

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ БЕСКОНЕЧНЫМ РЯДОМ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ ТРЕЩИН

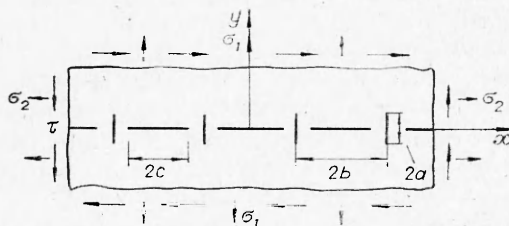
Л. М. Куршин, И. Д. Суздальницкий
(Новосибирск)

В работе [1], посвященной теории крыла, использование того факта, что сингулярный оператор переводит многочлены снова в многочлены, позволило получить существенно новые результаты. Это свойство сингулярных операторов применяется в решении плоской задачи теории упругости для плоскости, ослабленной трещинами.

В линейной теории разрушения критерий начала роста трещины связывают с коэффициентом интенсивности напряжений у ее конца. Значительный интерес представляет исследование влияния на коэффициент интенсивности взаимного расположения трещин. При растяжении плоскости, ослабленной продольным разрезом, коэффициент интенсивности равен нулю, но при наличии поперечного разреза этот коэффициент возрастает и может даже превзойти коэффициент интенсивности у конца поперечного разреза. В этом случае начинается расслоение материала — развитие трещин, расположенных вдоль линии нагружения. Разрушения такого типа наблюдались в эксперименте.

Для решения задачи определения коэффициента интенсивности напряжений у конца продольной трещины при наличии поперечной оказывается эффективным рассмотрение периодической системы продольно-поперечных трещин. Введение симметрии, с одной стороны, упрощает построение решения задачи и, с другой, при достаточном взаимном удалении разрезов является хорошим приближением к задаче о взаимном влиянии двух трещин.

1. Пусть дана плоскость, ослабленная следующими двумя периодическими системами разрезов (фиг. 1). Продольные разрезы направлены вдоль прямой $y=0$, имеют одинаковые длины $2c$ и расположены в интервалах длины $2b$ ($c < b$) так, что их середины $x = 2kb$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) совпадают с центрами интервалов. Поперечные разрезы, перпендикулярные прямой $y=0$, имеют одинаковые длины $2a$ со серединами, расположенными в точках



Фиг. 1

$$x = b_k = (2k+1)b, \quad y = 0.$$

На бесконечности заданы напряжения

$$\sigma_x^\infty = \sigma_1, \quad \sigma_y^\infty = \sigma_2, \quad \tau_{xy} = \tau,$$

берега разрезов свободны от напряжений.

Задача приводится к уравнению для функции напряжений

$$(1.1) \quad \Delta^2 U = 0, \quad \Delta = (\)_{xx} + (\)_{yy}$$

при условиях на бесконечности

$$(1.2) \quad U_{yy} = \sigma_1, \quad U_{xx} = \sigma_2, \quad U_{xy} = -\tau,$$

на берегах разрезов на линии $L' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} L'_k$, $L'_k = \{2kb - c \leq x \leq 2kb + c, \quad y = 0\}$

$$(1.3) \quad U_{xx} = U_{xy} = 0$$

и на линии

$$(1.4) \quad L'' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_k'', \quad L_k'' = \{x = b_k, \quad -a \leq y \leq a\}$$

$$U_{yy} = U_{xy} = 0.$$

Решение задачи разыскиваем в виде

$$(1.5) \quad U(x, y) = U^\infty(x, y) + U_1(x, y) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_{2,k}(x, y),$$

где

$$(1.6) \quad U^\infty(x, y) = \frac{1}{2} (\sigma_1 y^2 + \sigma_2 x^2) - \tau xy;$$

$$(1.7) \quad U_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{L'} [f_1(\xi)(x - \xi) + f_2(\xi)y] \ln [(x - \xi)^2 + y^2] d\xi;$$

$$(1.8) \quad U_{2,k}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_k''} [f_3(\eta)(x - b_k) + f_4(\eta)(y - \eta)] \times$$

$$\times \ln [(x - b_k)^2 + (y - \eta)^2] d\eta.$$

Функция (1.6) обеспечивает выполнение условий (1.2), вид представлений (1.7), (1.8) продиктован применением преобразования Фурье так, как это сделано в [2], что приводит к представлению решения уравнения (1.1) в виде

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(\xi)(x - \xi) + f_2(\xi)y] \ln [(x - \xi)^2 + y^2] d\xi.$$

Потребовав, чтобы вне линии L' , включая концы составляющих ее отрезков L_k'' , функции $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ обращались в нуль, получаем выражение (1.7). Функция $U_1(x, y)$ вносит в общее решение задачи особенности, связанные с ослаблением плоскости продольными разрезами. Аналогично может быть получено представление (1.8) с тем лишь различием, что здесь интегрирование идет по прямой $x = b_k = (2k+1)b$ в пределах $-\infty < y < \infty$ и функции $f_3(\eta)$, $f_4(\eta)$ полагаются равными нулю вне отрезка L_k'' и на его концах. Функции $U_{2,k}(x, y)$ вносят в общее решение задачи особенности, связанные с поперечными разрезами.

Условия на берегах разрезов (1.3), (1.4) для производных функции (1.5) приводят к системе четырех сингулярных интегральных уравнений

$$(1.9) \quad \int_{L'} \frac{f_1 + (x - \xi)f_1'}{x - \xi} d\xi + \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{2,k} \{ (x - b_k)(2f_3 + \eta f_3') - \eta f_4 - \eta^2 f_4' \} = -\pi\sigma_2;$$

$$(1.10) \quad \int_{L'} \frac{f_2 d\xi}{x - \xi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{2,k} \{ -\eta f_3 + (x - b_k)^2 f_3' - \eta(x - b_k) f_4' \} = \pi\tau;$$

$$(1.11) \quad \int_{L_0} \frac{f_4 + (y - \eta)f_4'}{y - \eta} d\eta + \sum_{k \neq 0} G_{2,k}^0 \{ f_4 + (y - \eta)f_4'(y - \eta) \} +$$

$$+ G_1 \{ (b - \xi)(f_1 - yf_2') + 2yf_2 - (b - \xi)^2 f_1' \} = -\pi\sigma_1;$$

$$(1.12) \quad \int_{L_0} \frac{f_3 d\eta}{y - \eta} + \sum_{k \neq 0} G_{2,k}^0 \{ (y - \eta)f_3 + (b - b_k)^2 f_3' \} +$$

$$+ G_1 \{ (b - \xi)(f_2 + yf_1') + y^2 f_2' \} = \pi\tau,$$

где $f_j = f_j(\xi)$ при $j=1,2$; $f_j = f_j(\eta)$ при $j=3,4$;

$$G_1 \{S\} = \int_{L'} \frac{S(\xi, y) d\xi}{(b-\xi)^2 + y^2},$$

$$G_{2,k} \{S(x)\} = \int_{L_k} \frac{S_k(\eta, x) d\eta}{(x-b_k)^2 + \eta^2},$$

$$G_{2,k}^0 \{S\} = G_{2,k} \{S(b)\}.$$

При этом $\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{2,k}^0 \{(b-b_k)f\} = 0$.

При решении системы (1.9) — (1.12) далее будут сохраняться слагаемые, содержащие $c_0 = \frac{c}{b}$, $a_0 = \frac{a}{b}$ в степенях не выше четвертой.

Можно записать ($\pi^2/4b^2 = \varepsilon$) в виде

$$\int_{L'} \frac{f(\xi) d\xi}{x-\xi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2kb-c}^{2kb+c} \frac{f(\xi) d\xi}{x-\xi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-c}^c \frac{f(\xi) d\xi}{x-\xi-2kb} =$$

$$= \int_{-c}^c \frac{f(\xi) d\xi}{x-\xi} + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-c}^c \frac{f(\xi) 2(x-\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + 4k^2b^2} = \int_{-c}^c \left[\frac{1}{x-\xi} - (x-\xi) \left(\frac{\varepsilon}{3} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\varepsilon^2}{45} (x-\xi)^2 \right) \right] f(\xi) d\xi + 0(c_0^6);$$

$$\int_{L'} \frac{f(\xi) d\xi}{(b-\xi)^2 + y^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-c}^c \frac{f(\xi) d\xi}{[(2k-1)b + \xi]^2 + y^2} =$$

$$= \int_{-c}^c \left[\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{3} (3\xi^2 - y^2) \right] f(\xi) d\xi + 0(c_0^6).$$

Аналогичные разложения вводятся для остальных слагаемых. Таким образом, сохраняя оговоренную выше точность, систему (1.9) — (1.12) заменяем системой:

$$(1.13) \quad \int_{-c}^c [f_1 + (x-\xi)f_1'] H_1(x-\xi) d\xi - \int_{-a}^a \{(2f_3 + \eta f_3') h_1(x, \eta) + (f_4 + \eta f_4') h_2(x, \eta)\} d\eta = -\pi\sigma_2;$$

$$(1.14) \quad \int_{-c}^c f_2 H_1(x-\xi) d\xi + \int_{-a}^a \{\eta f_4' h_1(x, \eta) - (f_3 + \eta f_3') h_2(x, \eta)\} d\eta = \pi\tau;$$

$$(1.15) \quad \int_{-a}^a [f_4 + (y-\eta)f_4'] H_2(y-\eta) d\eta + \int_{-c}^c \{(2f_2 + yf_2') h_2(\xi, y) - (f_1 - yf_1') h_1(\xi, y)\} d\xi = -\pi\sigma_1;$$

$$(1.16) \quad \int_{-a}^a f_3 H_3(y-\eta) d\eta + \int_{-c}^c \{yf_2' h_2(\xi, y) - (f_2 + yf_2') h_1(\xi, y)\} d\xi = \pi\tau.$$

Ядра уравнений (1.13) — (1.16) имеют вид

$$H_1(t) = \frac{1}{t} - \frac{\varepsilon}{3} t - \frac{\varepsilon^2}{45} t^3, \quad H_2(t) = \frac{1}{t} + \frac{\varepsilon}{3} t - \frac{\varepsilon^2}{45} t^3,$$

$$H_3(t) = \frac{1}{t} - \frac{\varepsilon}{3} t + \frac{\varepsilon^2}{15} t^3,$$

$$h_1(s, t) = s \left[\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{3} (3t^2 - s^2) \right], \quad h_2(s, t) = t \left[\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{3} (3s^2 - t^2) \right].$$

Заметим, что при $a=0$ система (1.9) — (1.12) вырождается в уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_1(\xi) d\xi}{x-\xi} = -\sigma_2; \quad \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_2(\xi) d\xi}{x-\xi} = \tau,$$

решение которых приводит к результатам, полученным для ряда коллинеарных трещин [3]. При $c=0$, $\sigma_1=\sigma_2=0$, $f_4=0$ и сохранении точности решения до $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ система (1.13) — (1.16) приводится к уравнению

$$\int_{-a}^a \frac{f_3(\eta) d\eta}{y-\eta} - \frac{\pi^2}{12b^2} \int_{-a}^a f_3(\eta) (y-\eta) d\eta = \pi\tau$$

решение которого оказывается совпадающим с решением, полученным в [4] для ряда параллельных трещин.

2. Пусть $\sigma_1=\sigma_2=0$, $\tau \neq 0$. Примем $f_1(\xi)=f_4(\eta)=0$, а функции $f_2(\xi)$ и $f_3(\eta)$ полагаем нечетными относительно своих аргументов. Уравнения (1.13), (1.15) будут выполнены автоматически, а уравнения (1.14), (1.16) после интегрирования по частям запишутся в виде

$$\int_{-c}^c f_2(\xi) H_1(x-\xi) + \int_{-a}^a f_3(\eta) \eta [\varepsilon + \varepsilon^2(x^2 - \eta^2)] d\eta = \pi\tau;$$

$$\int_{-a}^a f_3(\eta) H_3(y-\eta) d\eta - \int_{-c}^c f_2(\xi) \left[\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{3}(3y^2 + \xi^2) \right] d\xi = \pi\tau.$$

Сделаем замену

$$\xi = -c \cos \varphi, \quad x = -c \cos \varphi_0, \quad \eta = -a \cos \vartheta, \quad y = -a \cos \vartheta_0$$

и примем

$$f_2(\xi) = \frac{\tau c \omega_2(\xi)}{\sqrt{c^2 - \xi^2}}, \quad f_3(\eta) = \frac{\tau a \omega_3(\eta)}{\sqrt{a^2 - \eta^2}},$$

где

$$(2.1) \quad \omega_2(\xi) = \omega_2(-c \cos \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{2n} \cos(2n+1)\varphi,$$

$$\omega_3(\eta) = \omega_3(-a \cos \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{3n} \cos(2n+1)\vartheta.$$

Используя формулу

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\alpha d\alpha}{\cos \alpha - \cos \beta} = \pi \frac{\sin n\beta}{\sin \beta},$$

получим алгебраическую систему уравнений для определения коэффициентов разложений (2.1). Обозначив $p=(\pi c/b)^2$, $q=(\pi a/b)^2$ и сохраняя члены, содержащие величины p и q в степенях не выше второй, найдем коэффициенты искомых функций в случае задачи о сдвиге

$$(2.2) \quad \omega_{20} = 1 + \frac{p}{24} + \frac{q}{8} + \frac{p^2}{360} - \frac{pq - 7q^2}{384}, \quad \omega_{21} = \frac{p^2}{1920} + \frac{pq}{128},$$

$$\omega_{30} = 1 - \frac{p}{8} + \frac{q}{24} - \frac{5p^2 + 11pq}{384} - \frac{q^2}{720}, \quad \omega_{31} = -\frac{pq}{128} - \frac{q^2}{640}.$$

Пусть $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\tau=0$. Полагаем $f_2(\xi)=f_3(\eta)=0$, функции $f_1(\xi)$, $f_4(\eta)$ примем нечетными. Повторяя те же рассуждения, получим в случае

продольного растяжения ($\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \tau = 0$):

$$(2.3) \quad f_1(\xi) = \frac{\sigma_1 c \alpha_1(\xi)}{\sqrt{c^2 - \xi^2}}, \quad f_4(\eta) = \frac{\sigma_1 a \alpha_4(\eta)}{\sqrt{a^2 - \eta^2}};$$

$$(2.4) \quad \alpha_1(\xi) = \alpha_1(-c \cos \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{1n} \cos(2n+1)\varphi,$$

$$\alpha_4(\eta) = \alpha_4(-a \cos \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{4n} \cos(2n+1)\vartheta,$$

где

$$(2.5) \quad \alpha_{10} = -\frac{7}{8} + \frac{5}{128} q^2 - \frac{3}{128} pq, \quad \alpha_{11} = -\frac{pq}{128},$$

$$\alpha_{40} = -1 - \frac{q}{8} - \frac{q^2}{48} + \frac{pq}{64}, \quad \alpha_{41} = -\frac{q^2}{384}.$$

Точно так же в случае поперечного растяжения ($\sigma_1 = \tau = 0$, $\sigma_2 \neq 0$), заменяя в выражениях (2.3), (2.4) функции $\alpha_1(\xi)$, $\alpha_4(\eta)$ на $\beta_1(\xi)$, $\beta_4(\eta)$ и коэффициенты α_{jn} на β_{jn} , найдем

$$(2.6) \quad \beta_{10} = -1 - \frac{p}{8} - \frac{p^2}{48} + \frac{pq}{64}, \quad \beta_{11} = -\frac{p^2}{384},$$

$$\beta_{40} = \frac{p}{8} + \frac{3p^2}{128} - \frac{pq}{128}, \quad \beta_{41} = -\frac{pq}{128}.$$

Вычислим значения коэффициентов интенсивности напряжений на концах продольных и поперечных разрезов. Для их определения введем, как обычно [5], функции $Z_1(z)$, $Z_2(z)$, связанные соответственно с растяжением σ и сдвигом τ , аргументом которых является комплексная переменная $z = x + iy$ ($\bar{z} = x - iy$). При этом в случае растяжения

$$\sigma_x = \operatorname{Re} Z_1 - y \operatorname{Im} Z_1', \quad \sigma_y = \operatorname{Re} Z_1 + y Z_1'$$

и в случае сдвига

$$(2.7) \quad \sigma_x = 2 \operatorname{Im} Z_2 + y \operatorname{Re} Z_2', \quad \sigma_y = -y \operatorname{Re} Z_2'.$$

В силу соотношений (2.7) и представлений (1.5) — (1.8) имеем

$$2(\operatorname{Re} Z_1 + \operatorname{Im} Z_2) = \sigma_x + \sigma_y = \Delta U = \frac{2}{\pi} \int_{L'} \frac{(x - \xi) f_1 + y f_2}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi +$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int \frac{(x - b_k) f_3 + (y - \eta) f_4}{(x - b_k)^2 + (y - \eta)^2} d\eta - 2 \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_1 + i f_2}{x - \xi + iy} d\xi -$$

$$- 2 \operatorname{Im} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{L_k} \frac{f_4 - i f_3}{x - b_k - iy - i\eta} d\eta.$$

Таким образом,

$$(2.8) \quad Z_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_1 d\xi}{z - \xi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{L_k} \frac{f_4 d\eta}{z - b_k - i\eta};$$

$$Z_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_2 d\xi}{z - \xi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{L_k} \frac{f_3 d\eta}{z - b_k - i\eta}.$$

В первом из этих выражений, выделив особенность на концах $z = \pm c$, можно записать

$$(2.9) \quad Z_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{f_1(\xi) d\xi}{z - \xi} + S_1(z),$$

где $S_1(z)$ — функция, регулярная в окрестности продольного разреза. В силу (2.3), (2.4) при продольном растяжении

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{f_1(\xi) d\xi}{z - \xi} &= \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\sigma_1 \left[\alpha_{10} \xi + \frac{\alpha_{11}}{c^2} (4\xi^3 - 3\xi c^2) \right]}{\sqrt{c^2 - \xi^2} (z - \xi)} d\xi = \\ &= \frac{\sigma (\alpha_{10} + \alpha_{11})}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\xi d\xi}{\sqrt{c^2 - \xi^2} (z - \xi)} - \frac{4\sigma_1 \alpha_{11}}{\pi c^2} \int_{-c}^c \frac{\xi \sqrt{c^2 - \xi^2}}{\xi - z} d\xi = \\ &= \sigma_1 \left[(\alpha_{10} + \alpha_{11}) \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} - 1 \right) + \frac{4\alpha_{11}}{c^2} \left(z \sqrt{z^2 - c^2} - z^2 - \frac{c^2}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Вычисление встречающихся здесь интегралов приведено в [6].

Таким образом, особенность функции $Z_1(z)$ имеет вид $\sigma(\alpha_{10} + \alpha_{11}) \times \times \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}}$, вследствие чего коэффициент интенсивности напряжений на конце продольного разреза при продольном растяжении оказывается равным

$$(2.11) \quad \begin{aligned} K_{1c}^{(1)} &= \lim_{x \rightarrow c+0} [\sqrt{2\pi(x-c)} Z_1(x, 0)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{2\pi(x-c)} \sigma_1 (\alpha_{10} + \alpha_{11}) \frac{x}{\sqrt{x^2 - c^2}} = \sigma_1 \sqrt{\pi c} (\alpha_{10} + \alpha_{11}). \end{aligned}$$

Здесь принята следующая система обозначений коэффициента интенсивности напряжений: нижний индекс 1 указывает на растяжение, при этом верхние индексы 1 или 2 — соответственно на растяжение в продольном и поперечном направлениях, нижний индекс 2 отвечает сдвигу, индексы c и a соответствуют продольному и поперечному разрезам.

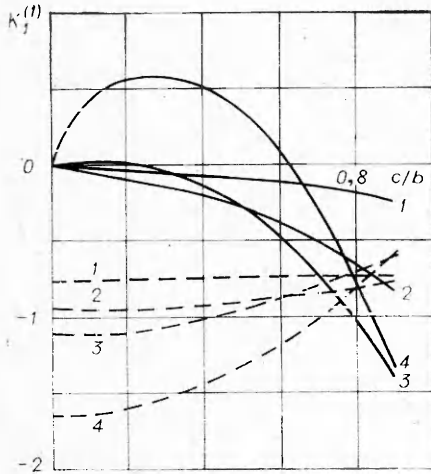
Аналогично получаем

$$K_{2c} = \lim_{x \rightarrow c+0} [\sqrt{2\pi(x-c)} Z_2(x, 0)] = \tau \sqrt{\pi c} (\omega_{10} + \omega_{11}).$$

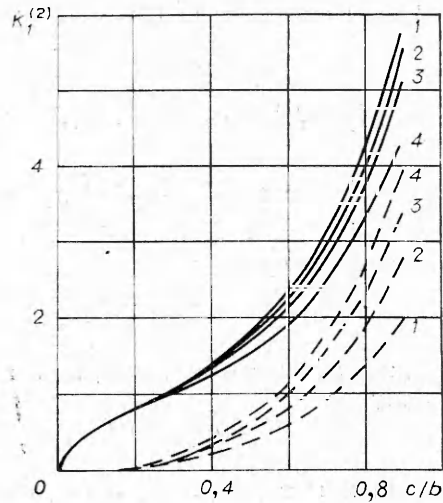
При поперечном растяжении в выражении (2.10) вместо $K_{1c}^{(1)}$, σ_1 , α_{10} , α_{11} следует соответственно записать: $K_{1c}^{(2)}$, σ_2 , β_{10} , β_{11} .

Значения этих же величин на конце поперечного разреза ($x=b$, $y=\pm a$) получаются заменой c на a и индексов 10, 11, 20, 21 у величин α , β , ω — соответственно на индексы 40, 41, 30, 31. При этом величины α_{mn} , β_{mn} , ω_{mn} определяются соотношениями (2.2), (2.5), (2.6).

На фиг. 2—4 представлены коэффициенты $K_1^{(1)}/\sigma_1 \sqrt{b}$, $K_1^{(2)}/\sigma_2 \sqrt{b}$, $K_2/\tau \sqrt{b}$ в зависимости от c/b . Кривые 1—4 отвечают значениям a/b , равным 0,2; 0,4; 0,6; 0,8. Сплошными линиями изображены значения коэффициентов интенсивности на конце продольного разреза ($x=c$), штриховыми — на конце поперечного разреза ($y=a$). Особенностью фиг. 2 является наличие явно выраженного максимума коэффициента $K_{1c}^{(1)}$ в случае продольного растяжения для больших значений a/b . В то же время при сдвиге (фиг. 4) максимальные значения имеют все кривые K_{2c} , причем с увеличением a/b этот максимум смещается в сторону меньших значений c/b . Аналогична картина поведения K_{2a} при изменении a/b .



Фиг. 2



Фиг. 3.

Вычислим, наконец, прирост энергии упругой деформации на трещину (работу раскрытия при образовании трещины). Поперечные перемещения берега продольного разреза L_0 при растяжении определяются соотношением

$$2Gv_j = \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} \bar{Z}_1^{(j)} - y \operatorname{Re} Z_1^{(j)} \quad (j = 1, 2),$$

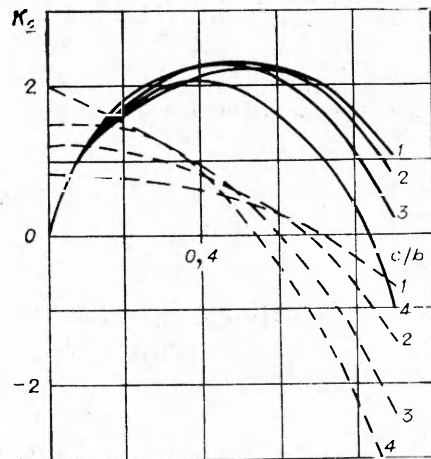
а его продольные перемещения при сдвиге —

$$2Gu = \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} \bar{Z}_2 + y \operatorname{Re} Z_2.$$

Здесь $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$; $2G = \frac{E}{1+\nu}$, E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; функции $Z_1(z)$, $Z_2(z)$ определяются равенствами (2.8); \bar{Z}_1 , \bar{Z}_2 — их первообразные.

Прирост энергии на разрезе L_0 на единицу толщины листа, в котором образовалась трещина, запишем в виде

$$\Delta A = \frac{1}{2} \int_{-c}^c [\sigma_2 (v_1^+ - v_1^-) + \sigma_2 (v_2^+ - v_2^-) + \tau (u^+ - u^-)] dx.$$



Фиг. 4.

Вычислим первое слагаемое. Интегрирование функции $Z_1^{(1)}$, представленной выражениями (2.9), (2.10), дает

$$\bar{Z}_1^{(1)}(z) = \sigma_1 \left[(\alpha_{10} + \alpha_{11}) (\sqrt{z^2 - c^2} - z) + \frac{4\alpha_{11}}{3c^2} (\sqrt{(z^2 - c^2)^3} - z^3 - \frac{3}{2} c^2 z) + \bar{S}_1(z) \right],$$

где $\bar{S}_1(z)$ — регулярная на L_0 функция.

Таким образом, на продольном разрезе

$$2G(v_1^+ - v_1^-) = (\kappa + 1) \operatorname{Im} \bar{Z}_1^+;$$

$$\operatorname{Im} \bar{Z}_1^{(1)+} = \sigma_1 \left[(\alpha_{10} + \alpha_{11}) \sqrt{c^2 - x^2} - \frac{4}{3c^2} \alpha_{11} \sqrt{(c^2 - x^2)^3} \right];$$

$$\Delta A_1 = \frac{1}{2G} \frac{\kappa + 1}{2} \int_{-c}^c \sigma_1 \operatorname{Im} \bar{Z}_1^{(1)+}(x) dx = \frac{\pi c^3}{E} \sigma_1^2 \alpha_{10}.$$

Окончательно прирост энергии на одну продольную трещину примет вид

$$\Delta A_c = \frac{\pi c^3}{E} (\sigma_1 \sigma_2 \alpha_{10} + \sigma_2^2 \beta_{10} + \tau^2 \omega_{20}).$$

Аналогичным путем получаем прирост энергии на одну поперечную трещину

$$\Delta A_a = \frac{\pi a^3}{E} (\sigma_1^2 \alpha_{40} + \sigma_1 \sigma_2 \beta_{40} + \tau^2 \omega_{30}),$$

где величины α_{n_0} , β_{n_0} , ω_{n_0} определяются равенствами (2.2), (2.5), (2.6).

Поступила 14 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В., Лаврентьев М. А. О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости. Труды конф. по теории волнового сопротивления. М., ЦАГИ, 1937.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
3. Koiter W. T. An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet. — «Ingenieur-Archiv», 1958, Bd 28.
4. Койтер В. Т. Бесконечный ряд параллельных трещин в неограниченной упругой пластинке. — В кн.: Проблемы механики сплошной среды. (К 70-летию акад. Н. И. Мусхелишвили), 1974.
5. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. М., «Наука», 1974.
6. Михлин С. Г. Интегральные уравнения. М. — Л., Гостехиздат, 1949.

УДК 624.131.6

К ВОПРОСУ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССА РАССОЛЕНИЯ ГРУНТОВ

В. И. Пеньковский

(Новосибирск)

Из многих физико-химических факторов, влияющих на передвижение солей в почвогрунтах, обычно учитывают лишь молекулярно-фильтрационную диффузию, конвективный перенос и солеобмен между пористым скелетом грунта и движущимся раствором [1].

Процесс солеобмена носит диффузионный характер («внутренняя» диффузия) и зависит от вида почв и характера их засоления. Можно предположить, что для почв тяжелого механического состава (глины, тяжелые суглинки), обладающих большой водоудерживающей способностью, наиболее подходящей моделью будет гетерогенная пористая среда с пористостью $m = m_1 + m_2$, где m_1 означает объем транзитных пор, занятых движущимся раствором, m_2 — объем тупиковых пор, заполненных неподвижным раствором («связанной» влагой).