7. **Теренин А. И.** Фотоника молекул красителей и родственных органических соединений. Л.: Наука, 1967.
8. **Майкапар Г. И.** О методике измерения теплового потока к моделям в аэродинамических трубах.— Тр. ЦАГИ, 1968, № 1606.
9. **Любимов А. Н., Русанов В. В.** Течения около тупых тел. М.: Наука, 1970.
10. **Боровой В. Я., Колочинский Ю. Ю., Харченко В. Н.** Распределение давления на полуконусе при числе М = 5.— Учен. зап. ЦАГИ, 1977, т. 8, № 6.
11. **Ардашева М. М., Боровой В. Я. и др.** Влияние чисел Маха и Рейнольдса на теплообмен на подветренной поверхности полуконуса при гиперзвуковых скоростях.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 5.
12. **Майкапар Г. И.** Отрывные течения у подветренной стороны треугольного крыла и тела вращения в сверхзвуковом потоке.— Учен. зап. ЦАГИ, 1982, т. 13, № 4.
13. **Лыков А. В.** Теплообмен. М.: Энергия, 1972.

Поступила 1/VI 1984 г.

УДК 532.517.4

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕПЛОВЫХ ВОЛН ВБЛИЗИ ГРАНИЦ

С. В. Добкин, Э. Е. Сон

(Москва)

1. Введение. В средах с нелинейной теплопроводностью возможно существование тепловых волн с резким фронтом [1]. Если температуропроводность среды $\chi \sim T^n$ (T — температура), то градиент температуры вблизи фронта тепловой волны $dT/dx \sim |x_\text{ф} - x|^{1/n-1}$. Температура во фронте тепловой волны уменьшается, а плотность газовой среды соответственно увеличивается. Если тепловая волна распространяется вверх в поле тяжести, направленном вниз, то возможно возникновение конвективной неустойчивости. Влияние сил тяжести на гидродинамическую неустойчивость фронта пламени исследовано в [2]. Аналогичные эффекты возникают также в случаях, когда ускорение обусловлено другими причинами, например падением на фронт пламени ударной или акустической волны, что является одной из причин вибрационного горения [3]. Ускорение оказывает влияние на устойчивость пламени также при распространении его с переменной скоростью [2]. Влияние ускорения фронта на рэлей-тейлоровскую неустойчивость границы между продуктами детонации и газом при сферическом взрыве обсуждалось в [4]. Механизм неустойчивости был связан с замедлением фронта ударной волны и выходом через фронт продуктов детонации, имеющих бо́льшую плотность по сравнению с окружающим газом.

Конвективная неустойчивость тепловой волны возникает при положительном ускорении фронта, так как в этом случае сила инерции в системе координат, связанной с фронтом, направлена в сторону газа с меньшей плотностью. В неограниченных средах такой неустойчивости не возникает. Например, при распространении тепловой волны от мгновенного плоского источника для зависимости $\chi \sim T^n$ ускорение фронта отрицательно [1]:

$$g = \frac{d^2 x_\text{ф}}{dt^2} \sim -\frac{n+1}{n+2}\, t^{-\frac{n+3}{n+2}}.$$

Для полуограниченного пространства с постоянной температурой T_0 на границе $g \sim T_0^{n/2}/4t^{3/2}$ [1], а при постоянном тепловом потоке на границе $g \sim -2(n+1)/(n+2)^2\, t^{-\frac{n+3}{n+2}}$.

Конвективная неустойчивость тепловой волны в полуограниченном пространстве возможна на начальной стадии до образования автомодельного режима. Рассмотрим, например, случай, когда холодный газ в начальный момент времени теплоизолирован от горячей стенки. После удаления тепловой изоляции начинается прогрев газа и при нелинейной температуропроводности возникает тепловая волна, замедляющаяся на больших временах в соответствии с автомодельным режимом. Но на начальной стадии вблизи стенки газ ускоряется, что может вызвать конвективную неустойчивость.

Аналогичная ситуация имеется и для волн охлаждения. Если температуропроводность среды уменьшается с возрастанием температуры ($\chi \sim T^{-n}$), то

$$g \sim \frac{n-1}{(n-2)^2} t^{-\left(\frac{n-3}{n-2}\right)}, \tag{1.1}$$

следовательно, на асимптотически больших временах волна охлаждения ускоряется (в противоположность замедляющейся волне нагрева) и величина ускорения уменьшается. Решение (1.1) несправедливо на ранней стадии формирования автомодельного решения. При охлаждении у стенки газ втекает в холодную область и тормозится, поэтому возможно возникновение конвективной неустойчивости.

Волны охлаждения образуются в случаях, когда температуропроводность среды падает с ростом температуры. Для высокотемпературного газа это возможно при механизме лучистой теплопроводности [1] вследстви- резкого уменьшения росселандова пробега излучения с ростом температуе ры. Другая возможность связана с возникновением волн охлаждения в диапазоне температур, при которых происходят химические реакции (диссоциация или ионизация газа) на участке уменьшения вклада соответствующих реакций в теплопроводность.

Хотя, рассматриваемая конвективная неустойчивость возникает в узких пристенных слоях, она может приводить к образованию турбулентной зоны и более интенсивному теплообмену газа со стенкой. Для высокотемпературного газа, где существование волн охлаждения связано с лучистой теплопроводностью, этот механизм может быть существен для задач отражения и взаимодействия ударных волн с поверхностями (торцами ударных труб).

Рассмотрим задачу о возникновении неустойчивости газа, занимающего полупространство и охлаждаемого с ограниченной стороны. Такая постановка описывает эксперименты следующего типа: пусть в начальный момент времени полубесконечная труба заполнена горячим газом с температурой T_0, который покоится либо набегает на охлаждаемую стенку с постоянной скоростью, что соответствует отражению ударной волны от стенки. При контакте со стенкой газ начинает охлаждаться, и возникает движение газа к охлаждаемой стенке трубы, что вызывает его охлаждение, так как вблизи стенки движение газа замедляется. Следовательно, в области движения ускорение газа меняет знак. Время рассасывания неоднородностей давления акустической волной меньше характерного времени прохождения тепловой волны, поэтому можно считать давление постоянным, значит, профиль плотности будет обратным к профилю температуры — у стенки газ более плотный.

При некоторых зависимостях коэффициента температуропроводности от температуры возможны условия, при которых ускорение охлаждаемого газа направлено в сторону увеличения его плотности, что приводит к конвективной неустойчивости газа. При ускорениях, превышающих некоторое критическое значение, может возникать турбулентное движение газа у торца стенки, сглаживающее распределение температуры газа у стенки.

Рассматриваемая задача состоит из трех частей: необходимо получить невозмущенное движение газа, считая его ламинарным и нестационарным; следует исследовать устойчивость такого движения и рассмотреть динамику развития турбулентной области.

2. Невозмущенное движение газа в волне охлаждения. Система уравнений, описывающая одномерное нестационарное движение газа, включает уравнение непрерывности, движения, энергии и состояния газа:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0; \tag{2.1}$$

$$\rho\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial v}{\partial x}\right); \tag{2.2}$$

$$\rho c_p\frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \frac{4}{3}\eta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right); \tag{2.3}$$

$$p = \rho RT. \tag{2.4}$$

Здесь η — вязкость; $\lambda(T)$ — коэффициент теплопроводности; c_p — теплоемкость газа; $x > 0$.

Пренебрегая вязкой диссипацией по сравнению с переносом тепла ($\eta(\partial v/\partial x)^2 \ll \lambda|\partial^2 T/\partial x^2|$) и считая давление постоянным (так как $La_{\text{зв}}/\varkappa \gg 1$, L — характерный размер неоднородности, $a_{\text{зв}}$ — скорость звука), перейдем к лагранжевым координатам.

Уравнение непрерывности и энергии (при c_p — const) в лагранжевых координатах (a) имеет вид

$$\rho dx = \rho_0 da; \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial T(a,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\lambda}{\rho_0 c_p}\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial T}{\partial a}\right). \tag{2.6}$$

При постоянном давлении плотность и коэффициент теплопроводности газа определяются температурой, поэтому уравнение энергии (2.6) может быть решено при заданных начальных и граничных условиях.

Вводя переменную $\xi = a/2(\chi_0 t)^{1/2}$, запишем уравнение (2.6) в виде

$$\frac{d}{d\xi} f(\theta)\frac{d\theta}{d\xi} + 2\xi\frac{d\theta}{d\xi} = 0, \tag{2.7}$$

где $\theta = T/T_0$; $f(\theta) = \rho(\theta)\lambda(\theta)/\rho_0\lambda_0$; $\chi_0 = \lambda_0/\rho_0 c_p$.

Будем считать, что газ ограничен бесконечной стенкой, температура которой при $x = -\infty$ поддерживается постоянной ($T(-\infty) = T_w$). Уравнение распространения тепла в материале стенки

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi_w\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x < 0, \tag{2.8}$$

где χ_w — температуропроводность стенки.

Граничные условия для уравнений (2.3), (2.8) следуют из непрерывности температуры и теплового потока на стенке:

$$\lambda_w\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x=-0} = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x=+0}, \quad \theta(-0) = \theta(+0). \tag{2.9}$$

Переходя к лагранжевым координатам, получаем граничные условия для уравнения (2.7):

$$\frac{d\theta}{d\xi}\bigg|_{\xi=0} = \frac{m(\theta-\theta_w)}{f(\theta)}\bigg|_{\xi=0}, \quad m = \left(\frac{4\lambda_w\rho_w c_w}{\pi\lambda_0\rho_0 c_p}\right)^{1/2}, \quad \theta(\infty) = 1. \tag{2.10}$$

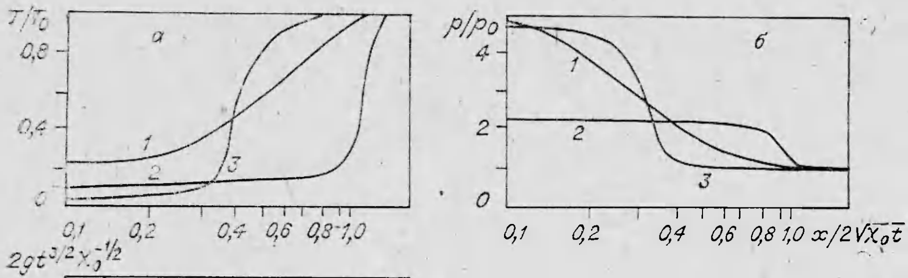
Связь эйлеровой и лагранжевой координат определяется из уравнения неразрывности (2.5):

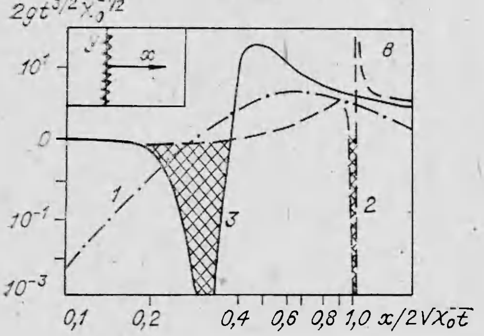
$$\frac{x}{2(\chi_0 t)^{1/2}} = \int_0^{\xi(\theta)} \frac{\rho_0}{\rho(\xi')}\,d\xi'. \tag{2.11}$$

Скорость v и ускорение газа g можно найти, дифференцируя (2.11), так как вязкость при одномерном движении несущественна:

$$v(\xi,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\chi_0}{t}\right)^{1/2}\left[f(\theta)\frac{d\theta}{d\xi} - f(0)\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}\right]; \tag{2.12}$$

$$g(\xi,t) = -\frac{v}{2t} + \frac{\xi^2\chi_0^{1/2}}{2t^{3/2}}\frac{d\theta}{d\xi}. \tag{2.13}$$





Уравнение (2.7) может быть решено аналитически только для зависимостей $\lambda \sim T^n$, $n = 0$, 1, 2 [5]. В общем случае при произвольных зависимостях $f(\theta)$ его необходимо решать численно. Расчеты профилей температуры и ускорения охлаждаемого газа показывают, что зона конвективной неустойчивости образуется в случае, когда теплопроводность газа достаточно резко уменьшается с ростом температуры, при этом возникает крутой фронт волны охлаждения. Существование фронта волны охлаждения для указанных зависимостей $\lambda(T)$ подтверждается оценкой, аналогичной условию существования волны нагрева [1].

Численные расчеты показывают, что для зависимости теплопроводности от температуры $\lambda \sim T^{-n}$ образование фронта с зоной конвективной неустойчивости происходит при $n \geqslant 2{,}5$.

На фигуре, *а — в* приведены безразмерные профили температуры, плотности, скорости и ускорения газа в зависимости от показателя степени $n = 1$; 2,5; 4,5 (кривые *1—3*). С ростом $n \geqslant 2{,}5$ фронт волны охлаждения становится более крутым и возрастает зона газа, в которой возможна конвективная неустойчивость.

3. Устойчивость невозмущенного движения. Для исследования конвективной неустойчивости одномерного невозмущенного движения газа следует рассмотреть трехмерные возмущения. Неоднородные возмущения, развивающиеся вдоль оси y (врезка на фигуре, *в*), могут иметь произвольный спектр, поэтому задача усложняется в том случае, когда характерные размеры неоднородностей по оси y по порядку величины совпадают с размерами неоднородностей невозмущенного нестационарного движения. Важно, однако, показать, что такое ламинарное движение охлаждаемого газа является неустойчивым. По этой причине, если не ставится цель получить критические условия перехода в турбулентный режим, можно рассмотреть только коротковолновые возмущения. В этом случае используется квазистационарное приближение, в котором будем считать, что характерные масштабы изменения возмущений меньше масштабов невозмущенной нестационарной задачи (рассматривается «рябь» на медленно меняющихся в пространстве распределениях невозмущенных параметров). Поскольку возмущенное движение является трехмерным, лагранжево описание теряет свои преимущества, поэтому применяем эйлерово описание движения.

Предполагая, что возмущения дозвуковые, уравнение непрерывности можно взять в приближении Буссинеска $\operatorname{div}\mathbf{v}_1 = 0$ [6]. Здесь и далее для возмущений соответствующих параметров используем индекс 1. Тогда линеаризованное уравнение движения имеет вид

$$(3.1)\qquad \rho_1\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \rho\nu\Delta\mathbf{v}_1.$$

Применим к уравнению (3.1) операцию rot rot и спроектируем результат на ось x. Считая кинематическую вязкость ν постоянной и невозмущенное уравнение квазистационарным, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta v_1 = \frac{g}{T}\Delta_\perp T_1 + \nu\Delta\,\Delta v_1, \quad \Delta_\perp \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{3.2}$$

Линеаризованное уравнение теплопроводности в квазистационарном приближении

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + v_1\frac{\partial T}{\partial x} = \chi\Delta T_1. \tag{3.3}$$

Система уравнений (3.2), (3.3) совпадает с уравнениями тепловой конвекции, если заменить ускорение силы тяжести на ускорение газа в данной точке. Решая получившуюся систему уравнений методом Галеркина с граничными условиями Рэлея [6](так как критерий конвективной устойчивости несущественно зависит от точных граничных условий [6]), найдем следующее выражение для инкремента возмущений γ:

$$\gamma(k) = -\frac{\alpha(\nu+\chi)}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}(\nu-\chi)^2 - \frac{gk^2}{\alpha T}\frac{\partial T}{\partial x}}. \tag{3.4}$$

Здесь $\alpha = m^2\pi^2/L^2$; m — целое число; k — волновое число; L — характерный размер неоднородности, имеющий величину порядка размеров зоны, в которой $g < 0$. Для коротковолновых возмущений ($kL \gg 1$) при достаточно больших значениях параметра $g/T(\partial T/\partial x)$ возникает конвективная неустойчивость.

4. Влияние турбулентности на охлаждение газа. Турбулентное перемешивание в области, где возникает неустойчивость типа тейлоровской, исследовалось в [7—9], где показано, что масштаб турбулентности $l = \alpha L$ (L — размер области перемешивания, α = 0,1—0,4). В рассматриваемой задаче турбулизованная область быстро расширяется до размеров зоны с отрицательным ускорением газа. Возмущения, распространяющиеся из этой области в зону с положительным ускорением, затухают, так как это направление ускорения стабилизирует возмущения. В результате такого эффекта распределение температур в области с отрицательным ускорением будет сглаживаться. Интенсивный теплообмен в области резкого градиента температуры может привести к интенсивному охлаждению газа через область неустойчивости с малым тепловым сопротивлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
2. **Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.** Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
3. **Раушенбах Б. В.** Вибрационное горение. М.: Физматгиз, 1961.
4. **Анисимов С. И., Зельдович Я. Б.** Рэлей-тейлоровская неустойчивость границы между продуктами детонации и газом при сферическом взрыве.— Письма в ЖТФ, 1977, т. 3, вып. 20.
5. **Goldsworthy F. A.** The structure of a contact region with application to the reflexion of a shock from a heat-conducting wall.— J. Fluid Mech., 1969, N 7.
6. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная неустойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
7. **Беленький С. З., Фрадкин Е. С.** Теория турбулентного перемешивания.— Тр. ФИАН им. Лебедева, 1965, т. 29.
8. **Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г.** К теории турбулентного перемешивания границы раздела жидкости в поле тяжести.— ПМТФ, 1976, № 4.
9. **Неуважаев В. Е.** К теории турбулентного перемешивания.— ДАН СССР, 1975, т. 222, № 5.

Поступила 11/III 1984 г.