

УДК 532.5

## ОСЕВАЯ СТРУЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ ПЕРЕМЕННОГО РАДИУСА

В. В. Никулин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается стационарное движение жидкости в струе, расположенной вдоль оси симметрии потенциально вращающегося потока в трубе переменного радиуса. Строится теоретическая модель такого движения. В строгой постановке исследована зависимость параметров струи от осевой координаты при заданных условиях на входе. В частности, устанавливается продолжительность или непродолжительность решения на полубесконечный интервал. На основе анализа поведения струи делается попытка оценить поведение ядра торнадоподобного вихря в трубе переменного радиуса, а именно возможность возникновения распада или прыжка вихря.

При построении теоретической модели используется подход, развитый в предыдущих работах [1, 2], где рассматривалось движение жидкости в ядрах вертикальных торнадоподобных вихрей. В отличие от [1, 2], где динамика течения обусловлена действием силы тяжести, в данном случае динамика определяется взаимодействием потока в осевой струе с окружающим вращающимся потоком. В результате получается большее разнообразие возможных движений, чем в [1, 2]. Развиваемый подход основан на общепринятых предположениях, таких как идеальная жидкость и длинноволновое приближение. В рамках указанных предположений все результаты являются строгими.

В настоящей работе рассматривается невращающаяся осевая струя в потенциально вращающемся потоке окружающей жидкости. Однако предполагается, что движение жидкости в струе может качественно отражать некоторые важные закономерности осевого движения жидкости в ядре торнадоподобного вихря, хотя жидкость в ядре вихря вращается по закону, близкому к твердотельному. Это связано с тем, что течение в трубе вне ядра вихря близко к потенциально вращательному, а внутри ядра носит струйный характер [3–5]. В то же время в рамках рассматриваемой задачи учитываются два фактора: вращение внешнего потока и его взаимодействие с течением в струе. Оба эти фактора могут оказывать существенное влияние на движение жидкости в ядре торнадоподобного вихря. Тогда можно ожидать, что теоретические результаты для струи по крайней мере качественно будут соответствовать экспериментальным данным, полученным для торнадоподобных вихрей в трубах переменного радиуса. Такое сравнение проводится в конце статьи. В результате оценивается влияние рассматриваемого механизма на течение в ядре вихря.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается несжимаемая невязкая однородная жидкость. Течение считается стационарным и вращательно-симметричным. Вводится цилиндрическая система координат  $(r, \varphi, z)$ , где  $r$  — радиус;  $\varphi$  — азимутальный угол; ось  $z$  направлена вдоль оси симметрии. Жидкость занимает область  $z \geq 0, r \leq r_0(z)$ , где  $r_0(z)$  — радиус трубы, заданная функция  $z$ . Область, занимаемая течением, разбивается на две: область I ( $r \leq r_1(z)$ ) и область II ( $r_1(z) \leq r \leq r_0(z)$ ). Область I — струя, II — внешнее

течение. На границе  $r_1$  может наблюдаться разрыв касательной к ней компоненты скорости. Параметры течения при  $z = 0$  считаются известными. Исследуется его эволюция в зависимости от координаты  $z$ .

При переходе к безразмерным величинам вводятся масштабы длины, скорости и плотности. За единицу длины принимается характерный масштаб изменений вдоль оси  $z$ ; за единицу скорости — величина вращательной компоненты скорости в области II при  $z = 0$ ,  $r = r_0$ ; плотность жидкости полагается равной единице. Далее все величины берутся в безразмерном виде, за исключением случаев, которые оговорены особо.

Вводятся следующие обозначения:  $(u, v, w)$  — компоненты вектора скорости, соответствующие  $(r, \varphi, z)$ ,  $p$  — давление,  $\delta$  — безразмерное значение  $r_0$  при  $z = 0$ . Считается, что  $\delta \ll 1$ , т. е. радиус трубы меняется медленно с изменением координаты  $z$ .

Для перехода к длинноволновому приближению совершаются растяжения координат и функций [1]:

$$r^2 \rightarrow \delta^2 \eta, \quad z \rightarrow z, \quad 2ur \rightarrow \delta^2 q, \quad vr \rightarrow \delta A, \quad w \rightarrow w, \quad p \rightarrow p.$$

При этом границы  $r_0(z)$  и  $r_1(z)$  переходят в  $\eta_0(z)$  и  $\eta_1(z)$ , причем  $\eta_0(0) = 1$  согласно определению  $\delta$ .

В результате уравнения движения и неразрывности принимают вид

$$\begin{aligned} qw_\eta + ww_z = -p_z, \quad \frac{\delta^2}{2} \left( qq_\eta - \frac{q^2}{2\eta} + wq_z \right) - \frac{A^2}{\eta} = -2\eta p_\eta, \\ qA_\eta + wA_z = 0, \quad q_\eta + w_z = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Индексами из независимых переменных обозначаются соответствующие частные производные.

В качестве краевых условий принимаются следующие:

$$q = A = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0. \quad (1.2)$$

На границе областей  $\eta = \eta_1$  давление считается непрерывным и выполняется кинематическое условие

$$q = w\eta_{1z}. \quad (1.3)$$

При  $\eta = \eta_0$  выполнено условие непротекания

$$q = w\eta_{0z}. \quad (1.4)$$

Далее слагаемые в (1.1), имеющие множитель  $\delta^2$ , считаются малыми и опускаются, а при переходе к смешанным переменным Эйлера — Лагранжа система преобразуется аналогично тому, как это сделано в [1, 2]. Преобразованные уравнения выводятся для областей I и II по отдельности.

Вводятся новые независимые переменные  $z'$ ,  $\nu$  ( $0 \leq \nu \leq 1$ ) по соотношениям  $z = z'$ ,  $\eta = R(z', \nu)$ , где  $R$  удовлетворяет уравнению

$$wR_{z'} = q \quad (1.5)$$

и следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} \text{-- в области I} \quad R(z', 0) = 0, \quad R(z', 1) = \eta_1, \quad R(0, \nu) = \nu\eta_{10}; \\ \text{-- в области II} \quad R(z', 0) = \eta_0, \quad R(z', 1) = \eta_1, \quad R(0, \nu) = (1 - \nu) + \nu\eta_{10}. \end{aligned}$$

Здесь  $\eta_{10} = \eta_1(0)$ , учтено, что  $\eta_0(0) = 1$ . При таком определении  $R$  краевые условия (1.2) (для  $q$ ) и (1.3), (1.4) выполняются автоматически. Незвестная граница  $\eta_1$  перешла в известную  $\nu = 1$ . Если пренебречь слагаемыми с  $\delta^2$ , в переменных  $z'$ ,  $\nu$  система (1.1) принимает вид (далее штрих при  $z'$  опускается)

$$wA_z = 0, \quad \frac{A^2}{2R^2} R_\nu = p_\nu, \quad R_\nu w w_z = -R_\nu p_z + R_z p_\nu, \quad q_\nu + R_\nu w_z - R_z w_\nu = 0.$$

Из первого уравнения следует, что  $A = A(\nu)$ . Тогда из второго уравнения интегрированием по  $\nu$  от  $\nu$  до 1 выражается  $p$ , результат подставляется в третье. С помощью (1.5) из четвертого уравнения исключается  $q$ . В результате получается система двух уравнений

$$ww_z = -p_{1z} - (A_1^2/(2R_1))_z + \left( \int_{\nu}^1 (2R)^{-1}(A^2)_{\nu} d\nu \right)_z, \quad (wR_{\nu})_z = 0. \quad (1.6)$$

Здесь  $A_1, p_1, R_1$  — значения соответствующих величин при  $\nu = 1$  (на границе между областями I и II). Отметим, что уравнения будут иметь одинаковый вид (1.6) в областях I и II. Разными могут быть значения  $A_1$ , поскольку при переходе через границу допускается скачок касательной к ней компоненты вектора скорости. Значения  $p_1$  и  $R_1$  в областях I и II одинаковы в силу непрерывности давления и определения  $R$ .

Первоначально строим решение некоторого специального вида в области II:

$$w = w_2(z), \quad A = 1, \quad R = (1 - \nu)\eta_0(z) + \nu\eta_1(z). \quad (1.7)$$

Заметим, что решения (1.7) хорошо аппроксимируют реальные течения вне ядра вихря [5]. Подставляя (1.7) в (1.6), найдем  $p_{1z}$ :

$$-2p_{1z} = (1/\eta_1)_z + (w_{20}^2(1 - \eta_{10})^2/(\eta_0 - \eta_1)^2)_z.$$

Здесь  $w_{20} = w_2(0)$ ,  $\eta_{10} = \eta_1(0)$ ,  $\eta_0(0) = 1$ . Полученное значение  $p_{1z}$  подставляется в систему (1.6) для области I. Окончательно для области I получим уравнения

$$\left\{ w^2 + \frac{A_1^2 - 1}{\eta_1} - w_{20}^2 \frac{(1 - \eta_{10})^2}{(\eta_0 - \eta_1)^2} - \int_{\nu}^1 R^{-1}(A^2)_{\nu} d\nu \right\}_z = 0, \quad (wR_{\nu})_z = 0, \quad (1.8)$$

где  $A_1$  — значение  $A$  при  $\nu = 1$  в области I (в общем случае оно не равно 1); величина  $R_1$  заменена на  $\eta_1$ . Таким образом, исследование течения в струе свелось к изучению поведения решений системы (1.8). Уравнения (1.8) решаются с начальными данными при  $z = 0$ .

Система уравнений, качественно подобная (1.8), получена и исследована в [1, 2]. Показано, что уравнения значительно упрощаются и появляется возможность получить строгие аналитические оценки, если интегральный член в первом уравнении равен нулю. При этом, как показано в [2], основные закономерности поведения ядра вихря одинаковы при наличии или отсутствии этого слагаемого. Таким образом, чтобы понять основные закономерности, первоначально ограничимся случаем  $A_{\nu} = 0$ . Легко видеть, что из условия  $A_{\nu} = 0$  следует  $A = 0$ , т. е. в этом случае жидкость в струе не имеет компоненты завихренности вдоль оси.

Положим  $A = 0$  (тогда также  $A_1 = 0$ ). Проинтегрируем (1.8) от 0 до  $z$ . Далее первое уравнение решается относительно  $\eta_0$ . Из второго интегрированием по  $\nu$  с учетом того, что  $\eta_1 = R(z, 1)$ , выражается  $\eta_1$ . В результате получаем

$$\eta_0 = f(\psi), \quad f(\psi) = w_{20}(1 - \eta_{10})(w_{20}^2 + \psi - 1/\eta_1 + 1/\eta_{10})^{-1/2} + \eta_1, \quad (1.9)$$

$$\eta_1 = \int_0^1 w_0(\nu)\eta_{10}(w_0^2 + \psi)^{-1/2} d\nu.$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\psi = w^2 - w_0^2$ ,  $w_0$  — значение  $w$  при  $z = 0$ .

Таким образом, задача свелась к исследованию зависимости  $\psi(\eta_0)$ , которая неявным образом выражается уравнениями (1.9).

**2. Исследование структуры решений.** Первоначально исследуем зависимость  $\psi$  (а следовательно,  $w$  и  $\eta_1$ ) от  $\eta_0$  при малых изменениях  $\eta_0$  в окрестности  $\eta_0 = 1$  ( $\eta_0 = 1$  при

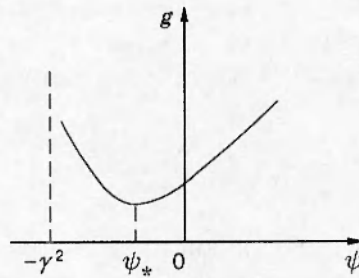


Рис. 1

$z = 0$ );  $\psi(1) = 0$  согласно определению  $\psi$ . В окрестности нуля поведение  $f(\psi)$  определяется значением первой производной в нуле. Тогда  $\psi \approx (\eta_0 - 1)/\lambda$  при  $\psi \ll 1$ , где

$$\lambda = f'(0) = \frac{1 - \eta_{10}}{2w_{20}^2} \left( \frac{1}{\eta_{10}} \int_0^1 \frac{d\nu}{2w_0^2} - 1 \right) - \int_0^1 \frac{\eta_{10} d\nu}{2w_0^2}.$$

Отсюда следует, что в зависимости от знака  $\lambda$  поведение  $\psi$  при изменении  $\eta_0$  качественно различно. Например, при  $\lambda > 0$  с ростом  $\eta_0$  (т. е. радиуса сопла)  $\psi$ ,  $w$  возрастают, а  $\eta_1$  убывает; при  $\lambda < 0$   $\psi$ ,  $w$  убывают, а  $\eta_1$  возрастает.

Исследуем нелинейную стадию зависимости  $\psi(\eta_0)$ . Для этого изучим свойства функции  $f(\psi)$ . Считаем, что  $w_0(\nu)$  удовлетворяет неравенствам  $0 < \gamma \leq w_0(\nu) < \infty$ . Пусть  $f'(0) \neq 0$ . Тогда в силу теоремы о неявной функции и определений  $\eta_1$  и  $f(\psi)$  с учетом ограничений на  $w_0(\nu)$  уравнения (1.9) имеют решения до тех пор, пока  $f'(\psi) \neq 0$ ,  $\psi \geq -\gamma^2$ ,  $f(\psi)$  ограничена. Введем следующие обозначения:  $g(\psi) = w_{20}^2 + \psi - 1/\eta_1 + 1/\eta_{10}$ . Тогда

$$f(\psi) = w_{20}(1 - \eta_{10})g^{-1/2} + \eta_1. \quad (2.1)$$

Дифференцируя  $g(\psi)$ , получим

$$g'(\psi) = 1 - \eta_1^{-2} \int_0^1 (w_0 \eta_{10} / 2) (w_0^2 + \psi)^{-3/2} d\nu,$$

$$g''(\psi) = \frac{3}{4\eta_1^2} \int_0^1 \frac{w_0 \eta_{10} d\nu}{(w_0^2 + \psi)^{5/2}} - \frac{1}{2\eta_1^3} \left( \int_0^1 \frac{w_0 \eta_{10} d\nu}{(w_0^2 + \psi)^{3/2}} \right)^2.$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, легко показать [1], что  $g''(\psi) > 0$ . Таким образом,  $g(\psi)$  — выпуклая вниз функция. Дополнительно предполагаем, что  $g'(-\gamma^2) < 0$  (для физически реальных течений это неравенство всегда выполнено, поскольку  $g'(\psi) \rightarrow -\infty$  при  $\psi \rightarrow -\gamma^2$  в силу расходимости интеграла). Очевидно,  $g'(\psi) \rightarrow 1$  при  $\psi \rightarrow \infty$ . Тогда из выпуклости  $g(\psi)$  следует, что существует единственное значение  $\psi = \psi_*$  такое, что  $g'(\psi_*) = 0$ . Имеется четыре качественно различных вида функции  $g(\psi)$ :

- 1)  $g'(0) > 0$ ,  $\psi_* < 0$ ,  $g(\psi_*) > 0$ ;
- 2)  $g'(0) > 0$ ,  $\psi_* < 0$ ,  $g(\psi_*) < 0$ ;
- 3)  $g'(0) < 0$ ,  $\psi_* > 0$ ,  $g(\psi_*) > 0$ ;
- 4)  $g'(0) < 0$ ,  $\psi_* > 0$ ,  $g(\psi_*) < 0$ .

Первый вид представлен на рис. 1. Остальные отличаются от него сдвигом графика вниз (так что минимум становится ниже оси абсцисс), вправо ( $\psi_* > 0$ ) и вправо вниз.

В зависимости от вида  $g(\psi)$  различно и поведение  $f(\psi)$ . Из (2.1) следует

$$f'(\psi) = -(w_{20}(1 - \eta_{10})g^{-3/2}/2)g'(\psi) + \eta_1'(\psi). \quad (2.2)$$

I. Пусть  $g'(0) > 0$ . Тогда  $g'(\psi) > 0$  для  $\psi > 0$ . Так как  $\eta'_1(\psi) < 0$ , то  $f'(\psi) < 0$  для  $\psi > 0$ . Таким образом,  $f(\psi)$  — монотонно убывающая функция для  $\psi > 0$ ,  $f(\psi) \rightarrow 0$  при  $\psi \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что уравнения (1.9) имеют единственное решение  $\psi(\eta_0)$ , если  $\eta_0$  убывает. При этом  $\psi$  и  $w$  возрастают с уменьшением  $\eta_0$ , а  $\eta_1$  убывает.

Исследуем поведение  $f(\psi)$  при  $\psi < 0$ , по-прежнему считая  $g'(0) > 0$ .

1. Пусть  $g(\psi_*) > 0$ . Тогда возможны два случая:

а)  $f'(\psi) < 0$  для всех  $\psi < 0$  вплоть до  $\psi = -\gamma^2$ . Тогда  $f(\psi)$  — монотонно убывающая функция на всем интервале  $\psi > -\gamma^2$ . Отсюда следует, что (1.9) имеет единственное решение для всех  $\eta_0 < \eta_{0*}$ , где  $\eta_{0*}$  определяется уравнением  $\eta_{0*} = f(-\gamma^2)$ ;  $\psi$  и  $w$  — монотонно убывающие функции  $\eta_0$ , а  $\eta_1$  — возрастающая. При  $\eta_0 > \eta_{0*}$  решения не существует. Решение перестает существовать из-за обращения  $w(\nu)$  в нуль в точках  $\nu$ , где  $w_0(\nu) = \gamma$ . Качественно график  $f(\psi)$  изображен на рис. 2, а (кривая 1).

б)  $f'(\psi) < 0$  для всех  $\psi > \psi_1$ , где  $f'(\psi_1) = 0$  и  $-\gamma^2 < \psi_1 < 0$ . Тогда в силу теоремы о неявной функции решение (1.9) существует лишь для  $\eta_0 \leq \eta_{01}$ , где  $\eta_{01} = f(\psi_1)$ . Здесь зависимость  $\psi$  от  $\eta_0$  также монотонно убывающая на всем интервале  $\eta_0 > \eta_{01}$ . Решение перестает существовать при  $\eta_0 \rightarrow \eta_{01}$  из-за обращения производных от  $\psi$  по  $\eta_0$  в бесконечность (кривая 2 на рис. 2, а).

2. Пусть теперь  $g(\psi_*) < 0$ . Тогда существует такое  $\psi_{1*}$  ( $\psi_* < \psi_{1*} < 0$ ), что  $g(\psi_{1*}) = 0$ ,  $f(\psi) \rightarrow \infty$  при  $\psi \rightarrow \psi_{1*}$ ,  $f'(\psi) < 0$  для  $\psi \geq \psi_{1*}$ . Отсюда следует, что решение существует для всех  $\eta_0$ . Здесь также  $\psi$  — монотонно убывающая функция  $\eta_0$ , причем  $\psi \rightarrow \psi_{1*}$  при  $\eta_0 \rightarrow \infty$  (кривая 3 на рис. 2, а).

Таким образом, если  $g'(0) > 0$ , то возможны три случая поведения  $\psi(\eta_0)$ : I.1а, I.1б и I.2. Исследуем свойства  $f(\psi)$  при  $g'(0) < 0$ .

II. Пусть  $g'(0) < 0$ . Здесь в силу (2.2) и неравенства  $\eta'_1(\psi) < 0$  возможны два случая:  $f'(0) > 0$ ,  $f'(0) < 0$ .

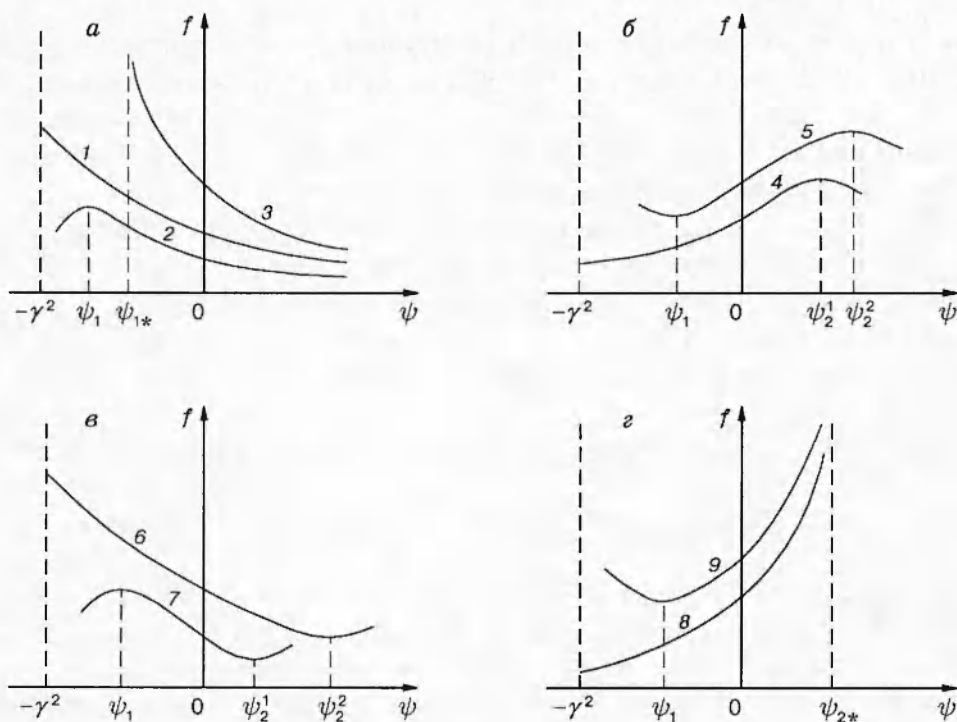


Рис. 2

1. Пусть  $f'(0) > 0$ ,  $g(\psi_*) > 0$ . Так как  $g'(\psi)$  возрастает с ростом  $\psi$  вплоть до нуля, а  $\eta'_1 < 0$ , то существует такое  $\psi_2 > 0$  ( $\psi_2^1$  и  $\psi_2^2$  на рис. 2,б), что  $f'(\psi_2) = 0$ . Тогда в силу теоремы о неявной функции при  $\psi > 0$  решение существует лишь для  $\psi < \psi_2$ . При  $\psi < 0$  возможны два случая:

а)  $f'(\psi) > 0$  для всех  $-\gamma^2 \leq \psi \leq 0$ , тогда решение существует вплоть до  $\psi = -\gamma^2$  (кривая 4 на рис. 2,б);

б)  $f'(\psi)$  обращается в нуль при некотором  $-\gamma^2 < \psi_1 < 0$ , тогда решение существует вплоть до  $\psi = \psi_1$  (кривая 5 на рис. 2,б).

В обоих случаях  $\psi$  возрастает с увеличением  $\eta_0$  и решение существует на ограниченном отрезке значений  $\eta_{01} < \eta_0 < \eta_{02}$ , где  $\eta_{02} = f(\psi_2)$  ( $\psi_2 = \psi_2^1$  и  $\psi_2 = \psi_2^2$  для кривых 4 и 5 соответственно),  $\eta_{01}$  равно либо  $f(-\gamma^2)$ , либо  $f(\psi_1)$ . Решение перестает существовать: при  $\eta_0 \rightarrow \eta_{02}$  из-за обращения производных в бесконечность; при  $\eta_0 \rightarrow \eta_{01}$  из-за обращения либо осевой скорости внутри ядра в нуль (случай II.1а), либо производных в бесконечность (случай II.1б) (рис. 2,б).

2. Пусть  $f'(0) < 0$ ,  $g(\psi_*) > 0$ . Тогда возможны два новых случая для  $f(\psi)$ :

а)  $f'(\psi) < 0$  для  $-\gamma^2 < \psi < \psi_2^2$ , где  $0 < \psi_2^2 < \infty$  и  $f'(\psi_2^2) = 0$  (кривая 6 на рис. 2,в);

б)  $f'(\psi) < 0$  для  $\psi_1 < \psi < \psi_2^1$ , где  $-\gamma^2 < \psi_1 < 0$ ,  $0 < \psi_2^1 < \infty$  и  $f'(\psi_1) = f'(\psi_2^1) = 0$  (кривая 7 на рис. 2,в).

3. Пусть  $g'(0) < 0$ ,  $g(\psi_*) < 0$ . Так как  $\psi_* > 0$  при  $g'(0) < 0$ , то типы поведений  $f(\psi)$  при  $\psi < 0$  будут такие же, как в случаях II.1 и II.2. При  $\psi > 0$  появятся отличия. Так как  $g(0) > 0$ ,  $g(\psi_*) < 0$ ,  $\psi_* > 0$ , то существует  $\psi_{2*}$  такое, что  $g(\psi_{2*}) = 0$ ,  $0 < \psi_{2*} < \psi_*$ . Так как  $g(\psi_{2*}) = 0$ , то из (2.1) следует, что  $f(\psi) \rightarrow \infty$  при  $\psi \rightarrow \psi_{2*}$ .

Пусть  $f'(0) > 0$ . Тогда, если  $f'(\psi) > 0$  для  $0 < \psi < \psi_{2*}$ , то возможны два новых случая:

а) решение существует при всех  $\eta_0 > f(-\gamma^2)$  (кривая 8 на рис. 2,г);

б) решение существует при всех  $\eta_0 > f(\psi_1)$ , где  $\psi_1$  такое, что  $f'(\psi_1) = 0$  (кривая 9 на рис. 2,г).

В обоих случаях  $\psi$  возрастает с ростом  $\eta_0$ , причем  $\psi \rightarrow \psi_{2*}$  при  $\eta_0 \rightarrow \infty$ .

Пусть  $f'(0) < 0$ . Отсюда следует, что вблизи нуля  $f(\psi)$  будет убывать с ростом  $\psi$ . Поскольку  $f(\psi) \rightarrow \infty$  при  $\psi \rightarrow \psi_{2*}$ , то существует  $\psi_2$  такое, что  $f'(\psi_2) = 0$ ,  $0 < \psi_2 < \psi_{2*}$ . При этом будут реализовываться случаи II.2а и II.2б, а новых случаев не возникнет.

Таким образом, доказаны следующие утверждения:

— при  $g'(0) > 0$ ,  $g(\psi_*) > 0$  решение  $\psi(\eta_0)$  существует для  $\eta_0$  из интервала  $0 < \eta_0 < \eta_{01}$ , где  $\eta_{01}$  равно либо  $f(-\gamma^2)$ , либо  $f(\psi_1)$ . В этом случае  $\psi'(\eta_0) < 0$ ;

— при  $g'(0) > 0$ ,  $g(\psi_*) < 0$  решение существует для всех  $\eta_0$  и  $\psi'(\eta_0) < 0$ ;

— при  $g'(0) < 0$ ,  $f'(0) > 0$ ,  $g(\psi_*) > 0$  решение существует для  $\eta_0$  из отрезка  $\eta_{01} < \eta_0 < \eta_{02}$ , где  $\eta_{01}$  равно либо  $f(-\gamma^2)$ , либо  $f(\psi_1)$ , а  $\eta_{02} = f(\psi_2^1)$  в случае II.1а и  $\eta_{02} = f(\psi_2^2)$  в случае II.1б,  $\psi'(\eta_0) > 0$ ;

— при  $g'(0) < 0$ ,  $f'(0) > 0$ ,  $g(\psi_*) < 0$  решение существует для  $\eta_0$  из интервала  $\eta_{01} < \eta_0 < \infty$  и  $\psi'(\eta_0) > 0$ ;

— при  $g'(0) < 0$ ,  $f'(0) < 0$  решение существует для  $\eta_0$  из отрезка  $\eta_{02} < \eta_0 < \eta_{01}$  и  $\psi'(\eta_0) < 0$ .

В расширяющихся соплах решение для всех  $\eta_0 \rightarrow \infty$  существует лишь в трех случаях: I.2, II.3а и II.3б. При этом в случае I.2  $\psi$ ,  $w$  убывают, а радиус струи  $\eta_1$  возрастает до конечных значений при  $\eta_0 \rightarrow \infty$ . В случаях II.3  $\psi$ ,  $w$  возрастают, а радиус струи убывает до конечных значений при  $\eta_0 \rightarrow \infty$ . В сужающихся соплах существование решения при всех  $\eta_0 \rightarrow 0$  возможно в трех случаях: I.1а, I.1б, I.2. При всех  $\eta_0$  от 0 до  $\infty$  решение существует, только если реализован случай I.2.

Некоторым упрощением задачи является случай тонкой струи. Предположим, что радиус струи много меньше радиуса трубы ( $\eta_1 \ll \eta_0$ ). Тогда, пренебрегая  $\eta_1$  по сравнению с  $\eta_0$ , опускаем слагаемое  $\eta_1$  в правой части второго уравнения (1.9) и  $\eta_{10}$  в выражении  $1 - \eta_{10}$ . В результате получим, что знаки  $f'(\psi)$  и  $g'(\psi)$  противоположны. Легко видеть, что при этом из приведенных 9 случаев останется только четыре: I.1б, I.2, II.1а, II.3а. Отметим, что в случаях I.1б и I.2 зависимость радиуса струи от радиуса сопла монотонно возрастающая, а в II.1а и II.3а монотонно убывающая. При этом в сужающихся соплах решение существует вплоть до  $\eta_0 \rightarrow 0$  в случаях I.1б и I.2, а в расширяющихся — вплоть до  $\eta_0 \rightarrow \infty$  в случаях I.2 и II.3а.

**3. Сравнение теории с экспериментами.** В рамках предложенной модели рассчитывается эволюция течения в струе вдоль оси в зависимости от радиуса сопла. Для этого, согласно (1.9), на входе в сопло надо знать следующие параметры: радиус струи, циркуляцию скорости вокруг оси во внешнем течении, осевые скорости во внешнем течении и струе.

Сравним полученные результаты с данными экспериментов по исследованию торнадоподобных вихрей в трубах переменного радиуса, с тем чтобы установить влияние рассмотренного механизма на течение в вихре. Следуя [6], предположим, что для торнадоподобного вихря, имеющего такие же параметры на входе для внешнего потока и аксиальной скорости в ядре, что и струя, в месте непродолжаемости решения для струи возникает распад или прыжок вихря. Иными словами, на основе анализа поведения струи делаются оценки поведения ядра вихря. Проведем сопоставление с экспериментами [4], где имеются измерения как местоположения распада вихря, так и профилей скорости.

Согласно [4] профили размерных азимутальной и осевой компонент скорости в вихре до распада имеют вид

$$V = (K/r)(1 - \exp(-\alpha r^2)), \quad W = W_1 + W_2 \exp(-\alpha r^2), \quad (3.1)$$

где  $\alpha$ ,  $K$ ,  $W_1$ ,  $W_2$  — постоянные.

В качестве радиуса ядра примем значение, где вращательная компонента скорости достигает максимума. Согласно (3.1) это происходит при  $\alpha r_1^2 \approx 1,25$ . Для аналитических оценок осевые скорости внешнего течения и в ядре аппроксимируем их средними по сечению значениями. Из (3.1) следует, что средняя осевая скорость в ядре равна  $W_0 = W_1 + W_2(1 - \exp(-\alpha r_1^2))/(\alpha r_1^2) \approx W_1 + 0,57W_2 = 0,43W_1 + 0,57W_{\max}$ , где  $W_{\max} = W_1 + W_2$  — максимальное значение осевой скорости, достигаемое на оси, при  $r = 0$ . Скорости обезразмериваются по величине  $V_0 = K/r_{00}$  ( $r_{00}$  — радиус трубы на входе). Значения  $W_1$ ,  $W_{\max}$ ,  $K$  берутся из графиков, приведенных в [4, рис. 2]. Величина  $K$  рассчитывается по данным, взятым на расстоянии  $0,8r_{00}$ , поскольку вблизи стенок трубы происходит резкое падение вращательной компоненты скорости и отклонение от закона (3.1). До расстояния  $0,8r_{00}$  профили  $V$  хорошо аппроксимируются соотношением (3.1). Тогда  $w_{20} = W_1/V_0$ ,  $w_0 = W_0/V_0$ .

Интегрируя (1.9) и выражение для  $g'(0)$ , считая  $w_0$  постоянной, найдем

$$g'(0) = 1 - 1/(2\eta_{10}w_0^2), \quad (3.2)$$

$$\eta_0 = w_{20}(1 - \eta_{10})[w_{20}^2 + \psi - (w_0^2 + \psi)^{1/2}/(w_0\eta_{10}) + 1/\eta_{10}]^{-1/2} + w_0\eta_{10}(w_0^2 + \psi)^{-1/2},$$

где  $\eta_{10} = (r_{10}/r_{00})^2$  ( $r_{10}$  — радиус ядра на входе). Поскольку на всех графиках [4, рис. 2]  $\eta_{10} < 0,1 \ll 1$ , то расчеты проведем в приближении тонкой струи. Для оценок по порядку величины такой точности достаточно. Кроме того, как следует из (1.9) и [4, рис. 2], для реальных профилей аксиальной компоненты скорости выражение, стоящее под знаком интеграла в формуле для  $\eta_1$ , есть интегрируемая функция при  $\psi \rightarrow -w_0^2(\nu)$  при каком-либо  $\nu$ . Отсюда следует, что  $\eta_1$  имеет порядок величины  $\eta_{10}$ . Если в качестве  $w_0$  взять среднее

значение, то  $\eta_1$  будет стремиться к  $\infty$  при  $\psi \rightarrow -w_0^2$ , что не соответствует реальной ситуации. Пренебрегая во втором уравнении (3.2) вторым слагаемым и  $\eta_{10}$  по сравнению с 1, после преобразований получим

$$\eta_0 = f(\psi) \approx w_{20} \{ [(w_0^2 + \psi)^{1/2} - w_0(1 - g'(0))]^2 + w_{20}^2 - (w_0 g'(0))^2 \}^{-1/2}. \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что тип  $f(\psi)$  определяется знаком  $g'(0)$  и знаком разности  $w_{20}^2 - (w_0 g'(0))^2$ . Как показано ниже, оба они положительны, т. е.  $f(\psi)$  принадлежит случаю I.16. Таким образом, в расширяющейся трубе решение продолжаемо на конечный интервал до тех пор, пока  $f(\psi)$  не достигнет максимума. Из (3.3) следует, что максимум достигается тогда, когда выражение в квадратных скобках обращается в нуль. При этом мы получим максимальное значение радиуса трубы, до которого существует непрерывное решение. Будем считать, что в месте непродолжаемости решения возникает распад или прыжок вихря. Тогда радиус трубы  $r_*$  и расстояние вдоль оси  $z_*$ , при которых происходят эти явления, примерно равны

$$r_*/r_{00} \approx w_{20}^{1/2} \{ w_{20}^2 - (w_0 g'(0))^2 \}^{-1/4}, \quad z_*/r_{00} \approx [(r_*/r_{00}) - 1] \operatorname{ctg} \alpha, \quad (3.4)$$

где  $\alpha$  — полуугол раствора трубы,  $\alpha = 1,43^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha \approx 40$ . Значения  $W_1$ ,  $W_{\max}$ ,  $W_0$ ,  $V_0$  (см/с),  $r_{10}/r_{00}$ ,  $Re$ ,  $\Omega$ , рассчитанные на основе рис. 2 в работе [4], а также  $g'(0)$ ,  $(r_*/r_{00})_t$ ,  $(z_*/r_{00})_t$ , вычисленные по формулам (3.2), (3.4), и экспериментальные значения  $(r_*/r_{00})_e$ ,  $(z_*/r_{00})_e$ , полученные на основе графиков (см. [4, рис. 17]), приведены в таблице.

Параметр течения	Re							
	3220		4540			6000		
$\Omega$	1,068	1,541	0,727	1,068	1,282	0,727	1,068	1,282
$W_1$	7,67	7,23	11	11	10,9	14,68	14,25	13,6
$W_{\max}$	12,27	15,9	16	20,25	22,5	21,9	27,84	32
$W_0$	10,29	12,17	13,85	16,27	17,51	18,8	22	24,09
$V_0$	3	4,23	3,12	4,29	5,25	4	5,92	7,12
$r_{10}/r_{00}$	0,31	0,31	0,29	0,29	0,29	0,28	0,28	0,28
$g'(0)$	0,56	0,37	0,7	0,59	0,47	0,71	0,54	0,45
$(r_*/r_{00})_t$	1,23	1,13	1,47	1,42	1,24	1,55	1,34	1,3
$(r_*/r_{00})_e$	1,25	1,04 ÷ 1,09	—	1,19 ÷ 1,24	1,10 ÷ 1,14	—	1,15 ÷ 1,18	1,04
$(z_*/r_{00})_t$	9,2	5,2	18,8	16,8	9,6	22	13,6	12
$(z_*/r_{00})_e$	9,6	1,7 ÷ 3,2	—	7,6 ÷ 9,2	3,9 ÷ 5,7	—	5,8 ÷ 7,0	1,7

Из таблицы следует, что имеется качественное соответствие с экспериментами. Как указано в [4], для фиксированных чисел Рейнольдса возрастание  $\Omega$  приводит к сдвигу распада вихря вверх по потоку, т. е. распад возникает при меньших радиусах трубы, так как труба расширяется вниз по потоку. Хотя модель может иметь отношение к осесимметричному распаду, тем не менее, согласно расчетам по формуле (3.4), приведенным в таблице, увеличение  $\Omega$  при заданном числе  $Re$  приводит к уменьшению  $(r_*/r_{00})_t$  для случаев, приведенных в [4, рис. 2]. Расчетные количественные значения в основном получились больше экспериментальных, однако дают возможность делать оценки по порядку величины. Более значительные различия для  $z_*$  по сравнению с  $r_*$  объясняются малым углом раствора трубы в экспериментах и как следствие большой чувствительностью осевого положения распада  $z_*$  к малым изменениям  $r_*$ .



В статье [4] отмечено, что зависимость положения распада вихря при заданном  $\Omega$  от числа  $Re$  не всегда монотонна. Чаще с ростом  $Re$  сдвиг происходит вверх по потоку, но иногда наоборот. Согласно данным таблицы строгая монотонность также отсутствует в зависимости  $(r_*/r_{00})_t$  от числа  $Re$ .

Отметим, что расчет  $g'(0)$  и  $g(\psi_*)$  по экспериментальным данным для течений до распада вихря, приведенным в обзоре [5, табл. 1], дает  $g'(0) > 0$ ,  $g(\psi_*) > 0$ . Отсюда следует, что течения до распада относятся к случаю либо I.1a, либо I.1б. В обоих случаях, согласно модели, в расширяющихся трубах непрерывное решение существует лишь для ограниченных радиусов трубы, что качественно согласуется с экспериментами.

Таким образом, можно сделать вывод, что механизм взаимодействия осевой струи с внешним вращающимся потоком, рассмотренный в модели, по крайней мере для приведенных экспериментальных данных проявляется и при движении жидкости в ядре торнадоподобного вихря в трубе переменного радиуса. Его учет, выполненный на основе исследования поведения струи, позволяет делать прогноз о возможности возникновения распада вихря и давать оценку его местоположения.

Взаимодействие осевой струи с внешним вращающимся потоком носит сложный характер, поскольку даже в рассмотренной достаточно точной постановке задачи получено большое количество возможных типов движений, зависящих от условий на входе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Никулин В. В. Аналог уравнений вихревой мелкой воды для полых и торнадоподобных вихрей. Высота стационарного торнадоподобного вихря // ПМТФ. 1992. № 2. С. 47–52.
2. Никулин В. В. Движение завихренной жидкости в ядре вертикального торнадоподобного вихря // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 81–87.
3. Сарпкайя Т. Влияние положительного градиента давления на распад вихря // Ракет. техника и космонавтика. 1974. Т. 12, № 5. С. 34–41.
4. Faler L. H., Leibovich S. Disrupted states of vortex flow and vortex breakdown // Phys. Fluids. 1977. V. 20, N 9. P. 1385–1400.
5. Leibovich S. The structure of vortex breakdown // Ann. Rev. Fluid Mech. 1978. V. 10. P. 221–246.
6. Mager A. Dissipation and breakdown of a win-tip vortex // J. Fluid Mech. 1972. V. 55, N 4. P. 609–628.

*Поступила в редакцию 5/1 1998 г.,  
в окончательном варианте — 14/VII 1998 г.*

---