где n — активная пористость грунтов безнапорного горизонта, а h — его глубина в данном сечении.

Заменяя $\partial p''/\partial t$ в (1.8) согласно (2.5), получим уравнение упругого режима фильтрации с учетом колебания уровней грунтовых вод

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + n\frac{\alpha}{\varepsilon/E' + \alpha}\, v \qquad \left(v = \frac{\partial h}{\partial t}\right) \tag{2.6}$$

Здесь скорость колебания уровней грунтовых вод $v = v\,(x, t)$ принимается положительной при подъеме уровней грунтовых вод и отрицательной при их спаде.

Уравнение (2.6) представим в конечно разностном виде для планово-плоского потока; получим для изменения напора ΔH за время Δt при равномерных шагах разбивки Δx и Δy

$$\Delta H = a\Delta t\left(\frac{H_{n+1} + H_{n-1} - 2H}{\Delta x^2} + \frac{H_{i+1} + H_{i-1} - 2H}{\Delta y^2}\right) + n\frac{\alpha}{\varepsilon\,/\,E' + \alpha}\,\Delta h \tag{2.7}$$

Здесь H — напор в расчетном блоке, H_{n+1} и H_{n-1} — напоры в соседних блоках по оси x, а H_{i+1} и H_{i-1} — то же по оси y, наконец, Δh — изменение уровня грунтовых вод над рассматриваемым участком за время Δt.

Из уравнения (2.6) непосредственно следует, что колебания уровней грунтовых вод должны вызывать изменения напоров в нижележащих горизонтах только за счет упругого режима фильтрации даже при отсутствии какой-либо гидравлической связи между этими горизонтами, причем интересной особенностью рассматриваемого режима фильтрации является его проявление только в период колебаний грунтовых вод.

Возможность проявления режима фильтрации такого рода следует учитывать при анализе материалов режимных наблюдений в естественных условиях и, особенно, при устройстве искусственного понижения уровня грунтовых вод [6].

Поступила 11 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме Гостоптехиздат, 1959.
2. Тейлор Д. Основы механики грунтов. Госстройиздат, 1960.
3. Николаевский В. Н. К построению нелинейной теории упругого режима фильтрации жидкости и газа. ПМТФ, 1961, № 4.
4. Жуковский Н. Е. Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод. СПб., 1888.
5. Готальский М. А. Влияние ветра и атмосферного давления на подземные воды. Разведка недр, 1937, № 24.
6. Яковлев В. П. Возможность промысловых определений коэффициентов сжимаемости, нефтенасыщенности и нефтеотдачи пласта. Разработка нефтяных месторождений и гидродинамика пласта. Тр. ВНИИ, 1959, вып. XXI.
7. Шестаков В. М. О фильтрации в напорных горизонтах при выемке котлованов или карьеров, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 2.

О ЛИНЕЙНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА

Ч. Т. Халиуллин

(Уфа)

Рассматривается плоский поток однородной несжимаемой жидкости (фиг. 1) по некоторой произвольной области E, который определяет величину расхода жидкости q.

На фиг. 1 в точке O_1 предполагается источник жидкости — светлый кружочек (скважина нагнетательная), в точке O_3 — сток жидкости—темный кружочек (скважина нефтяная). Область E разделяется на подобласти *1*, *2* и *3*, пространство плоского потока в которых характеризуется величиной Λ_j° соответственно $\Lambda_1^\circ = \varphi_0$, $\Lambda_2^\circ = \gamma_0$ и $\Lambda_3^\circ = \alpha_0$, и для каждой подобласти *1*, *2* и *3* области E расход жидкости q выражается формулой из [1]

$$q_1 = \frac{k\Delta p_1}{\mu\Omega_1\,[r_+,\ s_1^{\varphi_0};\ \omega_1(s, \varphi_0)]}, \qquad q_2 = \frac{k\Delta p_2}{\mu\Omega_2\,[s_1^{\gamma_0},\ s_2^{\gamma_0};\ \omega_2\,(s, \gamma_0)]} \tag{1}$$

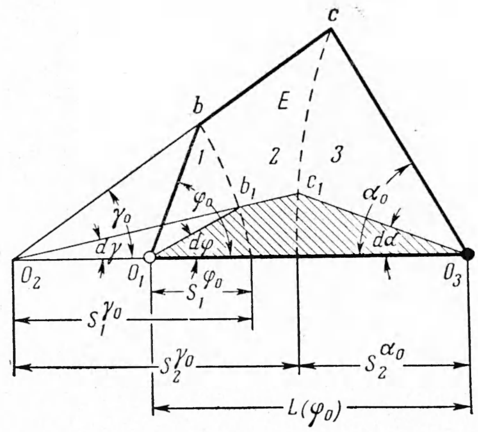
$$q_3 = \frac{k\Delta p_3}{\mu\Omega_3\,[s_2^{\alpha_0},\ r;\ \omega_3\,(s, \alpha_0)]}$$

Здесь k — проницаемость фильтрующей среды, μ — вязкость фильтруемой жидкости; Δp_1, Δp_2 и Δp_3 — перепады давления жидкости в соответствующих подобластях *1*, *2* и *3* области E. Величина Ω_j определяется равенством

$$\Omega_j\,[Z_1,\,Z_2;\;\omega\,(s,\,\Lambda_j^\circ)] = \int\limits_{Z_1^j}^{Z_2^j} \frac{ds}{\omega_j\,(s,\,\Lambda_j^\circ)} \tag{2}$$

где Z_1^j — нижний предел, а Z_2^j — верхний предел интеграла (2), их значения для каждой подобласти очевидны из (1), s — расстояние вдоль крайней линии тока O_1O_3.

Положительное направление s по линии тока совпадает с направлением от источника жидкости к стоку; r_+ — радиус источника жидкости O_1 (скважина нагнетательная); r_- — радиус стока жидкости O_3 (скважина нефтяная); Λ_j — угол между некоторой линией и крайней линией тока O_1bcO_3 в соответствующих подобластях *1*, *2* и *3* области E, положительное направление отсчитывается по часовой стрелке; $\omega_j\,(s,\,\Lambda_j^\circ)$ — площадь сечения, нормального ко всем линиям тока области E.



Фиг. 1

Из условия неразрывности потока жидкости по области E имеем

$$q = q_1 = q_2 = q_3,$$

или

$$q = k\Delta p\left(\mu \sum_{j=1}^{3} \Omega_j\,[Z_1,\,Z_2;\;\omega\,(s,\;\Lambda_j^\circ)]\right)^{-1} \qquad (\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3) \tag{3}$$

Здесь Δp — перепад давления между источником и стоком жидкости. Соотношение (3), очевидно, полагает линейность и непрерывность для выражения площади $\omega_j\,(s,\,\Lambda_j^\circ)$ по всей области E вида

$$\omega\,(s,\,C_1\Lambda_j^\circ + C_2\Lambda_j^\circ) = C_1\omega\,(s,\,\Lambda_j^\circ) + C_2\omega\,(s,\,\Lambda_j^\circ) \tag{4}$$

где C_i — целое число и, следовательно, может быть преобразовано по формуле Стокса [2]

$$bq = k\Delta p\left(\mu \sum_{j=1}^{3} \Omega_j\,[Z_1,\,Z_2;\;\omega\,(s,\;d\Lambda_j)]\right)^{-1} \tag{5}$$

при

$$C_i\Omega_j^{-1} = \Omega_j^{-1}\,[Z_1,\,Z_2;\;\omega\,(s,\,C_i\Lambda_j^\circ)]$$

Здесь оператор b производит линейное преобразование функционала q (расход жидкости), повышая на единицу его порядок, так как d осуществляет линейное и непрерывное преобразование Λ_j° в $d\Lambda_j$.

Соотношение (5) приводится к виду

$$\frac{\mu}{k\,\Delta p}\left(\frac{dq}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} = \left(\sum_{j=1}^{3} \Omega_j\,[Z_1,\,Z_2;\;\omega\,(s,\,f_j\,(\Lambda_1^\circ)]\right)^{-1} \tag{6}$$

при

$$\omega_j\,(s,\,d\Lambda_j) = s\,d\Lambda_j \tag{7}$$

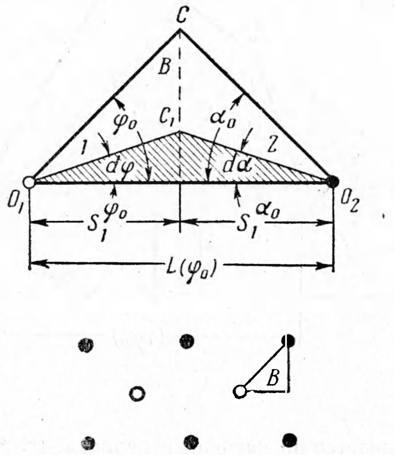
полагая толщину слоя течения жидкости по области E равной единице и

$$f_1\,(\varphi_0) = \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\varphi_0}{\varphi_0} = 1, \quad f_2\,(\varphi_0) = \frac{d\gamma}{d\varphi} = \frac{\gamma_0}{\varphi_0}, \quad f_3\,(\varphi_0) = \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{\alpha_0}{\varphi_0} \tag{8}$$

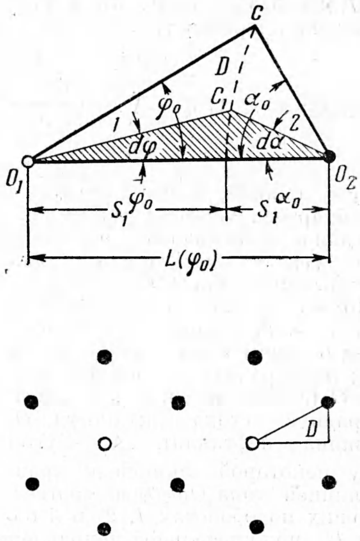
Таким образом, элементарная трубка тока $O_1b_1c_1O_3$ (на фиг. 1 заштрихована), определяющая элементарный расход bq, есть результат преобразования фигуры

O_1bcO_3 в отношении прямой O_1O_3, числа сторон и соотношения углов (8). Это преобразование в смысле проективной геометрии [3] составляет подгруппы параболических преобразований на плоскости.

Соотношение (6) при течении жидкости по областям B и D, представляющим основной элемент сетки скважин соответственно



Фиг. 2



Фиг. 3

для пятиточечного (фиг. 2) и семиточечного (фиг. 3) размещения скважин, пользуясь терминологией из [4], имеет вид

$$\frac{\mu}{k\Delta p}\left(\frac{dq}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} = (\Omega_1[r_+, s_1^{\varphi_0}; \omega_1(s, f_1(\varphi_0))] + \Omega_2[s_1^{\alpha_0}, -r_+ + \omega_2(s, f_2(\varphi_0))])^{-1} \tag{9}$$

при $|r_+| = |r_-|$. Из геометрии элементарной трубки тока имеем дополнительно

$$s_1^{\varphi_0}\, d\varphi = s_1^{\alpha_0}\, d\alpha, \qquad s_1^{\varphi_0} - s_1^{\alpha_0} = L(\varphi_0) \tag{10}$$

Здесь $L(\varphi_0)$ — расстояние между точками O_1 и O_3. Отсюда имеем: для пятиточечного размещения скважин

$$\frac{\mu}{k\Delta p}\left(\frac{dq}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} = \left(2\ln\frac{L(\varphi_0)}{2r_+}\right)^{-1} \tag{11}$$

при

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \qquad \alpha_0 = -\frac{\pi}{4}, \qquad f_2(\varphi_0) = \frac{\alpha_0}{\varphi_0} = -1$$

и для семиточечного размещения скважин

$$\frac{\mu}{k\Delta p}\left(\frac{dq}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_0} = 2\left(\ln\frac{4L^3(\varphi_0)}{27\, r_+^3}\right)^{-1} \tag{12}$$

при

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6}, \qquad \alpha_0 = -\frac{\pi}{3}, \qquad f_2(\varphi_0) = \frac{\alpha_0}{\varphi_0} = -2$$

Соотношения (11) и (12) удобно сопоставить с аналогичными данными из [4], полученными методом сложения течений жидкости. Небольшая разница (около 1%), имеющаяся в результате этих сопоставлений, объясняется допущением приближения (около 1%) в конечных соотношениях из [4].

Поступила 11 XII 1961.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Основы подземной гидравлики. Гостоптехиздат, 1956.
2. Georges de Rham. Variétés différéntiables. Paris, Hermann, 1955. (Руск. пер. Ж. де Рам. Дифференцируемые многообразия. ИИЛ, 1956).
3. Joung John Wesley. Progective geometr. Dartmouth College, 1938. (Руск. пер. Дж. В. Юнг. Проективная геометрия. ИИЛ, 1949).
4. Muskat M. The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media. Megraw — Hill Book Company. New York, 1937. (Руск. пер. Маскет М. Движение однородной жидкости в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949).