данных (см., например, [1]) для зависимости мощности, вводимой в канал, от времени приближенно можно принять «треугольную» аппроксимацию

$$N(\tau) = \begin{cases} k\tau & (0 \leq \tau \leq 1/2 T) \\ -k\tau + kT & (1/2 T \leq \tau \leq T) \\ 0 & (T < \tau) \end{cases} \quad (13)$$

Здесь  $T$  — длительность разряда (для периодического разряда можно считать, что каждому периоду соответствует свой «треугольник» в графике мощности).

Удобно перейти к безразмерным переменным

$$x = \frac{t}{T}, \quad y = \frac{R}{R_0}, \quad z = \frac{c}{c_0}, \quad \beta = \frac{\rho T^2}{\rho_0 R_0^2}, \quad \eta = \frac{HT^2}{R_0^2}, \quad M = \frac{R_0}{c_0 T}$$

где  $T$  — длительность разряда, а  $R_0$  — определяется формулой (9). Уравнения (2) — (4) в новых переменных примут вид

$$\frac{d\beta}{dx} = 4 \frac{\nu(x)}{y^3} - 3\gamma \frac{\beta}{y} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1 + My/z \eta}{1 - My/z y} + M \frac{1}{z} \frac{d\eta}{dx} - \frac{3}{2} \frac{1 - My/3z y^2}{1 - My/z y}$$

$$\eta = \frac{1}{M^2(n-1)} \left[ \left( nM^2\beta + \frac{B}{A} \right)^{(n-1)/n} - 1 \right] \quad (14)$$

где  $v(x)$  — безразмерная мощность

$$v(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1/2) \\ 1-x & (1/2 \leq x \leq 1) \\ 0 & (1 < x) \end{cases}$$

Уравнения (14) интегрировались численно на машине с начальными условиями  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = 0$ , и затем находились зависимости  $p(t)$  на различных расстояниях по формулам (5), (6).

Положение ударного фронта и амплитуда ударной волны определялись графически по правилу «равенства площадей».

Расчитанные зависимости профиля давления в волне сжатия показаны на фиг. 1—4 (кривые 1), там же показаны имеющиеся экспериментальные результаты [2,8] (кривые 2).

На фиг. 1 показан профиль давления в точке, отстоящей на расстоянии 1 м от разрядного промежутка для разряда с параметрами: выделившаяся энергия  $E = 3 \cdot 10^4$  Дж, длительность разряда  $T = 9$  мксек.

На фиг. 2 и 3 показана зависимость  $p(t)$  в точках, отстоящих на расстоянии 1 и 10 м соответственно от разряда с параметрами  $E = 2.5 \cdot 10^8$  Дж,  $T = 40$  мксек [8]; при построении графиков на фиг. 2 ударные фронты, определенные экспериментально и рассчитанные, были совмещены.

На фиг. 4 изображен профиль волны сжатия на расстоянии  $1/2$  м от разряда с параметрами  $E = 102$  Дж,  $T = 50$  мксек, исследованного в [2]. В отличие от двух предыдущих разрядов, ударные волны в этом случае практически не образуются. Кривой 3 на фиг. 4 показана зависимость  $p(t)$ , полученная в приближении линейной акустики.

Авторы благодарят Ю. П. Райзера, В. А. Акуличева, Ю. Я. Богуславского и Н. Г. Кожелупову за внимание и помощь в работе.

Поступила 22 III 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе А. И., Наугольных К. А., Рой Н. А. О начальной стадии электрического разряда в воде. ПМТФ, 1964, № 4, стр. 108.
2. Наугольных К. А., Рой Н. А. Точечный электрический разряд в жидкости. ПМТФ, 1967, № 4.
3. Cole R. H. Underwater explosion. Princeton, 1948. Русск. перевод. Коул. Подводные взрывы. Изд. иностр. лит., М., 1950.
4. Акуличев В. А., Богуславский Ю. Я., Иоффе А. И., Наугольных К. А. Распространение сферических волн конечной амплитуды. Акустич. ж., 1967, т. 13, стр. 321.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
6. Whitham G. B. On the propagation of weak shock waves. J. Fluid. Mech. 1956, т. 2, стр. 303.
7. Скворцов Ю. А., Комельков В. С., Кузнецов Н. М. Расширение канала искры в жидкости. Ж. техн. физ. 1960, т. 30, стр. 1165.
8. Наугольных К. А., Рой Н. А. О связи между гидродинамическими и электрическими характеристиками разряда в жидкости. Докл. АН СССР, 1959, т. 168, стр. 556.

#### ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАЗРЯДОВ В ГАЗАХ

Г. Ю. Даутов

(Новосибирск)

Известный закон Пашена об электрическом пробое, являющийся результатом применения методов теории подобия и размерности к электрическому разряду в неподвижном газе, сыграл большую роль в обобщении экспериментальных данных по пробую [1]. В последнее время эти методы стали применяться к обобщению результатов экспериментальных исследований электрических дуг [2-5]. В данной работе предлагается весьма простой критерий подобия, который может быть применен к различным видам электрических разрядов в канале с потоком газа.