

УДК 502/504 + 630\*53

## ВЕРИФИКАЦИЯ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАВИСИМОСТИ ВЫСОТЫ ОТ ДИАМЕТРА НА ВЫСОТЕ ГРУДИ ДЛЯ БЕРЕЗОВЫХ ДРЕВОСТОЕВ ЕВРОПЕЙСКОЙ ЧАСТИ РОССИИ

А. В. Лебедев, В. В. Кузьмичев

Российский государственный аграрный университет –  
Московская сельскохозяйственная академия им. К. А. Тимирязева  
127550, Москва, ул. Тимирязевская, 49

E-mail: avl1993@mail.ru

Поступила в редакцию 07.04.2020 г.

При проведении лесохозяйственных работ и научных исследований важное значение имеет точность определения высоты деревьев. Высота деревьев на конкретном участке обычно рассчитывается с использованием моделей, где она является функцией от диаметра на высоте груди. Среди простых моделей трехпараметрические – наиболее гибкие и позволяющие более детально передавать зависимость. Цель работы – по результатам измерения модельных деревьев в березовых древостоях из множества трехпараметрических моделей выбрать наиболее адекватную, которая передает зависимость высоты деревьев от их диаметра на высоте груди. По материалам 23 пробных площадей с измерением модельных деревьев, заложенных в березовых древостоях Лесной опытной дачи Тимирязевской сельскохозяйственной академии, проводилось определение параметров для 11 трехпараметрических моделей, отобранных из литературных источников. Параметры моделей вычислялись путем минимизации среднеквадратической ошибки. Качество моделей оценивалось по следующим метрикам: квадратный корень из среднеквадратической ошибки, коэффициент детерминации, информационный критерий Акаике, информационный критерий Байеса. Полученные результаты подтвердили целесообразность использования на практике уравнения Митчерлиха (известное также как Дракина–Вуевского, Чапмана–Ричардса), которое среди трехпараметрических моделей показывает лучшее качество. Результаты анализа данных показывают, что со статистической точки зрения полученные различия в качестве моделей не являются значимыми на 5 % уровне (*t*-тест). Уравнение Митчерлиха может быть использовано на практике при выполнении лесохозяйственных и научно-исследовательских работ в березовых древостоях, произрастающих в центральных регионах европейской части России. Методика проведенного исследования позволяет повторить аналогичную работу для древесных пород и лесорастительных условий, для которых информация о характере связи высоты с таксационным диаметром является неполной или отсутствует.

**Ключевые слова:** береза, трехпараметрическая модель, отбор моделей.

DOI: 10.15372/SJFS20200505

### ВВЕДЕНИЕ

Диаметр на высоте груди (diameter at breast height – *DBH*) и высота (height – *h*) дерева являются одними из наиболее важных таксационных показателей, применяемых в лесном хозяйстве. По сравнению с диаметром высота определяется намного сложнее, процесс измерения занимает больше времени, а полученные значения могут сильно отличаться от фактических (Colbert et al., 2002). Поэтому, как правило, измеряют высоту

не всех деревьев на участке. При проведении таксационных работ по результатам выборочных измерений высота обычно рассчитывается по парной зависимости от толщины деревьев или значения берутся из таблиц в соответствии с разрядом высот. Еще один способ определения высоты – расчетный, когда значения находятся по регрессионным уравнениям, выведенным для конкретных древесных пород и условий произрастания. При этом особую актуальность имеет вопрос о точности моделей, передающих

зависимость между высотой и диаметром деревьев, и в литературе он является дискуссионным (Lei et al., 2009; El Mamoun et al., 2013; Mehtätalo et al., 2015; Лебедев, Кузьмичев, 2020).

Модели «высота – диаметр» по обобщающей способности можно классифицировать следующим образом: 1) простые, которые выражают высоту как функцию только от диаметра на высоте груди, и 2) сложные (также известные как обобщенные), в которые помимо значений диаметров включаются такие показатели, как средняя высота и диаметр древостоя, сумма площадей сечений, возраст, число деревьев, класс бонитета и др. Преимуществом обобщенных моделей считается возможность их применения для прогнозирования значений высоты за пределами мест сбора экспериментального материала, в то время как простые модели выражают частную зависимость, которая не может быть распространена для предсказания значений высоты деревьев на других участках.

Множество простых моделей по сложности можно классифицировать на двух-, трехпараметрические и с большим количеством параметров. Трехпараметрические модели по сравнению с двухпараметрическими более гибкие и позволяют детальнее передавать зависимость. Но, например, в работе (Mehtätalo et al., 2015) по результатам подгонки 16 нелинейных функций по 28 наборам данных для разных древесных пород и регионов показано, что двухпараметрические модели в большинстве случаев предпочтительнее в использовании. В качестве проблемы применения трехпараметрических моделей можно отметить недостижение сходимости решения при подборе коэффициентов (Mehtätalo et al., 2015; Ogana, 2018). Эта проблема решается путем установки фиксированного значения одного из параметров, что сказывается на точности получаемой зависимости.

Выделяются два вида сложных моделей (Sharma et al., 2016). В первом подходе наряду с диаметром деревьев в качестве дополнительных переменных выступают таксационные показатели древостоя. Такие модели получили название обобщенные простые, или модели фиксированных эффектов. Зачастую значения их параметров могут быть оценены методом наименьших квадратов. Во втором подходе (модели смешанных эффектов) сначала прогнозируется предварительно заданная кривая «высота – диаметр», а после выполняется предсказание случайного эффекта, которое калибрует первоначальную кривую и обеспечивает подгонку за-

висимости к исходным данным (Mehtätalo et al., 2015). Преимуществами моделей смешанных эффектов можно считать, что они позволяют работать с минимальным размером выборок и обеспечивают большую точность.

Еще одним вариантом классификации моделей «высота – диаметр» можно считать их разделение на линейные и нелинейные. Традиционно предпочтительными считаются линейные модели, так как имеется устоявшаяся и общепринятая методика их оценки. Результаты тестирования 46 простых и сложных моделей «высота – диаметр» для молодняков культур ели черной *Picea mariana* (Mill.) Britton, Sterns & Poggenb. и сосны Банкса *Pinus banksiana* Lamb. в Канаде показали лучшее качество линейных моделей над нелинейными (Lei et al., 2009). Использование нелинейных моделей в настоящее время редко бывает проблематичным (Mehtätalo et al., 2015). Кроме того, в публикациях (Arabazis, Burkhart, 1992; Huang et al., 1992), в которых проводится сравнение различных функций, отмечается преимущество нелинейных моделей над линейными.

Основой для разработки обобщенных моделей являются простые функции, отражающие парную связь между высотой и диаметром на локальном уровне. На этапе спецификации сложных моделей важно закладывать в их основу простые зависимости, которые по комплексу критериев можно считать лучшими.

Цель работы – по материалам измерения модельных деревьев в березовых древостоях из множества трехпараметрических моделей выбрать наиболее адекватную, которая передает зависимость высоты деревьев от их диаметра на высоте груди.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Данными для исследования послужили материалы измерения модельных деревьев березы на 23 пробных площадях (ПП) в Лесной опытной даче Московского сельскохозяйственного института (ныне Российский государственный аграрный университет – Московская сельскохозяйственная академия им. К. А. Тимирязева) в период с 1905 по 1917 г. Возраст древостоев, в которых проводился обмер модельных деревьев, составлял от 20 до 85 лет, средний диаметр – от 3 до 30 см, средняя высота – от 6 до 27 м. На опытных участках измеряли от 35 до 153 деревьев, всего учтено 2201 дерево с диаметром от 0.5 до 42.1 см и высотой от 2.0 до 28.7 м.

**Таблица 1.** Характеристика экспериментальных данных

№	Диаметр				Высота				n	R
	mean	std	min	max	mean	std	min	max		
1	27.1	7.0	11.5	42.1	24.7	3.1	14.5	28.7	65	0.720
2	10.5	3.5	3.4	21.3	13.3	2.2	5.6	16.9	142	0.829
3	11.2	4.2	2.7	19.9	13.8	2.9	5.8	17.5	149	0.879
4	13.3	4.0	3.7	23.0	15.1	2.2	5.4	18.3	149	0.817
5	12.2	4.7	3.4	22.7	14.4	3.0	5.5	19.3	141	0.875
6	11.7	4.6	2.2	24.0	14.4	3.1	3.9	19.2	133	0.888
7	13.1	4.6	3.0	24.3	15.6	3.1	5.3	20.7	136	0.888
8	13.0	4.8	3.2	24.4	15.0	3.3	3.7	19.6	153	0.864
9	14.3	4.8	4.4	25.3	16.3	3.1	7.0	21.7	130	0.861
10	15.4	4.3	6.8	25.8	18.0	2.2	11.2	22.0	100	0.806
11	29.2	5.8	17.1	42.8	26.1	1.9	18.6	28.5	56	0.749
12	12.6	4.5	3.9	22.0	13.9	2.6	6.7	19.0	67	0.892
13	12.2	2.6	7.7	18.3	11.4	1.2	8.5	14.2	50	0.784
14	14.5	3.9	4.7	23.1	14.9	1.9	8.9	18.2	57	0.873
15	14.9	4.0	5.3	23.7	15.2	2.3	7.4	18.0	52	0.820
16	15.2	5.0	2.6	22.4	15.3	3.1	5.0	18.5	52	0.905
17	21.4	5.0	12.7	39.0	23.0	1.9	16.8	25.7	37	0.720
18	7.0	2.1	3.5	14.0	11.4	1.7	6.2	14.7	98	0.903
19	4.7	1.6	1.4	7.4	7.4	1.3	3.8	9.7	35	0.908
20	10.0	3.0	5.0	17.1	13.1	1.9	8.2	16.2	99	0.870
21	2.7	1.3	0.5	6.8	5.2	1.3	2.0	8.3	100	0.907
22	7.4	2.7	3.1	14.3	10.4	1.8	5.4	13.2	100	0.876
23	4.1	1.2	1.4	7.4	7.1	1.0	4.2	9.7	100	0.874

Измерение диаметра на высоте груди проводили у растущих деревьев от шейки корня. В молодняках измерение высоты выполнялось мерной лентой от шейки корня с использованием лестницы. В средневозрастных и приспевающих древостоях (лесные культуры) проводили вырубку каждого второго ряда, а в спелых – сплошную. Как было принято в лесотаксационных исследованиях начала XX в. (например, А. А. Крюденер, 1911), при проведении рубки длину ствола определяли без учета пня.

Статистическая характеристика выборок (mean – средняя арифметическая; std – среднеквадратическое отклонение; min – минимальное значение; max – максимальное значение; n – количество наблюдений; R – коэффициент корреляции) приведена в табл. 1.

Во всех случаях теснота связи по коэффициенту корреляции Пирсона (R) между диаметром и высотой характеризуется как высокая.

Методика анализа данных предполагала на первом этапе построение парных визуализаций зависимости высоты от диаметра и проверку выборок на наличие выбросов. В дальнейшем для каждой из ПП проводили определение па-

раметров для 11 трехпараметрических моделей, наиболее часто встречающихся в литературных источниках, общий вид которых приведен в табл. 2.

Параметры моделей вычисляли путем минимизации среднеквадратической ошибки. Используемый метод оптимизации функции ошибки – дифференциальная эволюция (Storn, Price, 1997). Данный метод позволяет находить глобальный минимум недифференцируемых, нелинейных, мультимодальных функций и прост в реализации. Для каждого полученного уравнения рассчитывали следующие метрики, позволяющие судить о качестве модели:

– квадратный корень из среднеквадратической ошибки (RMSE)

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}, \quad (1)$$

– коэффициент детерминации (R<sup>2</sup>)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y}_i)^2}, \quad (2)$$

**Таблица 2.** Трехпараметрические модели зависимости высоты деревьев от таксационного диаметра

№	Модель	Источник
1	$h = 1.3 + \frac{b_1}{1 + b_2 DBH^{-b_3}}$	Huang et al., 2000
2	$h = 1.3 + \frac{DBH^2}{b_1 + b_2 DBH + b_3 DBH^2}$	Huang et al., 1992
3	$h = 1.3 + b_1(1 - \exp(-b_2 DBH^{b_3}))$	Yang et al., 1978
4	$h = 1.3 + b_1(1 - \exp(-b_2 DBH))^{b_3}$	Peng et al., 2001
5	$h = 1.3 + b_1 \exp(-b_2 \exp(-b_3 DBH))$	Huang et al., 1992
6	$h = 1.3 + \exp(b_1 + b_2 DBH^{b_3})$	Larsen, Hann, 1987
7	$h = 1.3 + \exp\left(b_1 + \frac{b^2}{DBH + b_3}\right)$	Ratkowsky, Giles, 1990
8	$h = 1.3 + b_1 \exp(-b_2 DBH^{-b_3})$	Stage, 1963
9	$h = 1.3 + b_1 DBH^{b_2 + b_3 DBH}$	Sharma, 2009
10	$h = \left(1.3^{b_1} + (b_2^{b_1} - 1.3^{b_1}) \frac{1 - \exp(-b_3 DBH)}{1 - \exp(-100b_3)}\right)^{\frac{1}{b_1}}$	Schnute, 1981
11	$h = 1.3 + b_1 \sqrt{DBH} + b_2 DBH + b_3 DBH^2$	Агрощенко, 2004

– информационный критерий Акаике (*AIC*)

$$AIC = 2k + n \ln \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}, \quad (3)$$

– информационный критерий Байеса (*BIC*)

$$BIC = k \ln n + n \ln \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}, \quad (4)$$

где *k* – количество параметров модели (в нашем случае *k* = 3), *n* – количество наблюдений, *y<sub>i</sub>* – фактическое значение, *ŷ<sub>i</sub>* – предсказанное по модели значение.

Модель, для которой на большинстве выборок (ПП) получены наибольшие значения коэффициента детерминации и наименьшие – информационных критериев и среднеквадратической ошибки, признавалась лучшей. Обработку экспериментальных материалов проводили с использованием Python 3.5 + NumPy 1.17.1 + SciPy 1.3.2.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

К функциям, передающим зависимость между высотой и диаметром, предъявляются определенные требования: 1) свободный член уравнения должен иметь значение 1.3, 2) кривая должна быть возрастающей и иметь горизонтальную асимптоту (Подмаско, 1973). Для всех рассматриваемых в работе моделей первое требование выполняется. С учетом найденных коэффициентов модели № 2, 7, 9, 11 не удовлетворяют второму требованию, поэтому из дальнейшего рассмотрения исключаются.

В табл. 3 представлены итоговые усредненные оценки (через количество ПП) качества моделей по всем выборкам.

По комплексу метрик (*RMSE*, *R<sup>2</sup>*, *AIC*, *BIC*) худший результат показала модель № 6 (средние значения *RMSE* = 1.043; *R<sup>2</sup>* = 0.774; *AIC* = 10.0; *BIC* = 195.4). Оставшиеся модели № 1, 3, 4, 5, 8, 10 показали примерно одинаковые оценки качества. Принимая во внимание значения мет-

**Таблица 3.** Итоговые оценки качества моделей

Модель №	RMSE			R <sup>2</sup>			AIC			BIC		
	min	mean	max	min	mean	max	min	mean	max	min	mean	max
1	0.377	0.895	1.560	0.607	0.827	0.925	-189.0	-21.1	81.6	5.0	164.3	375.0
2	0.375	0.894	1.537	0.607	0.827	0.924	-190.0	-21.2	81.5	4.0	164.2	375.1
3	0.387	0.894	1.516	0.609	0.827	0.925	-184.1	-21.0	81.9	9.9	164.4	375.2
4	0.384	0.895	1.536	0.609	0.827	0.925	-185.6	-21.1	81.8	8.4	164.3	374.8
5	0.395	0.900	1.529	0.609	0.825	0.925	-179.9	-20.3	82.9	14.1	165.1	376.4
6	0.464	1.043	1.922	0.587	0.774	0.885	-147.7	10.0	122.1	20.9	195.4	422.1
7	0.375	0.900	1.606	0.607	0.826	0.924	-190.1	-20.0	81.5	3.9	165.4	376.0
8	0.375	0.899	1.579	0.607	0.826	0.923	-190.0	-20.3	81.5	4.0	165.1	375.7
9	0.404	0.902	1.481	0.611	0.824	0.925	-175.1	-18.8	82.8	16.6	166.6	377.5
10	0.387	0.895	1.533	0.609	0.827	0.925	-183.7	-21.0	81.9	10.3	164.4	375.3
11	0.417	0.910	1.485	0.612	0.821	0.924	-169.0	-16.5	84.1	17.2	168.3	380.8

рик качества и интерпретируемость параметров уравнения, лучшей условно можно считать модель № 4 (средние значения  $RMSE = 0.895$ ;  $R^2 = 0.827$ ;  $AIC = -21.1$ ;  $BIC = 164.3$ ), которая известна в литературе как уравнение Митчерлиха, Дракина–Вуевского или Чапмана–Ричардса и часто используется в лесотаксационных исследованиях. Коэффициенты уравнения имеют четкую интерпретацию:  $b_1$  – параметр предельного значения высоты,  $b_2$  – параметр крутизны кривой,  $b_3$  – параметр формы кривой.

Со статистической точки зрения полученные различия в качестве моделей не являются значимыми на 5 % уровне. Сравнение средних с применением двухвыборочного  $t$ -теста для различных дисперсий при проверке двухсторонней альтернативы для модели № 4 с лучшим решением и модели № 6 с худшим решением показало, что для  $RMSE$   $t = 1.56$  ( $p$ -значение = 0.12), для  $R^2$   $t = -2.01$  ( $p$ -значение = 0.05), для  $AIC$   $t = 1.56$  ( $p$ -значение = 0.13) и для  $BIC$   $t = 0.92$  ( $p$ -значение = 0.36). Между всеми остальными сравниваемыми парами моделей различия также оказались статистически незначимыми. Таким образом, выбор лучшей модели в некоторой степени можно считать субъективным. Данные табл. 4, в которой приводятся выровненные по уравнениям значения высоты для молодняков, средневозрастных, приспевающих и спелых древостоев, подтверждают этот вывод.

Во всех группах возраста полученные значения коэффициента вариации ( $CV$ ) указывают на незначительную изменчивость значений высоты, полученных по моделям. Для каждой груп-

пы возраста характерна максимальная изменчивость значений высоты только для деревьев с минимальным диаметром на высоте груди. Для молодняков при  $DBH = 0.5$  см  $CV = 11.6$  %, для средневозрастных при  $DBH = 2.7$  см  $CV = 18.3$  %, для приспевающих при  $DBH = 12.7$  см  $CV = 4.4$  % и для спелых при  $DBH = 17.1$  см  $CV = 1.2$  %. Для всех остальных диаметров, приведенных в табл. 4, коэффициент вариации не превышает значения 5 %. Стоит отметить, что для деревьев с диаметром, близким к среднему, наблюдаются минимальные различия в значениях высоты между моделями, так как большее количество наблюдений в выборках приходится на них. К достижению возраста спелости различия между моделями становятся незначительными, коэффициент вариации находится в диапазоне от 0.1 до 1.2 %.

В табл. 5 приведены значения параметров и метрик качества модели № 4, которая показывает одно из лучших решений.

Значения  $RMSE$  изменяются от 0.384 до 1.536,  $R^2$  – от 0.661 до 0.925,  $AIC$  – от -185.6 до 81.8 и  $BIC$  – от 8.4 до 374.8. Для параметров модели характерна высокая изменчивость в зависимости от возраста древостоев.

Наименьшие значения параметра  $b_1$  получены для молодняков (ПП 21,  $b_1 = 6.103$ ), а наибольшие – для спелых (ПП 1,  $b_1 = 26.056$ ). Со старением древостоев (увеличением средних диаметра и высоты) происходит уменьшение параметра  $b_2$  и увеличение параметра  $b_3$ : для ПП 21  $b_2 = 0.580$  и  $b_3 = 1.423$ , а для ПП 1  $b_2 = 0.139$  и  $b_3 = 3.101$ .

**Таблица 4.** Рассчитанные по моделям значения высоты для различных групп возраста

Диаметр, см	Значения высоты, рассчитанные по номеру моделей, м											CV, %
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
<i>Молодняки (ПП 21)</i>												
0.5	2.1	2.0	2.2	2.2	2.3	2.8	2.0	1.9	2.4	2.3	2.5	11.6
1.2	3.6	3.6	3.6	3.6	3.5	3.8	3.6	3.6	3.6	3.6	3.7	2.3
1.9	4.8	4.8	4.7	4.7	4.7	4.6	4.8	4.8	4.7	4.7	4.7	1.0
2.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.6	5.3	5.6	5.6	5.5	5.6	5.5	1.4
3.3	6.1	6.1	6.2	6.2	6.2	5.9	6.1	6.1	6.1	6.2	6.1	1.1
4.0	6.5	6.5	6.6	6.6	6.6	6.5	6.5	6.5	6.6	6.6	6.6	0.6
4.7	6.8	6.8	6.9	6.8	6.8	7.0	6.8	6.9	6.9	6.8	7.0	1.0
5.4	7.1	7.1	7.0	7.0	6.9	7.5	7.1	7.1	7.1	7.0	7.2	2.1
6.1	7.2	7.3	7.2	7.2	7.0	8.0	7.3	7.3	7.2	7.2	7.2	3.4
6.8	7.4	7.4	7.2	7.2	7.0	8.4	7.5	7.5	7.2	7.2	7.2	5.0
<i>Средневозрастные (ПП 3)</i>												
2.7	4.6	4.5	4.9	4.8	5.1	7.6	4.4	4.2	5.5	4.9	5.7	18.3
4.6	8.3	8.2	8.3	8.3	8.3	9.5	8.6	8.5	8.4	8.2	8.5	4.3
6.5	11.2	11.2	11.1	11.1	11.0	11.1	11.2	11.3	10.9	11.1	10.9	1.1
8.4	13.1	13.2	13.1	13.1	13.1	12.4	13.0	13.1	12.9	13.1	12.8	1.7
10.3	14.4	14.4	14.5	14.4	14.5	13.6	14.2	14.3	14.4	14.5	14.3	1.8
12.3	15.2	15.3	15.4	15.3	15.3	14.7	15.1	15.1	15.4	15.3	15.4	1.3
14.2	15.8	15.8	15.9	15.8	15.8	15.7	15.8	15.8	16.0	15.8	16.1	0.6
16.1	16.2	16.2	16.1	16.2	16.1	16.7	16.3	16.3	16.2	16.1	16.3	1.0
18.0	16.5	16.4	16.3	16.4	16.3	17.6	16.8	16.7	16.1	16.3	16.0	2.5
19.9	16.7	16.6	16.3	16.5	16.4	18.4	17.1	17.0	15.7	16.4	15.4	4.7
<i>Приспевающие (ПП 17)</i>												
12.7	17.7	18.0	18.1	17.9	19.2	20.0	17.3	17.6	18.6	18.0	18.8	4.4
15.6	20.8	20.7	20.7	20.7	20.9	21.2	20.9	20.8	20.7	20.7	20.7	0.7
18.5	22.5	22.5	22.5	22.5	22.2	22.2	22.6	22.5	22.3	22.5	22.3	0.6
21.5	23.5	23.6	23.6	23.6	23.3	23.1	23.5	23.5	23.5	23.6	23.5	0.6
24.4	24.2	24.2	24.2	24.2	24.2	24.0	24.1	24.2	24.3	24.2	24.3	0.4
27.3	24.6	24.6	24.6	24.6	24.8	24.7	24.5	24.6	24.9	24.6	25.0	0.6
30.2	24.8	24.8	24.8	24.8	25.3	25.4	24.8	24.8	25.1	24.8	25.3	1.0
33.2	25.0	25.0	24.9	24.9	25.7	26.1	25.1	25.0	25.1	24.9	25.3	1.5
36.1	25.1	25.0	25.0	25.0	26.0	26.7	25.3	25.2	25.0	25.0	25.1	2.2
39.0	25.2	25.1	25.0	25.1	26.2	27.3	25.4	25.3	24.6	25.1	24.6	3.1
<i>Спелые (ПП 11)</i>												
17.1	21.8	21.8	21.8	21.8	21.9	22.7	21.8	21.8	21.9	21.8	21.9	1.2
20.0	23.4	23.4	23.3	23.3	23.3	23.7	23.4	23.4	23.3	23.3	23.3	0.4
22.8	24.6	24.6	24.6	24.6	24.5	24.5	24.6	24.6	24.5	24.6	24.5	0.1
25.7	25.5	25.5	25.5	25.5	25.5	25.3	25.5	25.5	25.5	25.5	25.5	0.2
28.5	26.3	26.3	26.3	26.3	26.3	26.1	26.3	26.3	26.3	26.3	26.3	0.3
31.4	26.9	26.9	26.9	26.9	26.9	26.7	26.9	26.9	26.9	26.9	26.9	0.2
34.2	27.4	27.4	27.4	27.4	27.4	27.4	27.4	27.4	27.4	27.4	27.4	0.1
37.1	27.8	27.8	27.7	27.8	27.8	28.0	27.8	27.8	27.7	27.8	27.7	0.3
39.9	28.1	28.1	28.0	28.1	28.0	28.6	28.1	28.1	28.0	28.1	27.9	0.6
42.8	28.4	28.4	28.3	28.3	28.3	29.1	28.5	28.4	28.1	28.3	27.9	1.0

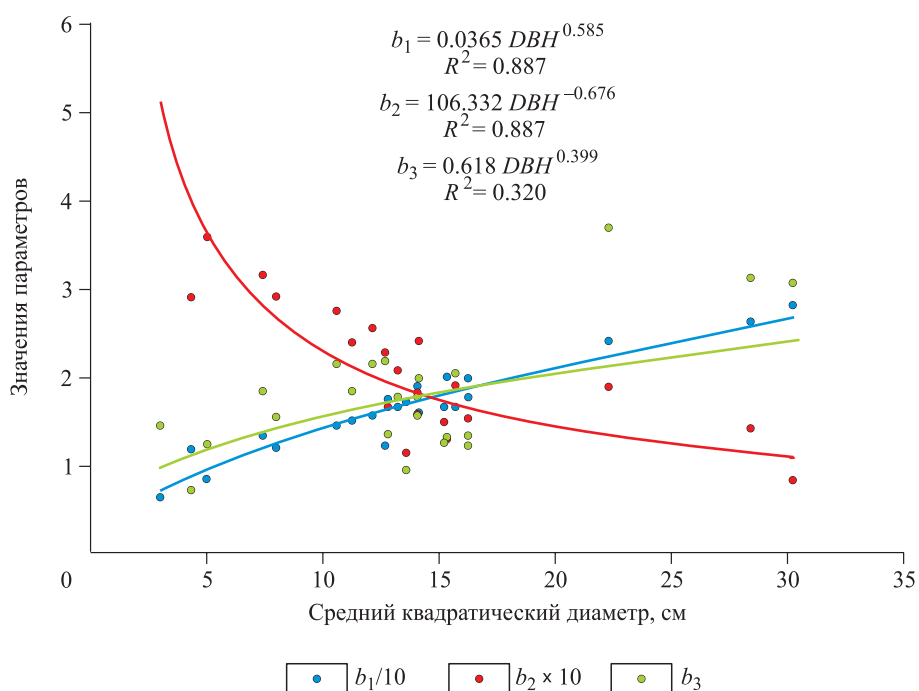
На рисунке показана зависимость, выраженная степенной функцией, параметров модели № 4 от таксационного диаметра древостоя, который часто включается в структуру обобщенных моделей (Sloboda et al., 1993).

Наиболее тесную связь со средним диаметром имеют параметры  $b_1$  ( $R^2 = 0.887$ ) и  $b_2$  ( $R^2 = 0.733$ ).

Слабо связанным со среднеквадратическим диаметром является коэффициент  $b_3$  ( $R^2 = 0.320$ ).

Таблица 5. Значения параметров и метрик качества модели № 4

№ ПП	Параметр			Метрика качества			
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$RMSE$	$R^2$	$AIC$	$BIC$
1	26.056	0.139	3.101	1.536	0.744	61.8	185.8
2	14.838	0.237	1.815	0.917	0.820	-18.6	259.4
3	15.421	0.254	2.127	0.868	0.911	-36.2	255.8
4	15.668	0.238	1.960	0.838	0.857	-46.6	245.4
5	16.355	0.205	1.754	0.909	0.909	-21.0	255.0
6	17.261	0.164	1.328	1.075	0.879	25.3	285.3
7	18.722	0.156	1.545	1.086	0.879	28.5	294.5
8	17.491	0.180	1.747	1.252	0.852	74.8	374.8
9	19.782	0.127	1.298	1.339	0.815	81.8	335.8
10	19.615	0.151	1.309	1.141	0.721	32.4	226.4
11	27,910	0.082	1.082	1.179	0.609	24.5	130.5
12	16.975	0.111	0.919	0.967	0.858	1.6	129.6
13	11.942	0.225	2.163	0.700	0.661	-29.7	64.3
14	16.389	0.147	1.232	0.711	0.858	-32.9	75.1
15	16.396	0.189	2.023	0.970	0.813	2.9	100.9
16	17.544	0.131	1.198	0.842	0.925	-11.9	86.1
17	23.824	0.187	3.671	1.000	0.710	6,0	74.0
18	13.119	0.312	1.822	0.558	0.896	-108.4	81.6
19	8.234	0.356	1.212	0.460	0.877	-48.3	15.7
20	14.231	0.273	2.122	0.762	0.840	-47.9	144.1
21	6.103	0.580	1.423	0.384	0.917	-185.6	8.4
22	11.731	0.289	1.527	0.607	0.887	-93.8	100.2
23	11.571	0.115	0.695	0.473	0.781	-143.9	50.1



Зависимость параметров модели № 4 от таксационного диаметра древостоев.

Наличие выраженных закономерностей позволяет использовать функцию Митчерлиха в моделях обобщенного вида.

Выбор конкретной модели из всего их многообразия является сложной задачей, так как метрики качества для большинства из них схожи.

Как во многих исследованиях, например, для культур тикового дерева *Tectona grandis* L. f. в заповеднике Нимбия, Нигерия (Shamaki et al., 2016), лиственницы даурской *Larix gmelinii* (Rupr.) Kuzen. в Северо-Восточном Китае (Jiang, Li, 2010), пихты бальзамической *Abies balsamea* (L.) Mill., тополя бальзамического *Populus balsamifera* L., ели черной, сосны Банка, сосны смолистой *Pinus resinosa* Sol. ex Aiton, осины *Populus tremula* L., березы бумажной *Betula papyrifera* Marshall, ели сизой *Picea glauca* (Moench) Voss в Северном Онтарио, Канада (Sharma, Parton, 2007), так и в нашей функции Митчерлиха (модель № 4) среди многообразия трехпараметрических моделей рекомендуется в качестве лучшей для соотношения «высота – диаметр».

Полученные результаты нельзя распространять на другие древесные породы и регионы, потому что биологические особенности видов и условия произрастания могут оказывать существенное влияние на форму кривой связи между высотой и диаметром. На примере древостоев естественного происхождения акации красной *Acacia oxycedrus* Sieber ex DC., стеркулии щетинконосной *Sterculia setigera* Delile, баланитеса египетского *Balanites aegyptiaca* (L.) Delile, березы африканской *Anogeissus leocarpus* (DC.) Guill. & Perr., комбретума *Combretum hartmannianum* Schweinf., терминалии *Terminalia brownii* Fresen. в заповеднике штата Голубой Нил, Судан (El Mamoun et al., 2013) показано, что выбор той или иной модели зависит от древесной породы. Исследования (Özçelik et al., 2014), выполненные для древостоев сосны турецкой *Pinus brutia* Ten., сосны черной *Pinus nigra* J. F. Arnold и кедра ливанского *Cedrus libani* A. Rich. в южной части Турции, показали, что модели «высота – диаметр» значительно различались для разных экологических регионов. Авторы пришли к выводу, что для повышения точности прогнозирования такие модели должны разрабатываться по отдельным экорегионам.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Функция Митчерлиха (Дракина–Вуевского, Чапмана–Ричардса), обоснованная в качестве лучшей трехпараметрической модели зависимо-

сти высоты от диаметра на высоте груди, может быть применена на практике при выполнении лесохозяйственных и научно-исследовательских работ в березовых древостоях, произрастающих в центральных регионах европейской части России, а при разработке обобщенных моделей «высота – диаметр» эта функция может использоваться в качестве базовой. Методика выполненного исследования позволяет повторить аналогичную работу для древесных пород и лесорастительных условий, информация для которых о характере связи высоты с таксационным диаметром является неполной или отсутствует.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

- Атрощенко О. А. Моделирование роста леса и лесохозяйственных процессов. Минск: БГТУ, 2004. 249 с. [Atroshchenko O. A. Modelirovanie rosta lesa i lesokhozyaystvennykh protsessov (Modeling forest growth and forestry processes). Minsk: BGTU (Belarus. St. Technol. Univ.), 2004. 249 p. (in Russian)].
- Крыденер А. А. Массовые таблицы и таблицы сбег осины Европейской России. Вып. 4. Ч. 2. СПб.: Изд. Гл. упр. уделов, 1911. 86 с. [Kryudener A. A. Massovye tablitsy i tablitsy sbega osiny Evropeyskoy Rossii (Mass tables and aspen stem form tables of the European Russia). Iss. 4. Pt. 2. St. Petersburg: Izd. gl. upr. udelov (Main Directorate of the Land Destiny Publ.), 1911. 86 p. (in Russian)].
- Лебедев А. В., Кузьмичев В. В. Проверка двухпараметрических моделей зависимости высоты от диаметра на высоте груди в березовых древостоях // Изв. СПб. лесотех. акад. 2020. Вып. 230. С. 100–113 [Lebedev A. V., Kuzmichev V. V. Proverka dvukhparametricheskikh modeley zavisimosti vysoty ot diametra na vysote grudi v berezovykh drevostoyakh (Verification of bi-parameter models of dependence of height of diameter on breast height in birch stands) // Izv. SPb. lesotekh. akad. (Proc. St. Petersburg For. Acad.). 2020. Iss. 230. P. 100–113 (in Russian with English abstract)].
- Подмаско Б. И. Инвентаризация лиственничных лесов Севера Дальнего Востока СССР методом камерального дешифрирования аэроснимков: автореф. дис. ... канд. с.-х. наук. М., 1973. 24 с. [Podmasko B. I. Inventarizatsiya listvennichnykh lesov Severa Dalnego Vostoka SSSR metodom kameralnogo deshifirovaniya aerosnimkov: avtoref. dis. ... kand. s.-kh. nauk (Inventory of larch forests of the North of the Far East of the USSR by the method of desk interpretation of aerial photographs: cand. (PhD) agr. sci. thesis). Moscow, 1973. 24 p. (in Russian)].
- Arabazis A. A., Burkhart H. E. An evaluation of sampling methods and model forms for estimating height-diameter relationships in loblolly pine plantations // For. Sci. 1992. V. 38. Iss. 1. P. 192–198.
- Colbert K. C., Larsen D. R., Lootens J. R. Height-diameter equations for thirteen midwestern bottomland hardwood species // Norw. J. Appl. For. 2002. V. 19. Iss. 4. P. 171–176.



- El Mamoun H. O., El Zein A. I., El Mugira M. I.* Modelling height-diameter relationships of selected economically important natural forests species // *J. For. Product. Industr.* 2013. N. 2 (1). P. 34–42.
- Jiang L.-C., Li Y.* Application of nonlinear mixed-effects modeling approach in tree height prediction // *J. Comput.* 2010. V. 5. N. 10. P. 1575–1581.
- Huang S., Price D., Titus S. J.* Development of ecoregion-based height-diameter models for white spruce in boreal forests // *For. Ecol. Manag.* 2000. V. 129. N. 1. P. 125–141.
- Huang S., Titus S. J., Wiens D. P.* Comparison of nonlinear height-diameter functions for major Alberta tree species // *Can. J. For. Res.* 1992. N. 22. P. 1297–1304.
- Larsen D. R., Hann D. W.* Height-diameter equations for seventeen tree species in Southwest Oregon // *For. Res. Lab., Oregon St. Univ., Corvallis, USA*, 1987. 17 p.
- Lei X., Peng C., Wang H., Zhou X.* Individual height-diameter models for young black spruce (*Picea mariana*) and jack pine (*Pinus banksiana*) plantations in New Brunswick, Canada // *The For. Chron.* 2009. V. 85. N. 1. P. 43–56.
- Mehtätalo L., de-Miguel S., Gregoire T. G.* Modeling height-diameter curves for prediction // *Can. J. For. Res.* 2015. V. 45. P. 826–837.
- Ogana F. N.* Comparison of a modified log-logistic distribution with established models for tree height prediction // *J. Res. For., Wildlife & Environ.* 2018. V. 10. N. 2. P. 49–55.
- Özçelik R., Yavuz H., Karatepe Y., Gürlevik N., Kiriş R.* Development of ecoregion-based height-diameter models for 3 economically important tree species of southern Turkey // *Turk. J. Agr. For.* 2014. V. 38. N. 3. P. 399–412.
- Peng C., Zhang L., Liu J.* Developing and validating nonlinear height-diameter models for major tree species of Ontario's boreal forests // *North. J. Appl. For.* 2001. V. 18. N. 3. P. 87–94.
- Ratkowsky D. A., Giles D. E. A.* Handbook of nonlinear regression. N.Y.: Marcel Dekker Inc., 1990. 241 p.
- Schnute J.* A versatile growth model with statistically stable parameters // *Can. J. For. Res.* 1981. V. 38. N. 9. P. 1128–1140.
- Shamaki S. B., Akindele S. O., Isah A. D., Mohammed I.* Height-diameter relationship models for teak (*Tectona grandis*) plantation in Nimbia forest reserve, Nigeria // *Asian J. Environ. Ecol.* 2016. V. 1. N. 1. P. 1–7.
- Sharma M., Parton J.* Height-diameter equations for boreal tree species in Ontario using a mixed-effects modeling approach // *For. Ecol. Manag.* 2007. V. 249. P. 187–198.
- Sharma R. P.* Modelling height-diameter relationship for Chir pine trees // *Banko Janakari.* 2009. V. 19. N. 2. P. 3–9.
- Sharma R. P., Vacek Z., Vacek S.* Nonlinear mixed effect height-diameter model for mixed species forests in the central part of the Czech Republic // *J. For. Sci.* 2016. V. 62. N. 10. P. 470–484.
- Sloboda V. B., Gaffrey D., Matsumura N.* Regionale und lokale Systeme von Höhenkurven für gleichaltrige Waldbestände // *Allg. Forst. Jagdztg.* 1993. V. 164. P. 225–228.
- Stage A. R.* A mathematical approach to polymorphic site index curves for grand fir // *For. Sci.* 1963. V. 9. N. 2. P. 167–180.
- Storn R., Price K.* Differential evolution – a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces // *J. Global Optimizat.* 1997. V. 11. N. 4. P. 341–359.
- Yang R. C., Kozak A., Smith J. H.* The potential of Weibull-type functions as flexible growth curves // *Can. J. For. Res.* 1978. V. 8. N. 4. P. 424–431.

## **VERIFICATION OF THREE-PARAMETER MODELS OF DEPENDENCE OF HEIGHT ON THE DIAMETER AT BREAST HEIGHT FOR BIRCH STANDS OF THE EUROPEAN PART OF RUSSIA**

**A. V. Lebedev, V. V. Kuzmichev**

*Russian State Agrarian University – Timiryazev Moscow Agricultural Academy  
Timiryazevskaya str., 49, Moscow, 127550 Russian Federation*

---

E-mail: avl1993@mail.ru

Of great importance when conducting forestry operations and scientific research is the accuracy of determining the height of trees. The height of trees in a particular area is usually calculated using models, where it is a function of diameter at breast height. Among simple models, three-parameter models are the most flexible and allow for more detailed transmission of the dependence. The purpose of the work is to select the most adequate one from the set of three-parameter models based on the materials used to measure model trees in birch stands, which conveys the relationship between the height of trees and diameter at breast height. On the materials of 23 sample plots with the measurement of model trees laid in birch stands of the Forest Experimental District of the Timiryazev Agricultural Academy, parameters were determined for 11 three-parameter models selected from literary sources. Model parameters were calculated by minimizing the standard error. The quality of the models was evaluated by the following metrics: the square root of the standard error, the coefficient of determination, the Akaike information criterion, the Bayes information criterion. The obtained results confirmed the advisability of using in practice the Mitcherlich equation (also known as Drakin–Vuyevsky, Chapman–Richards), which among the three-parameter models shows the best quality. The results of data analysis show that, from a statistical point of view, the differences obtained in the quality of models are not significant at the 5 % level (*t*-test). Mitcherlich's equation can be used in practice when carrying out forestry and research work in birch stands growing in the central regions of the European part of Russia. The methodology of the study allows you to repeat the same work for tree species and forest conditions, for which information about the nature of the relationship of height with the diameter at breast height is incomplete or absent.

**Keywords:** *birch, three-parameter model, selection of models.*

**How to cite:** *Lebedev A. V., Kuzmichev V. V. Verification of three-parameter models of dependence of height on the diameter at breast height for birch stands of the European part of Russia // Sibirskij Lesnoj Zhurnal (Sib. J. For. Sci.). 2020. N. 5. P. 45–54 (in Russian with English abstract and references).*