т. е. примерно в области 7 (см. фиг. 1), обнаружена серия отдельных микротрещин, что может указать на факт существования кратковременных отрицательных напряжений в этом сечении. Сетка микротрещин по толщине образовавшегося тыльного откола значительно гуще, что также соответствует результатам анализа течений.

Поступила 10 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Curran D. R.** Nonhydrodynamic attenuation of shock waves in aluminum.— «J. Appl. Phys.», 1963, vol. 34, N 9.
2. **Новиков С. А., Синицына Л. М.** О влиянии давления ударного сжатия на величину критических напряжений сдвига в металлах.— ПМТФ, 1970, № 6, с. 107.
3. **Альтшулер Л. В., Бражник М. И., Телегин Г. С.** Прочность и упругость железа и меди при высоких давлениях ударного сжатия.— ПМТФ, 1971, № 6.
4. **Альтшулер Л. В., Кормер С. Б., Баканова А. А., Трунин Р. Ф.** Уравнения состояния алюминия, меди и свинца для области высоких давлений.— ЖЭТФ, 1960, т. 38, вып. 3.

УДК 539.375

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ТРЕЩИН, ИСХОДЯЩИХ ИЗ КОНТУРОВ ОТВЕРСТИЙ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ

В. М. Мирсалимов

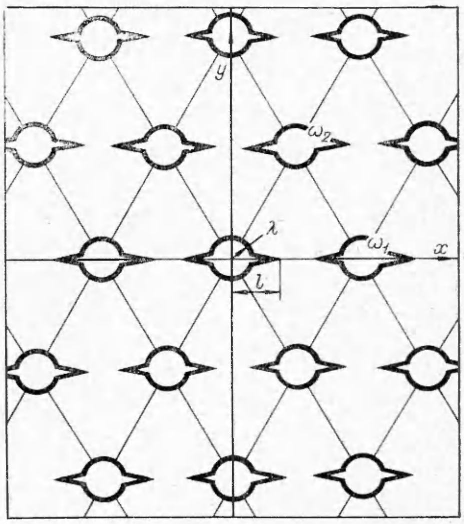
(*Липецк*)

В последние годы появилось значительное число работ (см. обзоры [1, 2]), в которых изучалось предельное напряженное состояние возле трещин, исходящих из контура одиночного отверстия. Аналогичной задаче о растяжении пластины с одиночным отверстием посвящена работа [3].

1. Пусть имеется двоякопериодическая решетка с круговыми отверстиями, имеющими радиус $\lambda(\lambda < 1)$ и центры в точках

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2 \ (m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots),\ \omega_1 = 2,\ \omega_2 = 2le^{i\alpha},\ l > 0,\ \operatorname{Im}\omega_2 > 0.$$

Из контуров отверстий исходят симметричные прямолинейные щели (фиг. 1). Контуры круговых отверстий и берега разрезов свободны от нагрузок. Рассмотрим задачу о растяжении такой перфорированной пластины постоянными усилиями $\sigma_2 = \sigma_y^\infty$ в направлении, перпендикулярном линии разрезов. В силу симметрии граничных условий и геометрии области D, занятой материалом пла-



Фиг. 1

стипы, напряжения являются двоякопериодическими функциями с основными периодами ω_1 и ω_2.

Для решения задачи естественным образом объединяется метод, развитый при решении двоякопериодической упругой задачи [4], с методом [5, 6] построения в явной форме потенциалов Колосова — Мусхелишвили, соответствующих неизвестным нормальным смещениям вдоль разрезов.

Напряжения и смещения представим [7] через потенциалы Колосова — Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) \quad (z = x + iy), \tag{1.1}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)],$$

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)},$$

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z),$$

$$\varkappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{(плоская деформация)}, \\ (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{(плоское напряженное состояние)}, \end{cases}$$

μ и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона соответственно.

На основании формул (1.1) и граничных условий на контурах круговых отверстий и берегах разрезов задача сводится к определению двух аналитических в области D функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = 0; \tag{1.2}$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = 0, \tag{1.3}$$

где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega_1 + n\omega_2$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$; t — аффикс точек берегов разрезов.

Решение краевой задачи (1.2), (1.3) ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_2(z); \tag{1.4}$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_L g(x)\,\zeta(x - z)\,dx + A, \tag{1.5}$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_L [\zeta(x - z) + Q(x - z) - x\gamma(x - z)]\,g(x)\,dx + B;$$

$$\Phi_2(z) = \frac{1}{4}\sigma_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \tag{1.6}$$

$$\Psi_2(z) = \frac{1}{2}\sigma_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\mathrm{Im}\,\alpha_{2k} = \mathrm{Im}\,\beta_{2k} = 0,$$

где интегралы в (1.5) берутся по линии $L = \{[-l, -\lambda] + [\lambda, l]\}$; $\gamma(z)$ и $\zeta(z)$ — функции Вейерштрасса; $Q(z)$ — специальная мероморфная функция [4]; $g(x)$ — искомая функция; A и B — константы.

К соотношениям (1.4)—(1.6) следует добавить дополнительное условие, вытекающее из физического смысла задачи

$$\int_L g(x)\,dx = 0. \tag{1.7}$$

Функции $\gamma(z)$, $\zeta(z)$ и $Q(z)$ в конгруэнтных точках удовлетворяют условиям [4]

$$\gamma(z + \omega_j) - \gamma(z) = 0, \quad \zeta(z + \omega_j) - \zeta(z) = \delta_j \quad (j = 1, 2), \tag{1.8}$$

$$Q(z+\omega_j)-Q(z)=\overline{\omega}_j\gamma(z)+\gamma_j,$$
$$\delta_j=2\zeta(\omega_j/2),\ \gamma_j=2Q(\omega_j/2)-\overline{\omega}_j\gamma(\omega_j/2),$$
$$\delta_1\omega_2-\delta_2\omega_1=2\pi i,\ \gamma_2\omega_1-\gamma_1\omega_2=\delta_1\overline{\omega}_2-\delta_2\overline{\omega}_1.$$

Условие равенства нулю главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D, эквивалентно равенствам

$$q(z+\omega_j)-q(z)=0\ (j=1,\ 2),$$
$$q(z)=\varphi(z)+z\overline{\Phi(z)}+\overline{\psi(z)}$$

и с учетом (1.7), (1.8) приводит к соотношению

$$A+\overline{A}+\overline{B}=-(1/\omega_1)\{\delta_1 a+\overline{\gamma}_1 a+\overline{\delta}_1(a+\overline{a})-\alpha_2\lambda^2(\delta_1+\overline{\gamma}_1)-\beta_2\lambda^2\overline{\delta}_1\}.$$

Можно убедиться, что функции (1.4)—(1.6) при условии (1.7) определяют класс симметричных задач с двоякопериодическим распределением напряжений.

Неизвестная функция $g(x)$ и постоянные α_{2k+2} и β_{2k+2} должны быть определены из краевых условий (1.2), (1.3).

В силу выполнения условий двоякопериодичности система граничных условий (1.2) заменяется одним функциональным уравнением, например, на контуре $\tau=\lambda e^{i\theta}$, а система условий (1.3) — краевым условием на L.

Для составления уравнений относительно коэффициентов α_{2k+2} и β_{2k+2} функций $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ представим граничное условие (1.2) в виде

$$\Phi_2(\tau)+\overline{\Phi_2(\tau)}-\left[\overline{\tau}\Phi_2'(\tau)+\Psi_2(\tau)\right]e^{2i\theta}=f_1(\theta)+if_2(\theta), \tag{1.9}$$

где

$$f_1(\theta)+if_2(\theta)=-\Phi_1(\tau)-\overline{\Phi_1(\tau)}+\left[\overline{\tau}\Phi_1'(\tau)+\Psi_1(\tau)\right]e^{2i\theta}.$$

Относительно функции $f_1(\theta)+if_2(\theta)$ будем считать, что она разлагается на $|\tau|=\lambda$ в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$f_1(\theta)+if_2(\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_{2k}e^{2ik\theta},\quad \operatorname{Im}A_{2k}=0; \tag{1.10}$$

$$A_{2k}=-\frac{1}{2\pi}\int_L g(x)f_{2k}(x)\,dx, \tag{1.11}$$

$$f_{2k}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{2\operatorname{Re}[A+\zeta(x-\lambda e^{i\theta})]\}e^{-2ik\theta}d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\lambda e^{-i\theta}\gamma(x-\lambda e^{i\theta})+$$
$$+\zeta(x-\lambda e^{i\theta})+Q(x-\lambda e^{i\theta})-x\gamma(x-\lambda e^{i\theta})+B\}e^{-i(2k-2)\theta}d\theta.$$

Ввиду громоздкости функций $f_{2k}(x)$ результат интегрирования, полученный при помощи теории вычетов, не приводится.

Подставив в левую часть краевого условия (1.9) вместо $\Phi_2(\tau)$, $\overline{\Phi_2(\tau)}$, $\Phi_2'(\tau)$ и $\Psi_2(\tau)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности $z=0$, а в правую часть (1.9) ряд Фурье (1.10) и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\theta}$, получим [4] две бесконечные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k+2} и β_{2k+2}. Ввиду весьма громоздкого вида они не приводятся (см. в [4] системы (3.3), (3.5), гл. 1).

Требуя, чтобы функции (1.4) удовлетворяли краевому условию на берегу разреза L, получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\int_L g(t)K(t-x)\,dt+H(x)=0,\quad K(x)=3\zeta(x)+Q(x)-x\gamma(x), \tag{1.12}$$
$$H(x)=A+\overline{A}+\overline{B}+2\Phi_2'(x)+x\Phi_2'(x)+\Psi_2(x).$$

Сингулярное уравнение (1.12) и системы (3.3), (3.5) из [4] являются основными уравнениями задачи, позволяющими определить функцию $g(x)$ и коэффициенты α_{2k+2}, β_{2k+2}. Зная функции $g(x)$ и $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$, можно найти напряженно-деформированное состояние перфорированной пластины. В механике хрупкого разрушения [8] особый интерес представляет коэффициент интенсивности напряжений в окрестности конца трещины. В рассматриваемом случае трещина одним концом $x = \lambda$ выходит на поверхность кругового отверстия, свободного от внешних усилий. В этом случае напряжения в кончике $x = \lambda$ ограничены и имеют особенность на другом конце $x = l$. В частности, для коэффициента интенсивности напряжений K_I у вершины трещины на концах $x = \pm l$ имеем

$$K_I = 2\sqrt{2\pi|x - l|}\,g(x).$$

Функция $g(x)$ ограничена в окрестности $x = +\lambda$ и имеет сингулярность порядка 1/2 в окрестности $x = \pm l$.

Развитие трещины определяется некоторым дополнительным условием, задаваемым в кончике трещины. Для линейно-упругого тела дополнительным условием является локальный критерий разрушения Гриффитса — Ирвина $K_I = K_{Ic}$ (K_{Ic} — постоянная, характеризующая сопротивление материала распространению в нем трещин). Это условие позволяет определить величину предельного (критического) значения внешних усилий σ_y^∞.

Воспользовавшись разложениями [4] в основном параллелограмме периодов

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_{j+1} z^{2j+1}}{2^{2j+2}}, \quad g_k = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{T^{2k}},$$

$$\gamma(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+1)\, g_{j+1}}{2^{2j+2}} z^{2j}, \quad \rho_k - \sum_{m,n}{}' \frac{\overline{T}}{T^{2k+1}},$$

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+2)\,\rho_{j+1}}{2^{2j+2}} z^{2j+1}, \quad T = \frac{1}{2} P_{mn},$$

$$m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots;\ k = 2,\ 3, \ldots,$$

уравнение (1.12) после некоторых простых преобразований приведем к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{p(\xi)}{\xi - \xi_0}\, d\xi + \frac{1}{\pi} \int_L p(\xi)\, K_0(\xi - \xi_0)\, d\xi + H(\xi_0) = 0, \tag{1.13}$$

$$p(\xi) = g(t), \quad \xi = \frac{t}{l}, \quad \xi_0 = \frac{x}{l}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{l}, \quad L = \{[-1, -\lambda_1] + [\lambda_1, 1]\},$$

$$K_0(\xi) = K_*(\xi) - K(\xi),$$

$$K(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} \xi^{2j+1}, \quad \lambda \leqslant l < 1,$$

$$K_*(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j^* \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} \xi^{2j+1}, \quad K_0 = \omega \operatorname{Re} \delta_1,$$

$$K_j = g_{j+1}, \quad K_0^* = -\frac{\omega_1}{2}(\overline{\gamma}_1 + \overline{\delta}_1), \quad K_j^* = (j+1)(\rho_{j+1} - g_{j+1}), \quad j = 1, 2,$$

$$H(\xi_0) = \sigma_y^\infty + \frac{1}{\omega_1}\left[\alpha_2 \lambda^2 (\delta_1 + \overline{\gamma}_1) + \beta_2 \lambda^2 \overline{\delta}_1\right] + 2\Phi_2(\xi_0 l) +$$

$$+ \xi_0 l \Phi_2'(\xi_0 l) + \Psi_2(\xi_0 l).$$

К сингулярному интегральному уравнению следует добавить дополнительное условие (1.7), преобразованное к виду

$$\int\limits_{L} p(\xi)\,d\xi = 0. \tag{1.14}$$

Условие (1.14) определяет симметричное решение задачи. При $p(\xi) = -p(-\xi)$ уравнение (1.13) принимает вид

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{\lambda_1}^{1} \frac{\xi p(\xi)\,d\xi}{\xi^2 - \xi_0^2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda_1}^{1} K_0^*(\xi, \xi_0)\, p(\xi)\,d\xi + H(\xi_0) = 0, \tag{1.15}$$

$$K_0^*(\xi, \xi_0) = K_0(\xi - \xi_0) + K_0(\xi + \xi_0), \quad \lambda_1 \leqslant \xi_0 < 1.$$

Преобразуем уравнение (1.15) к виду, более удобному для нахождения его приближенного решения. Для этого сделаем замену переменных

$$\xi^2 = u = \frac{1-\lambda_1^2}{2}(\tau + 1) + \lambda_1^2, \tag{1.16}$$

$$\xi_0^2 = u_0 = \frac{1-\lambda_1^2}{2}(\eta + 1) + \lambda_1^2.$$

При этом отрезок интегрирования $[\lambda_1, 1]$ переходит в отрезок $[-1, 1]$, а преобразованное уравнение (1.15) принимает форму

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{p(\tau)\,d\tau}{\tau - \eta} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} p(\tau)\, B(\eta, \tau)\,d\tau + H_{**}(\eta) = 0, \tag{1.17}$$

где

$$p(\tau) = p(\xi);$$

$$B(\eta, \tau) = \frac{1-\lambda_1^2}{2}\sum_{j=0}^{\infty} (K_j^* - K_j)\left(\frac{i}{2}\right)^{2j+2} u_0^j A_j;$$

$$A_j = \left\{(2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{u}{u_0}\right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)\ldots[(2j+1)-(2j+1-1)]}{1\cdot 2\ldots(2j+1)}\left(\frac{u}{u_0}\right)^j\right\}.$$

Для простоты записи полагаем $H_{**}(\eta) = H_*(\xi_0)$. Напомним, что функция $H_{**}(\eta)$ содержит неизвестные коэффициенты α_{2k+2}, β_{2k+2}.

Ищется решение уравнения (1.17), ограниченное на левом конце. Сингулярное интегральное уравнение обычно регуляризуют по Карлеману — Векуа путем сведения его к уравнению Фредгольма. Однако при решении задач, представляющих интерес для приложений, целесообразно воспользоваться одним из способов прямого решения сингулярных уравнений [9, 10]. Воспользуемся способом, развитым в работе [11]. Представим решение в виде

$$p(\tau) = p_0(\tau)\sqrt{(1+\tau)/(1-\tau)}. \tag{1.18}$$

Здесь $p_0(\tau)$ непрерывна по Гельдеру на $[-1, 1]$, причем функция $p_0(\tau)$ заменяется интерполяционным полиномом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам

$$L_n[p_0, \tau] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} p_k^0 \frac{\cos n\theta \sin\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k}, \quad \tau = \cos\theta,$$

$$p_k^0 = p_0(\tau_k), \quad \tau_m = \cos\theta_m, \quad \theta_m = \frac{2m-1}{2n}\pi, \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Используя соотношения [10]

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\tau d\tau}{\cos\tau - \cos\theta} = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \ n = 1, 2, \ldots,$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n} F(\cos\theta_\nu)$$

и выражения (1.11), (1.16), получаем квадратурные формулы

$$(1.19)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(\tau)\,d\tau}{\tau-\eta} = \frac{1+\cos\theta}{n\sin\theta}\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu^0 \sum_{m=0}^{n-1}\cos m\theta_\nu \sin m\theta + \frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu^0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} p(\tau) B(\eta, \tau)\,d\tau = \frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{n}(1+\cos\theta_\nu) B(\cos\theta, \cos\theta_\nu)\, p_\nu^0;$$

$$(1.20)\quad A_{2k} = -\frac{1}{2n}\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu^0 (1+\cos\theta_\nu) f_{2k}^*(\cos\theta_\nu),$$

где $f_{2k}^*(\tau) = \frac{1-\lambda_1^2}{2} f_{2k}^*(\xi^2); \quad \xi l f_{2k}^*(\xi^2) = f_{2k}(t).$

Формулы (1.19), (1.20) позволяют заменить основные уравнения бесконечной системой линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений p_ν^0 искомой функции в узловых точках, а также коэффициентов α_{2k+2}, β_{2k+2}.

После некоторых выкладок сингулярное уравнение заменяется системой

$$(1.21)\quad \sum_{\nu=1}^{n} a_{m\nu} p_\nu^0 + \frac{1}{2} H_{**}(\eta_m) = 0, \ m = 1, 2, \ldots, n,$$

$$a_{m\nu} = \frac{1}{2n}\left[1 + \operatorname{ctg}\frac{\theta_m}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta_m + (-1)^{|m-\nu|}\theta_\nu}{2} + (1+\tau_\nu) B(\eta_m, \tau_\nu)\right], \quad \tau_m = \eta_m.$$

Система (1.21) является связанной (замыкается) двумя бесконечными системами ((3.3), (3.5) из [4]), в которых вместо A_{2k} подставлено соотношение (1.20). Упомянутые три системы полностью определяют решение задачи. Коэффициент интенсивности напряжений определяется соотношением

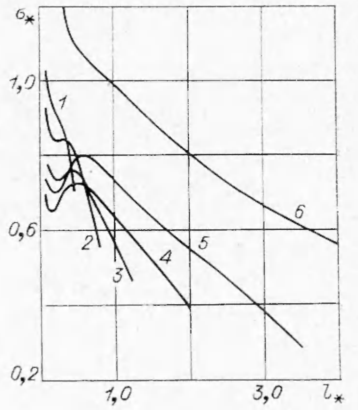
$$K_I = \frac{2}{n}\sqrt{\pi l (1-\lambda_1^2)}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu p_\nu^0 \operatorname{ctg}\frac{\theta_\nu}{2}.$$

Для числовых расчетов была взята правильная треугольная решетка $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2e^{(1/3)i\pi}$. Расчеты выполнены на ЭВМ М-222. В системе (1.21) полагалось $n = 10$, 20 и 30, что отвечает разбиению интервала на 10, 20, 30 чебышевских узлов соответственно. Каждая из бесконечных систем урезалась до пяти уравнений. При этом с помощью одной из них из остальных уравнений исключались неизвестные коэффициенты β_{2k+2}. Оказалось, что значения критической внешней нагрузки, а также коэффициенты α_{2k+2} и β_{2k+2} по существу не меняются (совпадают с точностью до шестого знака), начиная с $n = 20$.

На фиг. 2 представлены результаты расчетов критической (предельной) нагрузки $\sigma_* = \sigma_y^\infty \sqrt{\omega_1}/K_{Ic}$ в зависимости от длины трещины $l_* =$

$= (l - \lambda)/\lambda$ для некоторых значений радиуса отверстия $\lambda = 0{,}6;\ 0{,}5;\ 0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}1$ (кривые *1—6*).

Как видно, для правильной треугольной решетки при некоторых значениях радиуса кругового отверстия λ возможно устойчивое развитие системы трещин (их взаимное упрочнение). Для пластины с двоякопериодической системой трещин ($\lambda = 0$) с теми же основными периодами возможность стабилизации роста трещин отсутствует.



Фиг. 2

Аналогичным образом можно получить решение и для иных внешних загружений.

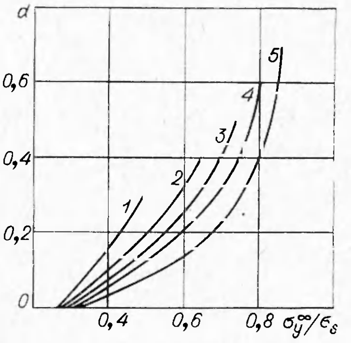
2. Пусть теперь материал перфорированной пластины является идеально упругопластическим, подчиняющимся условию Треска — Сен-Венана, согласно которому максимальное касательное напряжение в каждой точке тела не превышает предела текучести на сдвиг $\tau_s (2\tau_s = \sigma_s$, где σ_s — предел текучести на растяжение). Из упругого решения задачи о растяжении перфорированной пластины известно, что максимальные напряжения σ_y имеют место в точках $t = \pm\lambda + m\omega_1 + n\omega_2$ $(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. При некоторой нагрузке здесь будут возникать области пластических деформаций.

Рассмотрим задачу о начальном развитии пластических деформаций при одноосном растяжении тонкой перфорированной пластины усилиями σ_y^∞. Будем считать, что пластические деформации сосредоточены вдоль некоторых линий скольжения, исходящих из контура отверстия. Из опыта хорошо известна общая тенденция к формированию пластических областей на первых стадиях их развития в виде узких полос скольжения, занимающих незначительный объем тела по сравнению с его упругой частью [12, 13]. Особенно это характерно для материалов, обладающих четко выраженной площадкой текучести (для металлов типа мягкой стали, склонных к запаздыванию текучести и обычно лучше описывающихся условием Треска — Сен-Венана), а также при наличии напряженного состояния с достаточно большим градиентом напряжений. Согласно точным вычислениям, пластические области имеют тенденцию к локализации в линию скольжения [14, 15]. Так, например, согласно точному решению упругопластической задачи о двуосном растяжении пластины с круговым отверстием, найденному в работе [15], уже при отклонении напряженного состояния на бесконечности от всестороннего на 0,1 ($\Delta\sigma/\sigma \simeq 0{,}1$) пластическая зона из круговой превращается в вытянутую область с отношением ширины к длине примерно 1 : 4. Как показывают опыты, пластические области будут представлять в таких случаях отрезки длины d ($d = l - \lambda$) (см. фиг. 1). Толщину зоны можно считать равной нулю. Физически в тонких пластинах она может реализоваться в виде плоскости скольжения, направленной под углом 45° к плоскости пластины. Таким образом, благодаря локализации пластических деформаций рассматриваемая упругопластическая задача может быть сведена к граничной задаче плоской теории упругости, рассмотренной в п. 1 при замене правой части краевого условия (1.3) на σ_s. Величина l, характеризующая в этом случае длину полос пластичности, войдет в решение уравнения (1.13) как неизвестный параметр, подлежащий определению.

Так как напряжения в идеальном упругопластическом материале ограничены, то решение сингулярного интегрального уравнения (1.13) следует искать в классе всюду ограниченных функций (напряжений). Условие ограниченности напряжений в концах $\pm l$ служит для определения параметра l, зная который, можно найти длину пластических зон.

Это значит, что при решении уравнения (1.13) в классе (1.18) совместно с двумя бесконечными системами (см. в [4] системы (3.3), (3.5)) к системе (1.21) следует присоединить уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu}p_{\nu}^{0}\operatorname{ctg}\frac{\theta_{\nu}}{2}=0. \tag{2.1}$$



Фиг. 3

Уравнение (2.1) с отмеченными системами составляет замкнутую систему для определения всех неизвестных задачи. Однако решение этой замкнутой системы при заданной нагрузке σ_y^∞ затруднительно, вследствие нелинейности алгебраических уравнений относительно неизвестного параметра l. Поэтому проще считать заданным l, а находить нагрузку, действующую на пластину.

На фиг. 3 приведены графики зависимости длины полосы пластичности от безразмерного значения внешней нагрузки σ_y^∞/σ_s для некоторых значений радиуса отверстия $\lambda = 0{,}6$; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2 (кривые *1*—*5*).

Отметим, что при $|\omega_2| \to \infty$ имеем периодическую систему круговых отверстий со щелями, расположенных вдоль оси x; а при $|\omega_1| \to \infty$ и конечной ω_2 получаем пластину с периодической системой параллельных круговых отверстий со щелями.

Поступила 30 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Савин Г. Н., Панасюк В. В.** Развитие исследований по теории предельного равновесия хрупких тел с трещинами.— ПМ, 1968, т. 4, № 1.
2. **Партон В. З., Черепанов Г. П.** Механика разрушения.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. М., «Наука», 1972.
3. **Витвицкий П. М., Леонов М. Я.** Растяжение за пределом упругости пластинки с круговым отверстием.— ПМТФ, 1962, № 1.
4. **Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.** Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
5. **Дацышин А. П., Саврук М. П.** Интегральные уравнения плоской задачи теории трещин.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
6. **Фильштинский Л. А.** Взаимодействие двоякопериодической системы прямолинейных трещин в изотропной среде.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
7. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
8. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
9. **Иванов В. В.** Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев, «Наукова думка», 1968.
10. **Каландия А. И.** Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973.
11. **Каландия А. И.** О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений.— «Докл. АН СССР», 1959, т. 125, № 4.
12. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 1. М., ИЛ, 1954.
13. **Кошелев П. Ф., Ужик Г. В.** Исследование пластической деформации в местах концентрации напряжений методом травления.— «Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение», 1959, № 1.
14. **Southwell R., Allen G.** Relaxation methods applied to engineering problems.— «Phil. Trans. Roy. Soc. London», ser. A, 1950, vol. 242, p. 379.
15. **Черепанов Г. П.** Об одном методе решения упругопластической задачи.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.