ПМТФ, № 1, 1970

ТЕПЛОВАЯ И ДИФФУЗИОННАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ С ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Ф. Г. Волков, А. М. Головин

(Москва)

Рассмотрена задача о нестационарном испарении или росте излучающей капли с равномерно распределенными внутренними источниками тепла. Предположение о малости чисел Рейнольдса $R = ua / \nu \ll 1$, Пекле $P_D = ua / D \ll 1$ (a — радиус капли, u — скорость относительного движения, ν, D, χ — коэффициенты вязкости, диффузии и температуропроводности парогазовой среды) позволило пренебречь конвективным переносом пара и тепла и считать поля концентрации и температуры сферически симметричными [1]. Ввиду того что плотность насыщенного пара меньше плотности жидкости, не учитывался конвективный поток, обусловленный изменением радиуса капли [2].

Ранее показано [3,4], что при $\varkappa \ll \varkappa_r$ ($\varkappa$, $\varkappa_r$ — коэффициенты молекулярной и лучистой теплопроводности) существует область, ограниченная $r \lesssim (1 / \alpha) \sqrt{\varkappa / \varkappa_r}$ (α — коэффициент поглощения излучения в газе), в которой влияние излучения на релаксацию температуры парогазовой среды несущественно. Если выполняется условие $a \ll (1 / \alpha) \sqrt{\varkappa / \varkappa_r}$, то температура на внешней границе указанной области практически не будет отличаться от температуры на бесконечности $T = T_\infty$, что позволяет не учитывать в уравнении энергии члены, связанные с переносом энергии излучением.

Считается, что длина пробега молекул в газе меньше радиуса капли, а потому можно пренебречь скачками концентрации и температуры вблизи поверхности капли [2].

1. Основные уравнения. Рассматривается диффузионная и тепловая релаксация капли с внутренними источниками тепла, которая с температурой T_0 мгновенно попадает в среду с температурой T_∞. Все величины, относящиеся к капле, обозначены символами со штрихами, к среде — без штриха. Величины, относящиеся к границе раздела, снабжены индексом a, к жидкости или парам — индексом 1, к газу — индексом 2. Суммарные величины обозначены без индексов. Так, полное число молекул к единице объема $n = n_1 + n_2$. Пусть m — масса молекулы, ρ — плотность, v — радиальная компонента скорости среды. Тогда

$$\rho_1 = m_1 n_1, \qquad \rho_2 = m_2 n_2$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \qquad \rho v = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 \tag{1.1}$$

Уравнение нестационарной диффузии при малых числах Пекле имеет вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right)\left(D^* \frac{\partial \rho_1}{\partial r} + A \frac{\partial T}{\partial r}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} D^* = m_2 n D / \rho \\ A = (m_1 n k_T + \rho_1) D^* / T \end{array}\right) \tag{1.2}$$

Здесь D — коэффициент диффузии, k_T — термодиффузионное отношение, T — абсолютная температура.

Действительно, в соответствии с теорией Чепмена и Энскога [5] для бинарной смеси при постоянном давлении и в отсутствие внешних сил относительная скорость компонент равна

$$v_1 - v_2 = -\frac{n^2}{n_1 n_2} D \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{n_1}{n} + \frac{k_T}{T} \frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{1.3}$$

Рассматривая парогазовую смесь как идеальный газ, можно уравнение (1.3) преобразовать к виду

$$v_1 - v_2 = -\frac{\rho}{\rho_2\rho_2}\left(D^*\frac{\partial\rho_1}{\partial r} + A\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{1.4}$$

Из уравнений непрерывности

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right)\rho_1 v_1 = 0, \qquad \frac{\partial\rho_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right)\rho_2 v_2 = 0 \tag{1.5}$$

и уравнения (1.3) следует

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right)\rho_1 v_2 = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right)\frac{\rho}{\rho_2}\left(D^*\frac{\partial\rho_1}{\partial r} + A\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{1.6}$$

Далее, исключая v_1 из уравнений (1.1) и (1.3), можно получить

$$v_2 = v + \frac{1}{\rho_2}\left(D^*\frac{\partial\rho_1}{\partial r} + A\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{1.7}$$

Если подставить (1.7) в уравнение (1.6), то уравнение диффузии принимает вид

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right)\rho_1 v = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right)\left(D^*\frac{\partial\rho_1}{\partial r} + A\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{1.8}$$

Пренебрегая из-за большой разности плотностей жидкой и газообразной фазы конвективным членом в уравнении (1.8), можно получить уравнение (1.2).

Плотность потока пара на поверхности капли с учетом граничного условия $v_2 = a^{\cdot}$ при $r = a\ (t)$ ($a^{\cdot}$ — скорость движения границы раздела фаз) равна

$$j = \rho_{1a}(v_{1a} - a^{\cdot}) = -\left[\frac{\rho}{\rho_2}\left(D^*\frac{\partial\rho_1}{\partial r} + A\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right]_a \tag{1.9}$$

Концентрация насыщенного пара ρ_a является известной функцией температуры. В случае небольшого перепада температур между поверхностью капли и температурой среды вдали от капли эту функцию можно аппроксимировать линейной зависимостью

$$\rho_{1a} = \rho_{s\infty}\,[1 + \beta(T_a - T_\infty)/T_\infty] \tag{1.10}$$

Изменение со временем температуры на поверхности капли определяется из решения тепловой задачи.

Предполагая, что перенос энергии от капли к газу происходит посредством излучения, диффузии, теплопроводности и диффузионного термоэффекта, для распределения температуры в газе можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right)\left(\chi^*\frac{\partial T}{\partial r} - B\frac{\partial\rho_1}{\partial r}\right) \tag{1.11}$$

$$B = \frac{kTD^*}{\rho c_p}\left[\frac{5}{2}\left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}\right) + \frac{nk_T\rho}{\rho_1\rho_2}\right]$$

$$\chi^* = \chi - \frac{kTA}{\rho c_p}\left[\frac{5}{2}\left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}\right) - \frac{nk_T\rho}{\rho_1\rho_2}\right]$$

Здесь $\chi = \varkappa / \rho c_p$ — коэффициент температуропроводности, c_p — теплоемкость, k — постоянная Больцмана.

Так как разность температур и концентраций предполагается относительно небольшой, т. е.

$$|T_a - T_\infty| \ll T_\infty, \qquad |\rho_{1a} - \rho_{1\infty}| \ll \rho_{1\infty}$$

то коэффициенты D^*, χ^*, A и B в уравнениях (1.2), (1.11) можно считать постоянными.

Плотность потока лучистой энергии в области $\alpha r \ll \sqrt{\varkappa / \varkappa_r}$ $(\varkappa \ll \varkappa_r)$ равна [4]

$$S_r = \varepsilon\sigma (T_a^4 - T_\infty^4) a^2 / r^2 \simeq 4\varepsilon\sigma T_\infty^3 (T_a - T_\infty) a^2 / r^2 \tag{1.12}$$

Здесь α — коэффициент поглощения излучения в газе, $\varkappa_r$ — коэффициент лучистой теплопроводности, σ — постоянная Стефана — Больцмана, ε — эффективная степень черноты поверхности капли, окруженной парами. Плотность потока энергии, переносимой диффузией вследствие разности в энтальпиях диффундирующих веществ, как известно [5], равна

$$S_D = {}^5/_2 kT\, (n_1 v_1 + n_2 v_2 - nv) \tag{1.13}$$

Формулы (1.1) и (1.3) и определение эффективного коэффициента диффузии D^* позволяют преобразовать (1.13) к виду

$$S_D = \frac{5}{2} kT \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}\right)\left(D^* \frac{\partial \rho_1}{\partial r} + A \frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{1.14}$$

Перенос энергии, обусловленный диффузионным термоэффектом, можно рассчитать по формуле [5]

$$S_t = nkTk_T (v_1 - v_2) = -\frac{nkTk_T\rho}{\rho_1\rho_2}\left(D^* \frac{\partial \rho_1}{\partial r} + A \frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{1.15}$$

Плотность потока энергии, переносимой теплопроводностью, в парогазовой среде с коэффициентом теплопроводности $\varkappa$ равна

$$S_\varkappa = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial r} \tag{1.16}$$

Уравнение переноса энергии в парогазовой среде без учета членов, связанных со среднемассовым потоком и процессами внутреннего трения, имеет вид

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right)(S_r + S_D + S_t + S_\varkappa) = 0 \tag{1.17}$$

Принимая во внимание, что в соответствии с (1.12)

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right) S_r = 0$$

можно из (1.17) получить уравнение (1.11).

Уравнение переноса энергии для $r < a$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \chi' \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r}\right)\frac{\partial T'}{\partial r} + \frac{q}{\rho' c_p'} \tag{1.18}$$

Здесь q — интенсивность внутренних источников тепла, рассчитанная на единицу объема капли. Начальные и граничные условия для системы уравнений (1.2), (1.11) и (1.18)

$$\begin{gathered}
T' = T_0, \quad T = T_\infty, \quad \rho_1 = \rho_{1\infty} \quad \text{при } t = 0,\ r \neq a \\
T' \neq \infty \quad \text{при } r = 0, \qquad T \to T_\infty, \quad \rho_1 \to \rho_{1\infty} \text{ при } r \to \infty \\
T = T' = T_a, \quad \rho_1 = \rho_{1a} \quad \text{при } r = a,\ t \neq 0 \\
-\varkappa \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_a + 4\varepsilon\sigma T_\infty^3 (T_a - T_\infty) - \gamma\left[D^* \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial r}\right)_a + A \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_a\right] = -\varkappa' \left(\frac{\partial T'}{\partial r}\right)_a \\
\left(\gamma = \frac{\rho}{\rho_2} L\right)
\end{gathered} \tag{1.19}$$

Здесь L — удельная теплота парообразования при температуре поверхности. Последнее из условий (1.19) означает баланс потоков энергии на поверхности капли. Следует заметить, что в [10] при определении γ допущена ошибка.

2. Расчет распределения температуры. Решение уравнений (1.2), (1.11) и (1.18) с условиями (1.19) можно искать с помощью преобразования Лапласа

$$F = \frac{r}{a}\int_0^\infty \frac{T - T_\infty}{T_\infty} e^{-st}dt, \qquad F' = \frac{r}{a}\int_0^\infty \frac{T' - T_\infty}{T_\infty} e^{-st}dt, \qquad G = \frac{r}{a}\int_0^\infty \frac{\rho_1 - \rho_{1\infty}}{\rho_{1\infty}} e^{-st}dt$$

Изображения по Лапласу исходных уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} sG &= D^* \frac{d^2G}{dr^2} + sA^* \frac{d^2F}{dr^2} \qquad \left(A^* = A\frac{T_\infty}{\rho_{1\infty}}\right) \\ sF &= \chi^* \frac{d^2F}{dr^2} - sB^* \frac{d^2G}{dr^2} \qquad \left(B^* = B\frac{\rho_{1\infty}}{T_\infty}\right) \\ sF' &= \chi' \frac{d^2F'}{dr^2} + \left(\frac{3\chi'}{sa^2} Q + \frac{T_0 - T_\infty}{T_\infty}\right)\frac{r}{a} \qquad \left(Q = \frac{qa^2}{3\varkappa' T_\infty}\right) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Граничные условия

$$F' = 0 \ \text{ при } r = 0, \qquad F \to 0, \ \ G \to 0 \ \text{ при } r \to \infty$$

$$G = G_a - \frac{\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty}}{s\rho_{1\infty}} + \beta^* F_a, \quad F' = F = F_a \quad \left(\beta^* = \beta\frac{\rho_{s\infty}}{\rho_{1\infty}}\right) \ \text{ при } r = a \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{a}(\varkappa^* - \varkappa' - D^*\gamma^*\beta^*) F_a - \gamma^* D^* \left[\left(\frac{dG}{dr}\right)_a - \frac{G_a}{a}\right] = (\varkappa + A^*\gamma^*)\left(\frac{dF}{dr}\right)_a - \varkappa'\left(\frac{dF'}{dr}\right)_a$$

$$\left(\varkappa^* = \varkappa + 4a\varepsilon\sigma T_\infty^3 + A^*\gamma^* + \gamma^* D^*\beta^*, \ \ \gamma^* = \gamma\frac{\rho_{1\infty}}{T_\infty}\right)$$

Решением этих уравнений при известных граничных значениях $G_a F_a$ являются функции

$$\begin{aligned} G &= G_1 \exp[-\mu_1\sqrt{s}(r - a)] + G_2 \exp[-\mu_2\sqrt{s}(r - a)] \\ F &= F_1 \exp[-\mu_1\sqrt{s}(r - a)] + F_2 \exp[-\mu_2\sqrt{s}(r - a)] \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$F' = F_a \frac{\operatorname{sh} r\sqrt{s/\chi'}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s/\chi'}} + \frac{1}{s}\left(\frac{3\chi' Q}{sa^2} + \frac{T_0 - T_\infty}{T_\infty}\right)\left(\frac{r}{a} - \frac{\operatorname{sh} r\sqrt{s/\chi'}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s/\chi'}}\right)$$

$$G_1(1 + \Lambda) = G_a - \frac{\mu_2^2 A^* F_a}{1 - \mu_2^2 D^*}, \qquad G_2(1 + \Lambda) = \frac{\mu_2^2 A^* F_2}{1 - \mu_2^2 D^*}$$

$$F_1(1 + \Lambda) = -\frac{\mu_1^2 B^* G_1}{1 - \mu_1^2\chi^*}, \qquad F_2(1 + \Lambda) = F_a + \frac{\mu_1^2 B^* G_a}{1 - \mu_1^2\chi^*}$$

$$\mu_{1,2} = \left[\frac{\chi^* + D^* \pm \sqrt{(\chi^* - D^*)^2 - 4A^*B^*}}{2(\chi^* D^* + A^* B^*)}\right]^{1/2}, \qquad \Lambda = \frac{\mu_1^2\mu_2^2 A^* B^*}{(1 - \mu_1^2\chi^*)(1 - \mu_2^2 D^*)}$$

Из формул (2.3) вытекает

$$\left(\frac{dG}{dr}\right)_a = -\frac{(\mu_1 + \mu_1\Lambda + \mu_2\Lambda)\sqrt{s}}{(1 + \Lambda)^2}\left(G_a - \frac{\mu_2^2 A^* F_a}{1 - \mu_2^2 D^*}\right) \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{dF}{dr}\right)_a = -\frac{(\mu_2 + \mu_2\Lambda + \mu_1\Lambda)\sqrt{s}}{(1 + \Lambda)^2} F_a - \frac{(\mu_2 - \mu_1 + \mu_2\Lambda)\sqrt{s}\,\mu_1^2 B^*}{(1 + \Lambda)^2(1 - \mu_1^2\chi^*)} G_a$$

$$\left(\frac{dF'}{dr}\right)_a = F_a \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\chi'}} \operatorname{cth}\frac{a\sqrt{s}}{\sqrt{\chi'}} + \frac{1}{sa}\left(\frac{3\chi' Q}{sa^2} + \frac{T_0 - T_\infty}{T_\infty}\right)\left(1 - \frac{a\sqrt{s}}{\sqrt{\chi'}} \operatorname{cth}\frac{a\sqrt{s}}{\sqrt{\chi'}}\right)$$

Подставляя (2.4) в граничные условия (2.2), можно получить

$$F_a = \frac{a^2}{p\chi'} \frac{M + N\sqrt{p} + [3Q/p + (T_0 - T_\infty)/T_\infty](1 - \sqrt{p}\,\mathrm{cth}\sqrt{p})}{M_* - N_*\sqrt{p} - \sqrt{p}\,\mathrm{cth}\sqrt{p}} \tag{2.5}$$

$$p = a^2 s / \chi', \quad M = \gamma^* D^* (\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty}) / \varkappa' \rho_{1\infty}, \quad M^* = 1 - \varkappa^* / \varkappa'$$

$$N = \left[\gamma^* D^* (\mu_1 + \mu_1\Lambda + \mu_2\Lambda) + (\mu_1 - \mu_2 - \mu_2\Lambda) \frac{(\varkappa + \gamma^* A^*)\mu_1^2 B^*}{1 - \mu_1^2\chi^*}\right] \times$$
$$\times \frac{(\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty})\sqrt{\chi'}}{(1+\Lambda)^2 \varkappa' \rho_{1\infty}}$$

$$N_* = \frac{\nu^* D^* (\mu_1 + \mu_1\Lambda + \mu_2\Lambda)}{\varkappa'(1+\Lambda)^2} \left(\beta^* - \frac{\mu_2^2 A^*}{1 - \mu_2^2 D^*}\right)\sqrt{\chi'} +$$
$$+ \frac{(\varkappa + A^*\gamma^*)\sqrt{\chi'}}{\varkappa'(1+\Lambda)^2} [\mu_2 + \mu_1\Lambda + \mu_2\Lambda - \beta^*\mu_1^2 B^* (\mu_1 - \mu_2 - \mu_2\Lambda) / (1 - \mu_1^2\chi^*)]$$

Из (2.5) следует, что

$$\frac{T_a(t) - T_\infty}{T_\infty} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{M + N\sqrt{p} + [3Q/p + (T_0 - T_\infty)/T_\infty](1 - \sqrt{p}\,\mathrm{cth}\sqrt{p})}{M_* - N_*\sqrt{p} - \sqrt{p}\,\mathrm{cth}\sqrt{p}} \times$$
$$\times \exp\left(\frac{p\chi' t}{a^2}\right)\frac{dp}{p} \tag{2.6}$$

Если не учитывать внутреннего тепловыделения, переноса энергии излучением и диффузией, то при $\rho_2 \approx \rho$ формула (2.6) должна совпадать с результатом [6,7], полученным ранее иным способом. Однако соответствующие формулы в работах [6,7] приведены в несколько искаженном виде, поскольку при вычислении лапласовского образа от $\sqrt{t}$ пропущен коэффициент $^1/_2$. Кроме того, при вычислении температуры в работах [6,7] авторы не заметили, что полюса подынтегральной функции расположены вне области $|\arg p| < \pi$.

Подынтегральная функция обладает точкой ветвления $p = 0$. Отыскание полюсов подынтегральной функции сводится к исследованию корней уравнения

$$M_* - N_*\sqrt{p} - \sqrt{p}\,\mathrm{cth}\sqrt{p} = 0 \tag{2.7}$$

Если существуют корни этого уравнения при $|p| \ll 1$, то для их отыскания достаточно ограничиться первыми членами разложения $\mathrm{cth}\sqrt{p}$ в ряд Тейлора

$$p + 3N_*\sqrt{p} + 3(1 - M_*) = 0 \tag{2.8}$$

Поскольку $1 - M_* > 0$, $N_* > 0$, то корни этого уравнения $\sqrt{p_1}$ и $\sqrt{p_2}$ располагаются в левой части плоскости комплексного переменного $\sqrt{p}$ симметрично относительно действительной оси. А потому на плоскости p эти особенности оказываются вне главной ветви $\arg p$.

Кроме этих корней существуют при $N_* \ll 1$ еще корни, положение которых в нулевом приближении определяется уравнением

$$M_* = \sqrt{p^{(0)}}\,\mathrm{cth}\sqrt{p^{(0)}} \tag{2.9}$$

Если $1 - M_* \ll 1$, то, как известно [8]

$$\sqrt{p_k^{(0)}} = \pm y_k i, \quad y_k = a_k - 1/a_k, \ldots, \quad a_k = (k + {}^1/_2)\pi \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.10}$$

Для отыскания поправки в следующем приближении $\sqrt{p_k} = \sqrt{p_k^{(0)}} + \varepsilon_k$, из (2.7) можно получить

$$\varepsilon_k = N_* \sqrt{p_k^{(0)}}\,\mathrm{sh}^2\sqrt{p_k^{(0)}} / (\sqrt{p_k^{(0)}} - \mathrm{sh}\sqrt{p_k^{(0)}}\,\mathrm{ch}\sqrt{p_k^{(0)}}) \approx -N_* \sin^2 y_k \tag{2.11}$$

Отсюда видно, что эти полюса также располагаются вне главной ветви $\arg p$. Аналогичная ситуация возникает при любом $N_* > 0$. Действительно, корни уравнения

(2.7) при $|p| \gg 1$ определяются в нулевом приближении как

$$\sqrt{p} = {}^1/_2 \, \mathrm{Ln}\,[(N_* - 1)/(N_* + 1)] \tag{2.12}$$

Очевидно, что $\mathrm{Re}\sqrt{p} < 0$ при $N_* > 0$.

Таким образом подынтегральная функция не имеет полюсов в области $|\arg p| < \pi$. Поэтому вычисление интеграла (2.6) сводится к вычислению интегралов по нижнему и верхнему берегам разреза, проведенного вдоль отрицательной части действительной оси, и к интегралу по окружности бесконечного малого радиуса, охватывающей $p = 0$.

Таким образом

$$\frac{T_a - T_\infty}{T_\infty} = \frac{Q - M}{1 - M_*} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dp}{\sqrt{p}}\left[N(M_* - \sqrt{p}\,\mathrm{ctg}\sqrt{p}) + MN_* - N_*\left(\frac{3Q}{p} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{T_0 - T_\infty}{T_\infty}\right)(1 - \sqrt{p}\,\mathrm{cth}\sqrt{p})\right][(M_* - \sqrt{p}\,\mathrm{cth}\sqrt{p})^2 + N_*^2 p]^{-1} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{p\chi' t}{a^2}\right) = \frac{Q - M}{1 - M_*} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[N(z\,\mathrm{ctg}\,z - M_*) - MN_* + \right.$$
$$\left. + N_*\left(\frac{3Q}{z^2} - \frac{T_0 - T_\infty}{T_\infty}\right)(1 - z\,\mathrm{ctg}\,z)\right][(z\,\mathrm{ctg}\,z - M_*)^2 +$$
$$+ N_*^2 z^2]^{-1}\exp\left(-z^2\frac{\chi' t}{a^2}\right)dz \tag{2.13}$$

Так как для газов обычно $1 - M_* \ll 1$, то подынтегральная функция достигнет максимума с эффективной шириной порядка N_* в точках $z_1 = \pm\sqrt{3(1 - M_*) - {}^9/_4 N_*^2}$, расположенных в области $|z| \ll 1$. Положение второго максимума приблизительно соответствует $z_2 = \pm\,{}^3/_2\pi$.

Если

$$\tau_0 \ll t \lesssim \tau \quad (\tau_0 = 4a^2 / 9\pi^2\chi', \quad \tau = a^2 / 3\chi'(1 - M_*))$$

то можно считать, что подынтегральная функция отлична от нуля только в области $|z| \lesssim z_1$, так как остальные максимумы подынтегральной функции, положение которых в нулевом приближении можно определить из уравнения $M_*\,\mathrm{tg}\,z = z$, из-за наличия экспоненциального множителя, вносят в интеграл несущественный вклад.

Поэтому при $N_* \ll z_1$ интеграл (2.13) можно представить в виде

$$\frac{T_a - T_\infty}{T_\infty} - \frac{Q - M}{1 - M_*} - \frac{1}{\pi}\left[N_*\left(\frac{3Q}{z_1^2} - \frac{T_0 - T_\infty}{T_\infty}\right)(1 - z_1\,\mathrm{ctg}\,z_1) - \right. \tag{2.14}$$
$$\left. - MN_*\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{9dz}{(z^2 - z_1^2)^2 + 9N_*^2 z_1^2} = \frac{Q - M}{1 - M_*} +$$
$$+ \left(\frac{T_0 - T_\infty}{T_\infty} - \frac{Q - M}{1 - M_*}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

В отсутствие переноса энергии излучением и диффузией, а также термодиффузии и диффузионного термоэффекта выражение для τ совпадает с полученным ранее [6, 7].

Характерное время релаксации температуры на поверхности капли можно оценить, полагая, что изменение T_a является более медленным процессом по сравнению с установлением при постоянных граничных условиях полей концентрации и температуры [1].

[1] Седунов Ю. С. Диссертация «Кинетика формирования облачного спектра», 1967.

Из уравнения (1.18) и граничного условия (1.19) следует

$$\rho' c_p' \int_0^a \frac{r^2}{a^2} \frac{\partial T'}{\partial t} dr = \frac{q}{3} + \varkappa' \left(\frac{\partial T'}{\partial r}\right)_a = \frac{q}{3} + \gamma D^* \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial r}\right)_a - 4\varepsilon\sigma T_\infty^3 (T_a - T_\infty) +$$

$$+ (\varkappa + A\gamma) \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_a \tag{2.15}$$

Если $t \gg a^2/\chi'$, $t \gg a^2 / \chi^*$, $t \gg a^2 / D^*$, то можно считать в левой части уравнения (2.15)

$$\frac{\partial}{\partial t} T'(r, t) \approx \frac{d}{dt} T_a(t)$$

При этом поля температур и концентраций будут близки к стационарным, соответствующим мгновенным значениям граничных условий

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_a = -\frac{T_a - T_\infty}{a}, \quad \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial r}\right)_a = -\frac{\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty}}{a} - \frac{\beta\rho_{s\infty}(T_a - T_\infty)}{aT_\infty} \tag{2.16}$$

Подставляя (2.16) в уравнение (2.15), можно получить

$$\frac{a^2}{3} \rho' c_p' \frac{dT_a}{dt} =$$

$$= \frac{qa}{3} - \gamma D^* (\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty}) - \left(\varkappa + 4a\varepsilon\sigma T_\infty^3 + A\gamma + \frac{\gamma\beta\rho_{s\infty} D^*}{T_\infty}\right)(T_a - T_\infty) \tag{2.17}$$

Отсюда следует результат, совпадающий с ранее полученным, т. е. $\tau = a^2 / 3\chi' (1 - M_*)$

На больших временах, когда выполняются неравенства

$$t \gg \tau, \quad t \gg \tau_\infty \ (\tau_\infty = N_*^2 \tau / (1 - M_*))$$

основной вклад в интеграл (2.13) дает малая окрестность точки $z = 0$, в пределах которой

$$z^2 \ll 3(1 - M_*), \quad N_*^2 z^2 \ll (1 - M_*)^2$$

При вычислении интеграла стоящую перед экснонентой функцию можно заменить на ее асимптотическое значение при малых z

$$\frac{T_a - T_\infty}{T_\infty} = \frac{Q - M}{1 - M_*} \left[1 - \left(\frac{N}{Q - M} + \frac{N_*}{1 - M_*}\right) \frac{a}{\sqrt{\pi\chi' t}}\right] \tag{2.18}$$

Если бы выполнялось условие $N_*^2 \gg 1 - M_*$, то характерным временем релаксации температуры на поверхности капли являлась бы величина τ_∞. Однако реализуется, по-видимому, лишь случай $\tau \gg \tau_\infty$.

Тогда для времен $t \gg \tau$ температура на поверхности мало отличается от стационарного значения и, как видно из уравнения (2.17), в этом случае можно не учитывать затраты тепла на нагрев капли.

В отсутствие переноса тепла диффузией, термодиффузии и диффузионного термоэффекта ($A = B = 0$) диффузионный и тепловой потоки в газе при постоянных граничных условиях, как известно [9], меняются следующим образом:

$$j = \frac{\rho D^*}{\rho_2 a} (\rho_{1a} - \rho_{1\infty}) \left(1 + \frac{a}{\sqrt{\pi D^* t}}\right)$$

$$S_\varkappa = \frac{\varkappa}{a} (T_a - T_\infty) \left(1 + \frac{a}{\sqrt{\pi\chi t}}\right) \tag{2.19}$$

Поток тепла, переносимого молекулярной теплопроводностью в капле, считается равным своему стационарному значению [10]

$$-\varkappa' \left(\frac{\partial T'}{\partial r}\right)_a = \frac{1}{3} qa \tag{2.20}$$

Уравнение баланса потоков энергии на границе капли имеет вид

$$\frac{\varkappa}{a}(T_a - T_\infty)\left(1 + \frac{a}{\sqrt{\pi\chi t}}\right) + 4\varepsilon\sigma T_\infty^3 (T_a - T_\infty) + \tag{2.21}$$
$$+ \frac{\gamma D^*}{a}(\rho_{1a} - \rho_{1\infty})\left(1 + \frac{a}{\sqrt{\pi D^* t}}\right) = \frac{1}{3} qa$$

Уравнение (2.21) совместно с граничным условием (1.10) позволяет вычислить изменение температуры поверхности капли на больших временах

$$\frac{T_a - T_\infty}{T_\infty} = \frac{\varkappa' \rho_{1\infty} Q - \gamma^* D^* (\rho_{1a} - \rho_{1\infty})}{\rho_{1\infty}(\varkappa + 4a\varepsilon\sigma T_\infty^3 + \beta^*\gamma^* D^*)} \times \tag{2.22}$$
$$\times \left[1 - \left(\frac{\gamma^* D^* (\rho_{1a} - \rho_{1\infty})}{(\varkappa' \rho_{1\infty} Q - \gamma^* D^* (\rho_{1a} - \rho_{1\infty})} + \frac{\varkappa \sqrt{D^* / \chi} + \beta^* \gamma^* D^*}{\varkappa + 4a\varepsilon\sigma T_\infty^3 + \beta^*\gamma^* D^*}\right) \frac{a}{\sqrt{\pi D^* t}}\right]$$

Это уравнение совпадает с (2.18), если в последнем считать $A = B = 0$.

3. Диффузионный поток и поток тепла, обусловленный молекулярной теплопроводностью. Изображения по Лапласу от части диффузионного потока j_0, пропорциональной градиенту концентрации, и потока энергии $S_\varkappa$, переносимой молекулярной теплопроводностью, имеют вид

$$J(s) = \int_0^\infty j_0(t) \exp(-st)\, dt, \qquad I(s) = \int_0^\infty S_\varkappa(t) \exp(-st)\, dt \tag{3.1}$$

Из определений (1.9) и (1.16) следует, что

$$J(s) = \frac{\rho D^*}{\rho_1 a}\left[(1 + \sqrt{\pi\tau_D s})\frac{\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty}}{s} + B\rho_{s\infty} F_a + \right.$$
$$\left. + \left(B\rho_{s\infty} - \frac{\rho_{1\infty}\mu_2^2 A^*}{1 - \mu_2^2 D^*}\right)\sqrt{\pi\tau_D s} F_a\right]$$
$$I(s) = \frac{\varkappa T_\infty}{a}\left[(1 + \sqrt{\pi\tau_\chi s} + \beta^* \sqrt{\pi\tau^* s}) F_a + \frac{(\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty})\sqrt{\pi\tau^*}}{\rho_{1\infty}\sqrt{s}}\right]$$
$$\tau_D = \frac{a^2(\mu_1 + \mu_2\Lambda + \mu_2\Lambda)^2}{\pi(1+\Lambda)^4}, \qquad \tau_\chi = \frac{a^2(\mu_2 + \mu_2\Lambda + \mu_1\Lambda)^2}{\pi(1+\Lambda)^4} \tag{3.2}$$
$$\sqrt{\tau^*} = a(\mu_2 - \mu_1 + \mu_2\Lambda)\mu_1^2 B^* / \sqrt{\pi}(1+\Lambda)^2(1 - \mu_1^2\chi^*)$$

Для отыскания оригиналов, соответствующих формулам (3.2), требуется вычислить

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \sqrt{s} F_a(s) \exp(st)\, ds = \tag{3.3}$$
$$= \frac{\sqrt{\chi'}}{\pi a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{M - [3Q/z^2 - (T_0 - T_\infty)/T_\infty]\}(M_* - z\operatorname{ctg} z) - NN_* z^2}{(M_* - z\operatorname{ctg} z)^2 + N_*^2 z^2} \exp\left(-\frac{z^2\chi' t}{a^2}\right) dz$$

На временах в интервале $\tau_0 \ll t \lesssim \tau$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \sqrt{s} F_a(s) \exp(st)\, dt = -\frac{3N_1\sqrt{\chi'}}{a}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{3.4}$$

На больших временах $t \gg \tau$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \sqrt{s} F_a(s) \exp(st)\, dt = \frac{Q - M}{1 - M_*}\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \tag{3.5}$$

Таким образом, для времен $\tau_0 \ll t \lesssim \tau$ при условии $N_*^2 \ll 1 - M_* \ll 1$

$$j_0(t) = \frac{\rho D^*}{\rho_2 a}\left[(\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty})\left(1 + \frac{\sqrt{\tau_D}}{\sqrt{t}}\right) + \beta\rho_{s\infty}\frac{T_a(t) - T_\infty}{T_\infty} - \right.$$
$$\left. - \frac{3N}{a}\sqrt{\chi'\pi\tau_D}\left(\beta\rho_{s\infty} - \frac{\rho_{1\infty}\mu_2^2 A^*}{1 - \mu_2^2 D^*}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \tag{3.6}$$

Квазистационарный режим испарения, т. е. режим, при котором плотность диффузионного потока определяется мгновенным значением температуры на поверхности капли, существует, как видно из (3.6), если одновременно выполняются неравенства

$$t \gg \tau_D, \quad \left|\frac{T_0 - T_c}{T_\infty}\right| \gg \left|\frac{3N\sqrt{\pi\chi'\tau_D}}{a\beta\rho_{s\infty}}\left(\beta\rho_{s\infty} - \frac{\rho_{1\infty}\mu_2^2 A^*}{1 - \mu_2^2 D^*}\right)\right| \tag{3.7}$$
$$T_c = T_\infty[1 + (Q - M)/(1 - M_*)]$$

Здесь T_c — температура поверхности капли при стационарном режиме испарения.

Если $A = B = 0$, то условие существования квазистационарного режима испарения (3.6) на временах $\tau_0 \ll t \lesssim \tau$ можно преобразовать к виду

$$\rho' c_p' |T_0 - T_c| \gg 3L|\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty}|(\rho/\rho_2) \tag{3.8}$$

Таким образом, при выполнении условий $N_*^2 \ll 1 - M_* \ll 1$ квазистационарный режим испарения капли в интервале времен $\tau_0 \ll t \lesssim \tau$ существует, если количество тепла, поглощающееся или выделяющееся в единице объема капли в процессе релаксации ее температуры, существенно превышает затраты тепла на единицу объема парогазовой среды, связанные с фазовым переходом при изменении концентрации пара на величину $|\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty}|$.

Результат (3.8) отсутствует в работе [6], в которой исследование условий существования квазистационарного режима фактически свелось к анализу выполнения условия $N_*^2 \ll 1 - M_*$.

Тепловой поток на временах $\tau_0 \ll t \lesssim \tau$ при выполнении условий $N_*^2 \ll 1 - M_* \ll 1$ равен

$$S_\varkappa = \frac{\varkappa T_\infty}{a}\left[\frac{T_a(t) - T_\infty}{T_\infty} + \frac{(\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty})\sqrt{\tau^*}}{\rho_{1\infty}\sqrt{t}} - \right.$$
$$\left. - \frac{3N}{a}\sqrt{\pi\chi'}(\sqrt{\tau_\varkappa} + \beta^*\sqrt{\tau^*})\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \tag{3.9}$$

Отсюда видно, что квазистационарный режим для теплового потока существует, если

$$t \gg \tau^*, \quad \left|\frac{T_0 - T_c}{T_\infty}\right| \gg \left|\frac{3N}{a}\sqrt{\pi\chi'}(\sqrt{\tau_\varkappa} + \beta^*\sqrt{\tau^*})\right| \tag{3.10}$$

Для частного случая $A = B = 0$ (3.10) принимает вид

$$\rho' c_p' |T_0 - T_c| \gg 3L\sqrt{D^*/\chi}|\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty}|(\rho/\rho_2) \tag{3.11}$$

Из формул (3.8) и (3.11) следует, что условия существования квазистационарного режима для диффузионного и теплового потоков фактически совпадают.

Изменения диффузионного и теплового потоков на больших временах $t \gg \tau$ описываются формулами

$$j_0(t) = \frac{\rho D^*}{\rho_2 a}\left[(\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty})\left(1 + \frac{\sqrt{\tau_D}}{\sqrt{t}}\right) + \beta\rho_{s\infty}\frac{T_a(t) - T_\infty}{T_\infty} + \right.$$
$$\left. + \left(\beta\rho_{s\infty} - \frac{\rho_{1\infty}\mu_2^2 A^*}{1 - \mu_2^2 D^*}\right)\frac{(Q - M)\sqrt{\tau_D}}{(1 - M_*)\sqrt{t}}\right]$$

$$S_\varkappa(t) = \frac{\varkappa T_\infty}{a}\left[\frac{T_a(t) - T_\infty}{T_\infty} + \frac{(\rho_{s\infty} - \rho_{1\infty})\sqrt{\tau^*}}{\rho_{1\infty}\sqrt{t}} + \right. \tag{3.12}$$
$$\left. + \frac{(Q - M)(\sqrt{\tau_\varkappa} + \beta^* \sqrt{\tau^*})}{(1 - M_*)\sqrt{t}}\right]$$

Пусть выполнены условия $A = B = 0$. Изменение диффузионного и теплового потока осуществляется, как видно из (3.12), с характерными временами τ_D и τ_χ.

При выполнении условий $\tau \gg \tau_D$, $\tau \gg \tau_\chi$, $t \gg \tau$ следует считать, что диффузионный и тепловой потоки практически не отличаются от своих стационарных значений.

Авторы благодарят В. Г. Левича за обсуждение результатов работы.

Поступила 7 VIII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Л е в и ч В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. Ф у к с Н. А. Испарение и рост капель в газообразной среде. М., Изд-во АН СССР, 1958.
3. В о и н о в О. В., Г о л о в и н А. М., П е т р о в А. Г. Нестационарный перенос энергии от излучающей сферы в среде с молекулярной теплопроводностью. ПММ, 1959, т. 33, вып. 2.
4. В о и н о в О. В., Г о л о в и н А. М., П е т р о в А. Г. Перенос энергии от излучающей сферы в среде с молекулярной теплопроводностью. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
5. Ч е п м е н С., К а у л и н г Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Б у й к о в М. В., Д у х и н С. С. Диффузионная и тепловая релаксация испаряющейся капли. Инж.-физ. ж., 1962, № 3.
7. Б у й к о в М. В., Д у х и н С. С. Диффузионная и тепловая релаксация испаряющейся капли. Инж.-физ. ж., 1962, № 4.
8. Я н к е Е., Э м д е Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.
9. К а р с л о у Г., Е г е р Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
10. В о л к о в Ф. Г., Г о л о в и н А. М. Квазистационарное испарение капли с внутренним тепловыделением. ПМТФ, 1968, № 4.