

УДК 539.3:534.1

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, НАГРУЖЕННЫХ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ, ПРИ КРУЧЕНИИ И ИЗГИБЕ

Л. П. Железнов, В. В. Кабанов, Д. В. Бойко

Сибирский научно-исследовательский институт авиации им. С. А. Чаплыгина,
630051 Новосибирск
E-mail: lev@wsr.ru

С использованием вариационного метода конечных элементов в перемещениях исследована задача устойчивости подкрепленных набором стрингеров цилиндрических оболочек с эллиптическим контуром поперечного сечения при комбинированном нагружении изгибающим и крутящим моментами, поперечной силой и внутренним давлением. Докритическое напряженно-деформированное состояние оболочек считается моментным и нелинейным. Определено влияние нелинейности деформирования оболочек и их эллиптичности на величины критических нагрузок и формы потери устойчивости.

Ключевые слова: эллиптические цилиндрические оболочки, кручение, изгиб, внутреннее давление, нелинейное деформирование, устойчивость, метод конечных элементов.

Введение. В последнее время разрабатываются проекты гермокабин фюзеляжей самолетов с овальными и эллиптическими поперечными сечениями. Такие гермокабины позволяют более эффективно использовать внутреннее пространство фюзеляжей для размещения пассажиров. Потеря устойчивости обшивки гермокабин недопустима, так как при многократном повторении это может привести к образованию трещин и как следствие к разгерметизации гермокабин. Общая же потеря устойчивости (вместе с подкреплениями) вызывает разрушение всей конструкции.

Устойчивость некруговых оболочек по сравнению с круговыми оболочками исследована недостаточно. В большинстве известных работ по этой теме задачи об устойчивости оболочек решаются в первом приближении с использованием линейной теории оболочек и допущений о безмоментности докритического напряженного состояния и др. Погрешность линейной теории не оценивается. В ряде случаев эта теория оказывается недостаточно надежной, поскольку оболочки фюзеляжей являются тонкостенными и при больших перемещениях деформируются, как правило, нелинейно.

Перемещения конечных элементов некруговых цилиндрических оболочек как твердых тел. При перемещениях конечных элементов (КЭ) как твердых тел компоненты деформаций равны нулю. Полагая равными нулю линейные компоненты деформаций, изменения кривизн и кручения [1], получаем уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = u_x = 0, \quad \varepsilon_2 = k_2(v_\beta + w) = 0, \quad \varepsilon_3 = v_x + k_2 u_\beta = 0, \\ \chi_1 = w_{xx} = 0, \quad \chi_2 = k_2[k_2(v - w_\beta)]_\beta = 0, \quad \chi_3 = [k_2(v - w_\beta)]_x = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u, v, w — тангенциальные перемещения и прогиб; $R, k_2 = R^{-1}$ — радиус и кривизна контура поперечного сечения; β — угол между нормалью к контуру поперечного сечения

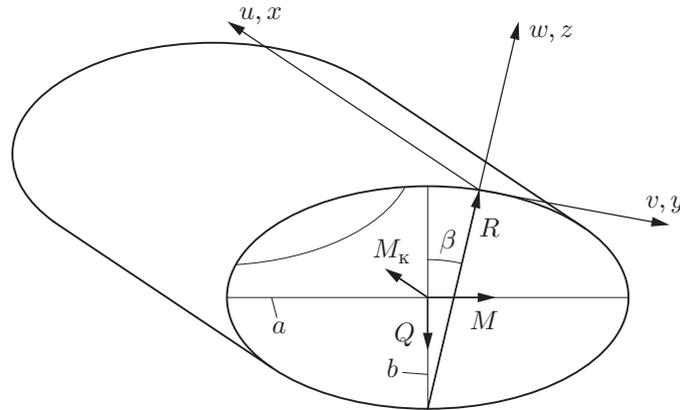


Рис. 1. Схема оболочки

и полуосью b поперечного сечения; x — продольная координата (рис. 1). Индексы x , β означают дифференцирование по соответствующим переменным.

Интегрируя уравнение (1), получаем функции перемещений КЭ как твердых тел

$$\begin{aligned} u &= C_1\psi_1 + C_2\psi_2 + C_6, & v &= C_3c + C_4s - C_5(\psi_1c + \psi_2s) + (C_2c - C_1s)x, \\ w &= C_3s - C_4c - C_5(\psi_1s - \psi_2c) + (C_2s + C_1c)x, & & (2) \\ \psi_1 &= \int Rs d\beta, & \psi_2 &= - \int Rc d\beta, & c &= \cos \beta, & s &= \sin \beta. \end{aligned}$$

Здесь C_i — произвольные постоянные.

В случае эллиптической оболочки имеют место соотношения

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad R = \frac{a^2b^2}{d^3}, \quad d^2 = a^2s^2 + b^2c^2, \quad k_2 = \frac{d^3}{a^2b^2}, \quad \psi_1 = -\frac{b^2c}{d}, \quad \psi_2 = -\frac{a^2s}{d},$$

в случае круговой оболочки — соотношения

$$z^2 + y^2 = R^2, \quad \psi_1 = -Rc, \quad \psi_2 = -Rs.$$

Конечный элемент и алгоритм решения задачи. Разобьем оболочку линиями главных кривизн на m частей по образующей и на n частей по направляющей. Таким образом, оболочку представим в виде набора $m \times n$ криволинейных прямоугольных КЭ. Используя билинейную аппроксимацию деформационных тангенциальных перемещений и бикубическую аппроксимацию для прогиба, с учетом (2) для полных перемещений точек КЭ естественной кривизны запишем выражения

$$\begin{aligned} u &= a_1xy + a_2x + a_3y + a_4 + a_6\psi_2 + a_{20}\psi_1, \\ v &= a_5xy + a_6xc + a_7y + a_8(\psi_1c + \psi_2s) - a_{20}xs + a_{23}c - a_{24}s, & (3) \\ w &= a_9x^3y^3 + a_{10}x^3y^2 + a_{11}x^3y + a_{12}x^3 + a_{13}x^2y^3 + a_{14}x^2y^2 + a_{15}x^2y + a_{16}x^2 + a_{17}xy^3 + \\ &+ a_{18}xy^2 + a_{19}xy + a_{20}xc + a_{21}y^3 + a_{22}y^2 + a_{23}s + a_{24}c + a_6xs + a_8(\psi_1s - \psi_2c). \end{aligned}$$

Систему (3) можно записать также в матричной форме

$$\tilde{\mathbf{u}} = P\mathbf{a}, \quad (4)$$

где $\tilde{\mathbf{u}} = \{u, v, w\}^T$ — вектор перемещений точек срединной поверхности КЭ; $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_{24}\}^T$ — вектор неизвестных коэффициентов a_i полиномов; P — матрица связи

размером 3×24 , элементами которой являются множители при коэффициентах a_i в соотношениях (3). Выразив коэффициенты a_i через узловые неизвестные, получаем

$$\mathbf{a} = B^{-1}\bar{\mathbf{u}}, \quad (5)$$

где $\bar{\mathbf{u}} = \{u_i, v_i, w_i, \vartheta_{1i}, \vartheta_{2i}, w_{xyi}, u_j, v_j, w_j, \vartheta_{1j}, \vartheta_{2j}, w_{xyj}, u_k, \dots, w_{xyk}, u_n, \dots, w_{xyn}\}^T$ — вектор узловых перемещений, углов поворотов и смешанных производных прогиба КЭ; B — матрица размером 24×24 , ненулевые элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned} b_{1j} &= p_{1j}, & b_{2j} &= p_{2j}, & b_{3j} &= p_{3j}, & b_{4j} &= (p_{3j})_x, & b_{5j} &= (p_{2j} - (p_{3j})_y)/R, \\ b_{6j} &= (p_{3j})_{xy}, & x &= -a_1, & y &= -b_1, & b_{7j} &= p_{1j}, & b_{8j} &= p_{2j}, & b_{9j} &= p_{3j}, & b_{10j} &= (p_{3j})_x, \\ b_{11j} &= (p_{2j} - (p_{3j})_y)/R, & b_{12j} &= (p_{3j})_{x\beta}, & x &= -a_1, & y &= b_1, & b_{13j} &= p_{1j}, & b_{14j} &= p_{2j}, \\ b_{15j} &= p_{3j}, & b_{16j} &= (p_{3j})_x, & b_{17j} &= (p_{2j} - (p_{3j})_\beta)/R, & b_{18j} &= (p_{3j})_{xy}, & x &= a_1, & y &= -b_1, \\ b_{19j} &= p_{1j}, & b_{20j} &= p_{2j}, & b_{21j} &= p_{3j}, & b_{22j} &= (p_{3j})_x, & b_{23j} &= (p_{2j} - (p_{3j})_y)/R, \\ b_{24j} &= (p_{3j})_{xy}, & x &= a_1, & y &= b_1 & (j = 1, \dots, 24, & a_1 = L/(2m), & b_1 = l/(2n)). \end{aligned}$$

Здесь L, l — характерные размеры оболочки вдоль образующей и направляющей соответственно. В каждом узле КЭ имеется шесть неизвестных, следовательно, КЭ имеет 24 степени свободы.

Подставляя выражение (5) в (4), получаем зависимость перемещений точек КЭ от узловых неизвестных

$$\tilde{\mathbf{u}} = PB^{-1}\bar{\mathbf{u}}.$$

Запишем нелинейные соотношения Коши для деформаций и изменений кривизн срединной поверхности оболочки [1]

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_n, \quad (6)$$

где $\mathbf{e}_l = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3\}^T$ — вектор с линейными компонентами

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_x, & \varepsilon_2 &= k_2(v_\beta + w), & \varepsilon_3 &= v_x + k_2u_\beta, \\ \chi_1 &= -w_{xx}, & \chi_2 &= k_2(k_2(v - w_\beta))_\beta, & \chi_3 &= k_2(v - w_\beta)_x, \end{aligned} \quad (7)$$

$\mathbf{e}_n = \{\bar{\mathbf{e}}_n^T, 0, 0, 0\}^T$ ($\bar{\mathbf{e}}_n = \{\varepsilon_{1n}, \varepsilon_{2n}, \varepsilon_{3n}\}^T$) — вектор с нелинейными компонентами

$$\varepsilon_{1n} = \vartheta_1^2/2 = (w_x)^2/2, \quad \varepsilon_{2n} = \vartheta_2^2/2 = k_2^2(v - w_\beta)^2/2, \quad \varepsilon_{3n} = \vartheta_1\vartheta_2 = -k_2w_x(v - w_\beta). \quad (8)$$

Согласно [1] закон упругости для оболочки имеет вид

$$\mathbf{T} = D\mathbf{e}. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3, M_1, M_2, M_3\}^T$ — вектор внутренних усилий и моментов; D — матрица упругих жесткостей. Будем считать оболочку конструктивно-анизотропной и примем гипотезы Кирхгофа — Лява. В этом случае матрица D имеет вид

$$D = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & c_{11} & c_{12} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 & c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 & 0 & c_{33} \\ c_{11} & c_{12} & 0 & d_{11} & d_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix},$$

где элементы b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} определяются в соответствии с [1].

Рассмотрим КЭ оболочки, на который действуют система неоднородной поверхностной нагрузки $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}^T$, система контурных сил и моментов $\mathbf{R}_k = \{P_{1k}, P_{2k}, P_{3k}, M_{1k}, M_{2k}, M_{3k}\}^T$ и система локальных сил и моментов $\mathbf{R}_l = \{P_{1l}, P_{2l}, P_{3l}, M_{1l}, M_{2l}, M_{3l}\}^T$. Индексы 1, 2, 3 соответствуют направлениям осей x, y, z . Полная потенциальная энергия КЭ равна $\Pi = W - V$ (W — энергия деформации; V — работа внешних сил). Согласно [1]

$$W = \frac{1}{2} \iint_s \mathbf{T}^T \mathbf{e} ds = \frac{1}{2} \iint_s (\mathbf{T}^T \mathbf{e}_l + \mathbf{T}^T \mathbf{e}_n) ds = \frac{1}{2} \iint_s (\mathbf{e}_l^T D \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_l^T D \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n^T D \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_n^T D \mathbf{e}_n) ds, \quad (10)$$

$$V = \iint_s \mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{u}} ds + \int_{l_k} \mathbf{R}_k^T \tilde{\mathbf{u}}_k dl_k + \mathbf{R}_l^T \tilde{\mathbf{u}}_l.$$

Запишем вариационное уравнение Лагранжа $\delta\Pi = \delta W - \delta V = 0$. Варьируя (10) по узловым неизвестным КЭ, получаем

$$\delta\Pi = \iint_s (\mathbf{e}_l^T D \delta \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_l^T D \delta \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n^T D \delta \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_n^T D \delta \mathbf{e}_n) ds - \delta V, \quad (11)$$

$$\delta V = \iint_s \mathbf{q}^T \delta \tilde{\mathbf{u}} ds + \int_{l_k} \mathbf{R}_k^T \delta \tilde{\mathbf{u}}_k dl_k + \mathbf{R}_l^T \delta \tilde{\mathbf{u}}_l.$$

Подставляя (7), (8) в (11), имеем систему нелинейных алгебраических уравнений для узловых неизвестных КЭ. Учитывая в соответствии с [2] условия совместности перемещений КЭ и граничные условия, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений для всех узловых неизвестных оболочки

$$K \mathbf{u}' - \mathbf{Q} = 0. \quad (12)$$

Здесь K — матрица жесткости оболочки, элементы которой получаются суммированием элементов матриц жесткостей отдельных КЭ с использованием матрицы индексов [3]; \mathbf{Q} — вектор обобщенных узловых сил оболочки, элементы которого получаются суммированием элементов векторов отдельных КЭ с использованием матрицы индексов; $\mathbf{u}' = \{\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_k, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{m \times n}\}^T$ — вектор узловых неизвестных оболочки; $\tilde{\mathbf{u}}_k$ — вектор узловых перемещений k -го узла конечно-элементной сетки.

Система (12) решается шаговым (по нагрузке) методом с использованием на каждом шаге метода линеаризации Ньютона — Канторовича [4, 5], уравнение которого для оболочки можно записать в виде [6]

$$H \Delta \mathbf{u}' = \mathbf{Q} - \mathbf{G}, \quad (\mathbf{u}')^{n+1} = (\mathbf{u}')^n + \Delta \mathbf{u}'. \quad (13)$$

Здесь H — матрица Гессе оболочки, элементами которой являются вторые производные потенциальной энергии деформации; \mathbf{G} — градиент потенциальной энергии деформации, элементами которого являются первые производные потенциальной энергии деформации. Система линейных уравнений (13) решается методом Краута [7] с использованием разложения матрицы Гессе $H = L^T D L$ на диагональную и две треугольные. Найденные узловые перемещения применяются для определения перемещений (3), деформаций (6), моментов и усилий (9). Контроль устойчивого состояния оболочки осуществляется проверкой положительной определенности матрицы Гессе по критерию Сильвестра [4], что сводится к проверке положительности элементов диагональной матрицы D . Появление отрицательных элементов соответствует потере устойчивости оболочек. Вычислив значение параметра

нагрузки, при котором равновесное состояние неустойчиво, можно определить форму потери устойчивости оболочки из решения системы $H\mathbf{d} = 0$, где \mathbf{d} — вектор бифуркационных узловых перемещений. Для этого определяется линейно зависящая (вырожденная) строка матрицы H , соответствующая первому отрицательному элементу матрицы D . Элементы этой строки и соответствующего столбца матрицы H полагаются равными нулю. Вместо диагонального коэффициента ставится единица, а в правую часть системы переносится соответствующий столбец, умноженный на докритическое перемещение, соответствующее вырожденной строке. Из решения полученной таким образом системы определяется форма потери устойчивости оболочки. В случае наличия предельной точки на кривых деформирования форма потери устойчивости определяется с учетом нелинейного исходного напряженно-деформированного состояния для нагрузки, близкой к предельной.

Исследование нелинейного деформирования и устойчивости подкрепленной оболочки. Рассмотрим задачу нелинейного деформирования и устойчивости консольно заземленной с одного края эллиптической цилиндрической оболочки, подкрепленной набором стрингеров, при действии изгибающего M , крутящего M_k моментов, поперечной силы Q и внутреннего давления q (см. рис. 1). Нагруженный край оболочки подкреплен шпангоутом большой жесткости на изгиб в своей плоскости. Действие изгибающего момента M заменим действием неравномерных по окружности оболочки осевых усилий $T_x = Mz_1/J$ (z_1 — расстояние от точек контура оболочки до большей оси эллипса a). Действие поперечной силы Q заменим действием погонных краевых касательных усилий $T_{xy} = QS/J$ (S, J — статический момент и момент инерции поперечного сечения оболочки относительно оси эллипса a). Действие крутящего момента M_k заменим действием равномерных по окружности оболочки касательных усилий $T_{xy} = M_k/(2\omega)$ ($\omega = \pi ab$ — площадь в свету поперечного сечения оболочки). Действие внутреннего давления заменим действием нормального давления и краевых растягивающих сил $N = q\omega$.

Рассмотрим оболочку с заданными длинами полуосей a и b . Расчеты проводились при следующих значениях параметров: длина оболочки $L = 1000$ мм, толщина $h = 2$ мм, $R_0 = 1900$ мм, модуль упругости $E = 7 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Площадь поперечного сечения стрингеров $F_c = 100$ мм², собственный момент инерции 3333 мм⁴, шаг стрингеров 150 мм, эксцентриситет стрингеров относительно срединной поверхности оболочки 10 мм.

Введем следующие обозначения: $k_m = M^*/M_0$, $k_p = M_k^*/M_{k0}$, $k_\tau = Q^*/Q_0$ (M^* , M_k^* , Q^* — критические значения изгибающего, крутящего моментов и поперечной силы; $M_0 = \pi ER_0 h^2 / \sqrt{3(1 - \nu^2)}$, $M_{k0} = 2\pi CR_0^2 S_b$, $Q_0 = \pi R_0 C S_b$ — классические критические значения изгибающего, крутящего моментов и поперечной силы для неподкрепленной круговой цилиндрической оболочки радиусом R_0 при раздельном действии M , M_k , Q и $q = 0$; $S_b = 0,74(Eh/(1 - \nu^2)^{5/8})(h/R_0)^{5/4}(R_0/L)^{1/2}$; $C = 0,953$; $R_0 = P/(2\pi) = (2a/\pi)E(\pi/2, b/a)$ — эквипериметрический радиус, т. е. радиус круговой оболочки с периметром P , равным периметру эллипса; $E(\pi/2, b/a)$ — полный эллиптический интеграл второго рода).

На рис. 2, а показана зависимость параметра k_τ от параметра эллиптичности оболочки $\bar{a} = a/b$ для эквипериметрических оболочек в случае линейного и нелинейного исходных напряженно-деформированных состояний при $q = 1,5$ атм, $\bar{k}_p = M_k/M_{k0} = 2,5$ и различных значениях параметра k_m . Видно, что учет нелинейности приводит к уменьшению (на 13 %) критических значений поперечной силы для “высоких” ($\bar{a} < 0,6$) оболочек и к незначительному их увеличению (на 5 %) при $\bar{a} > 0,6$.

На рис. 2, б представлена зависимость параметра k_m от параметра эллиптичности оболочки \bar{a} для эквипериметрических оболочек в случае линейного и нелинейного исходных напряженно-деформированных состояний при $q = 1,5$ атм, $\bar{k}_p = 2,5$ и различных значениях

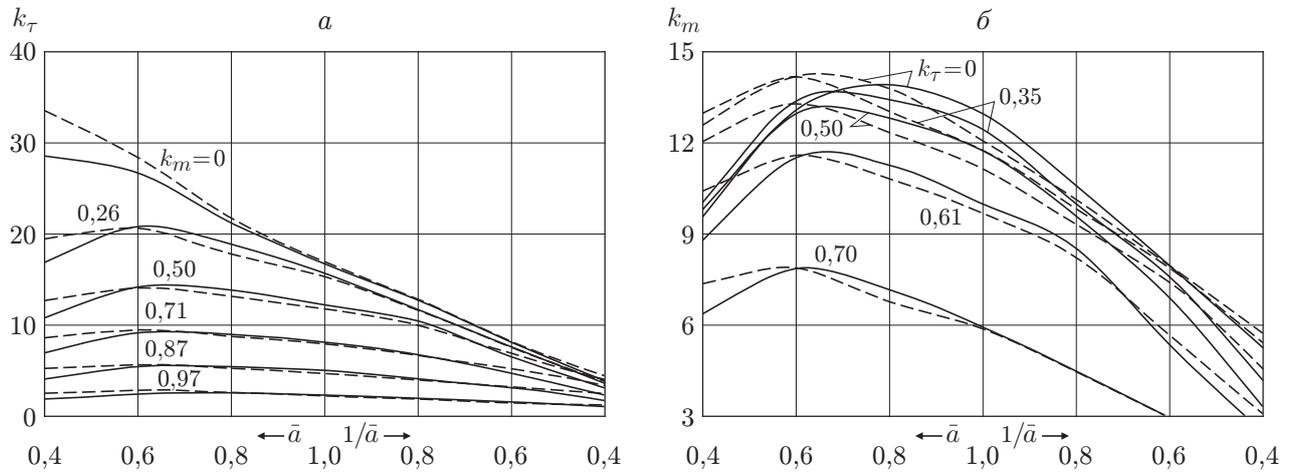


Рис. 2. Зависимости параметров k_τ (а) и k_m (б) от параметра эллиптичности \bar{a} при $q = 1,5$ атм, $\bar{k}_p = 2,5$:

сплошные линии — нелинейное исходное напряженно-деформированное состояние;
штриховые — линейное исходное напряженно-деформированное состояние

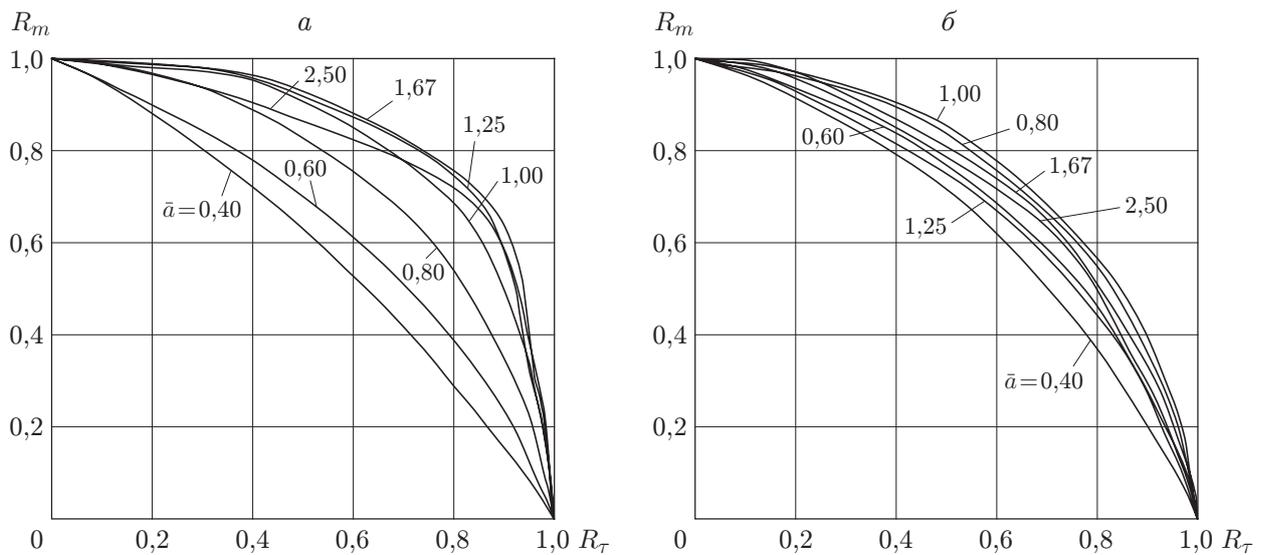


Рис. 3. Зависимость $R_m(R_\tau)$ в случае линейного (а) и нелинейного (б) исходных напряженно-деформированных состояний при различных значениях параметра \bar{a}

параметра k_τ . Из рис. 2,б следует, что и в этом случае учет нелинейности приводит к уменьшению критических значений момента (на 22 %) у “высоких” ($\bar{a} < 0,7$) оболочек и к незначительному их увеличению (на 5 %) у “низких” ($\bar{a} > 0,7$) оболочек.

На рис. 3 показана зависимость между относительными критическими значениями изгибающего момента R_m и относительными критическими значениями поперечной силы R_τ для эквипериметрических оболочек в случае линейного (рис. 3,а) и нелинейного (рис. 3,б) исходных напряженно-деформированных состояний при различных значениях параметра эллиптичности оболочки \bar{a} . Из рис. 3 следует, что кривые зависимостей являются выпуклыми, причем в случае эллиптических оболочек их кривизна меньше, чем в случае круговых оболочек.

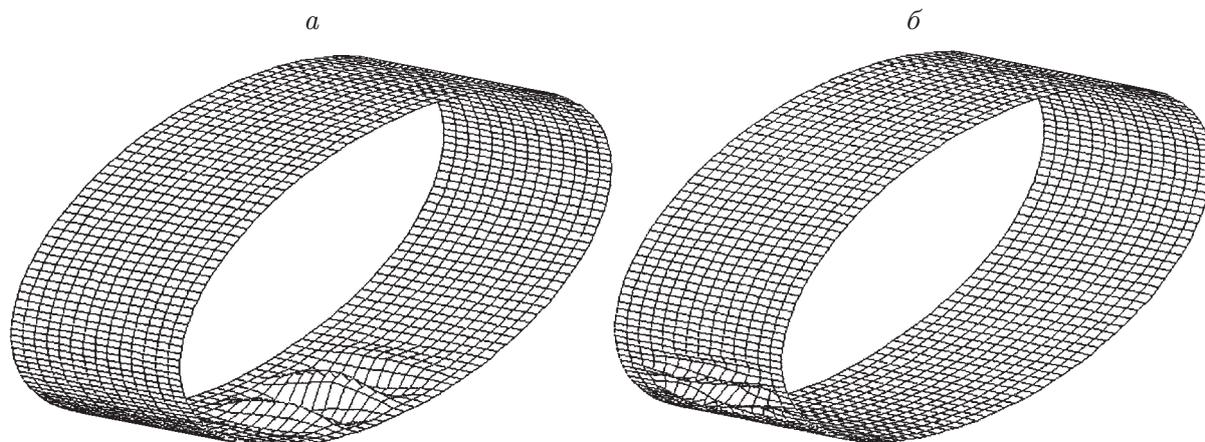


Рис. 4. Формы потери устойчивости оболочек:

a — потеря устойчивости в зоне действия максимальных касательных усилий;

б — то же в зоне действия максимальных сжимающих усилий

На рис. 4 представлены характерные формы потери устойчивости оболочек. Видно, что форма потери устойчивости существенно зависит от отношения a/b , вида нагрузки и параметров R_m и R_τ . Как правило, оболочки теряют устойчивость в зоне действия максимальных касательных усилий с образованием двух-трех складок в области с малой кривизной оболочек при преобладающем действии поперечной силы (рис. 4, *a*) или в зоне действия максимальных сжимающих усилий (в нижней части оболочки) с образованием нескольких поперечных волн при преобладающем действии изгибающего момента (рис. 4, *б*).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанов В. В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1982.
2. Кабанов В. В., Астрахарчик С. В. Нелинейное деформирование и устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек при изгибе // *Пространственные конструкции в Красноярском крае: Сб. науч. тр.* Красноярск: Инж.-строит. ин-т, 1985. С. 75–83.
3. Постнов В. А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. Л.: Судостроение, 1974.
4. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. М.: Наука, 1966.
5. Канторович Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Т. Р. Акилов. М.: Физматгиз, 1959.
6. Астрахарчик С. В., Железнов Л. П., Кабанов В. В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости оболочек и панелей ненулевой гауссовой кривизны // *Изв. РАН. Механика твердого тела.* 1994. № 2. С. 102–108.
7. Уилкинсон Дж. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра / Дж. Уилкинсон, К. Райнш. М.: Машиностроение, 1976.

Поступила в редакцию 20/V 2009 г.,
в окончательном варианте — 13/VII 2009 г.