

УДК 533; 517.92517.944

ОБ ИСТОЧНИКЕ ГАЗА В ПОЛЕ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ

Д. В. Паршин, А. П. Чупахин*

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: danilo-skiman@gorodok.net

Исследуется небарохронная регулярная частично инвариантная подмодель уравнений газовой динамики. Подмодель сводится к неявному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для вспомогательной функции $X = X(x)$. Физические величины (скорость, плотность, давление) выражаются через функцию X . Исследованы свойства и в терминах движения газа дана физическая интерпретация решений уравнения. Доказано существование решения с ударной волной. Изучены свойства ударной адиабаты. Показано, что полученные результаты существенно отличаются от результатов для случая, когда постоянная сила отсутствует, и являются новыми.

Ключевые слова: частично инвариантное решение, дискриминантная кривая, пространство струй, неправильная особая точка, проективная замена, звуковая линия, стационарная ударная волна.

Введение. Групповой анализ дифференциальных уравнений [1] является эффективным методом построения широких классов точных решений моделей механики сплошных сред, в частности газовой динамики. В работе [2] исследуется точное решение уравнений газовой динамики, описывающее двумерное движение газа в поле силы с постоянным ускорением (силы тяжести). Это движение порождается регулярной частично инвариантной подмоделью, задаваемой 4-мерной алгеброй, при добавлении внешней силы в первое уравнение импульсов. Соответствующая подмодель для случая, когда сила отсутствует, описана в [3]. Движение газа при наличии потенциальных внешних сил, описываемое простой волной, рассматривается в [4]. Предлагаемое решение не сводится к простой волне и является новым.

Исследованы решения, соответствующие различным режимам движения газа при различных соотношениях кинетической и потенциальной энергий. Математическая модель сводится к неявному дифференциальному уравнению первого порядка. Свойства подобных уравнений описаны в [5].

1. Описание модели. Алгебра, порождающая решение, имеет базис $L_4 = \langle \partial_y, \partial_z, t\partial_y + \partial_v, \partial_t \rangle$. Инвариантами данной подмодели являются x, u, w, ρ, p, S , где u, w — компоненты скорости; термодинамические параметры ρ, p, S — плотность, давление и энтропия соответственно. Лишняя функция — компонента скорости v . Представление решения имеет вид

$$u = u(x), \quad v = v(t, x, y, z), \quad w = w(x), \quad (\rho, S, p) | x.$$

Уравнения подмодели имеют вид

$$\begin{aligned} uu' + \rho^{-1}p' = g_0, \quad v_t + uv_x + vv_y + wv_x = 0, \quad uw' = 0, \\ u\rho' + \rho(u' + v_y) = 0, \quad uS' = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $g_0 = \text{const}$, $g_0 \neq 0$; штрих означает дифференцирование по x .

Рассмотрим случай $u \neq 0$. Тогда подмодель (1.1) описывает изоэнтропические движения газа $S = s_0 = \text{const}$. Кроме того, из третьего уравнения (1.1) следует, что $w = W_0 = \text{const}$, из четвертого уравнения получаем представление

$$v = h(x)y + V(t, x, z), \quad (1.2)$$

где

$$h = -(u(\ln \rho)' + u'). \quad (1.3)$$

Подставляя представление (1.2) во второе уравнение (1.1) и расщепляя полученные соотношения по y , получим

$$uh' + h^2 = 0; \quad (1.4)$$

$$V_t + uV_x + W_0V_x + hV = 0. \quad (1.5)$$

Первое и третье уравнения в (1.1), а также уравнения (1.3), (1.4) образуют инвариантную подсистему. Переопределенная система для неинвариантной компоненты, включающая второе и четвертое уравнения из (1.1), расщепляется на инвариантное уравнение (1.4) и уравнение (1.5) для неинвариантной части. После интегрирования инвариантной подсистемы (1.5) интегрируется как линейное уравнение.

Интегрирование инвариантной системы можно свести к решению обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка и нескольким квадратурам. Введем функцию $\sigma = \sigma(x)$, $\sigma \neq \text{const}$, так что $\sigma = 1/h$. Тогда уравнение (1.4) принимает вид $u\sigma' = 1$ и получаем представление

$$u = 1/\sigma', \quad h = 1/\sigma. \quad (1.6)$$

В терминах функции $\sigma(x)$ уравнение неразрывности (1.3) имеет вид $(\ln \rho)' - \sigma''/\sigma' + \sigma'/\sigma = 0$ и интегрируется:

$$\rho = R_0|\sigma'/\sigma|, \quad R_0 = \text{const}. \quad (1.7)$$

Функция $\sigma = \sigma(x)$ является решением первого уравнения импульсов в (1.1), проинтегрировав которое получаем инвариантный интеграл Бернулли:

$$u^2/2 + I(\rho) = g_0x + b_0 \quad (1.8)$$

($I(\rho) = \int dp/\rho$ — энтальпия газа). Для политропного газа $p = S_0\rho^\gamma$ (движение изоэнтропическое). Подставляя (1.6), (1.7) в (1.8), получаем

$$\frac{1}{2(\sigma')^2} + \frac{c_0^2}{\gamma - 1} \left| \frac{\sigma'}{\sigma} \right|^{\gamma-1} = g_0x + b_0, \quad (1.9)$$

где $c_0^2 = \gamma S_0 R_0^{\gamma-1} = \text{const}$.

Интегралы уравнения (1.5) выражаются через функцию $\sigma = \sigma(x)$ конечными формулами. В результате получаем решение в виде

$$u = \frac{1}{\sigma'}, \quad v = \frac{y + H(\xi, \eta)}{\sigma}, \quad w = W_0, \quad \rho = R_0 \left| \frac{\sigma'}{\sigma} \right|, \quad S = S_0, \quad p = S_0\rho^\gamma, \quad (1.10)$$

где H — произвольная функция аргументов $\xi = t - \sigma(x)$, $\eta = z - W_0t$; W_0, R_0, S_0 — произвольные константы. Функция $\sigma = \sigma(x)$ удовлетворяет уравнению (1.9).

2. Ключевое уравнение. Уравнение (1.9) можно записать в виде

$$(\sigma')^2 \left| \frac{\sigma'}{\sigma} \right|^{\gamma-1} - \frac{g_0(\gamma-1)}{c_0^2} \left(x + \frac{b_0}{g_0} \right) (\sigma')^2 + \frac{\gamma-1}{2c_0^2} = 0. \quad (2.1)$$

Теорема 1. *Размерность пучка интегральных кривых для ключевого уравнения (2.1) не превышает четырех для произвольного рационального показателя $\gamma > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ключевое уравнение (2.1) для любых рациональных показателей γ либо является алгебраическим относительно производной, либо сводится к таковому заменой переменных.

Для оценки числа положительных вещественных корней можно применить правило Декарта, согласно которому количество положительных вещественных корней многочлена не превышает числа перемен знаков в последовательности его коэффициентов [6].

Учитывая, что рациональное число $\gamma > 1$, рассмотрим все возможные случаи:

$$\gamma = 2m, \quad \gamma = 2m + 1, \quad \gamma = \frac{2m}{2n + 1}, \quad \gamma = \frac{2m + 1}{2n}, \quad \gamma = \frac{2m + 1}{2n + 1} \quad (2.2)$$

(m, n — натуральные числа).

1. Пусть в (2.2) $\gamma = 2m$. Тогда ключевое уравнение (2.1) записывается в виде

$$(\sigma')^2 \left| \frac{\sigma'}{\sigma} \right|^{2m-1} - \frac{g_0(2m-1)}{c_0^2} \left(x + \frac{b_0}{g_0} \right) (\sigma')^2 + \frac{2m-1}{2c_0^2} = 0. \quad (2.3)$$

Область существования решения делится на две части: область, где $\sigma\sigma' \geq 0$, и область, где $\sigma\sigma' < 0$. В каждой из этих областей модуль раскрывается двумя способами. Выпишем последовательность знаков при соответствующих степенях производной в зависимости от знака σ и σ' :

- если $\sigma\sigma' \geq 0$, то (+, −, +);
- если $\sigma\sigma' < 0$, то (−, −, +).

В каждой из перечисленных областей ключевое уравнение имеет не более двух положительных корней. Для того чтобы подсчитать число отрицательных корней, необходимо выполнить замену $\sigma' \rightarrow -\sigma'$. Однако в этом случае число отрицательных корней также не превышает двух, следовательно, ключевое уравнение имеет не более четырех вещественных корней в области существования решения, и для него существует не более четырех интегральных кривых, проходящих через одну точку. Теорема доказана.

2. Если $\gamma = 2m + 1$, последовательность знаков сохраняется.

3. Если $\gamma = 2m/(2n + 1)$, то ключевое уравнение заменой $(\sigma')^{1/(2n+1)} \rightarrow q$ сводится к уравнению (2.3), для которого необходимое утверждение уже доказано.

4. Если $\gamma = (2m + 1)/(2n)$, то замена $(\sigma')^{1/(2n)} \rightarrow q$ в ключевом уравнении вновь приводит к уравнению (2.3). Следует отметить, что при замене извлекается корень четной степени, но на число корней это не оказывает влияния, так как знакоопределенность функции σ уже учтена.

5. Если $\gamma = (2m + 1)/(2n + 1)$, то замена $(\sigma')^{1/(2n+1)} \rightarrow q$ приводит ключевое уравнение к уравнению (2.3), для которого необходимое утверждение доказано.

Таким образом, для всех возможных рациональных показателей γ размерность пучка интегральных кривых ключевого уравнения (2.1) не превышает четырех.

Для определенности рассмотрим случай $\gamma = 3$. Выполняя замену

$$x + b_0/g_0 \rightarrow x, \quad \sigma \rightarrow |1/c_0|X$$

в уравнении (2.1) и обозначая $p = dX/dx$, получаем

$$F(x, X, p) \equiv p^4 - 2\alpha_0^2 x X^2 p^2 + X^2 = 0, \quad (2.4)$$

где $\alpha_0^2 = g_0/c_0^2$. Поскольку величина $g_0 x$ положительна, g_0, x должны быть одного знака. Если $g_0 < 0$, то заменой $x \rightarrow -x$ данный случай сводится к случаю $x > 0$. Более того, при замене $X' \rightarrow -X'$ ключевое уравнение не меняет своего вида. Таким образом, без потери общности можно считать $g_0 > 0$. Уравнение (2.4) будем называть ключевым уравнением. Оно относится к классу неявных дифференциальных уравнений, не интегрируется в квадратурах и обладает рядом специфических свойств [5].

3. Свойства решения ключевого уравнения. Уравнение (2.4) определяет поверхность в пространстве струй $\mathbb{R}^3(x, X, p)$, которую будем называть поверхностью уравнения (рис. 1). Поверхность уравнения состоит из четырех изолированных компонент, расположенных симметрично относительно оси Ox в различных октантах пространства $\mathbb{R}^3(x, X, p)$. Уравнение (2.4) определено при $x > 0$. Каждая из компонент представляет собой сложенный вдвое лист над плоскостью $p = 0$.

Лемма 1. Геометрия поверхности ключевого уравнения в пространстве 1-струй не меняется при вариации параметра задачи α_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разрешим (2.4) в виде

$$p = \varepsilon_1 |\alpha_0| \sqrt{x X^2 + \varepsilon_0 X \sqrt{x^2 X^2 - 1/\alpha_0^4}}.$$

Параметр $|\alpha_0|$, стоящий вне корня, на геометрию поверхности не влияет, он лишь меняет масштаб в вертикальном направлении. Параметр α_0 , стоящий под корнем, влияет только на расположение дискриминантной кривой, увеличивая или уменьшая расстояние от нее до осей Ox и OX , поэтому поверхность уравнения изменяется, сдвигаясь параллельно плоскости $x = 0$ в направлении $x > 0$ в случае уменьшения параметра и в направлении

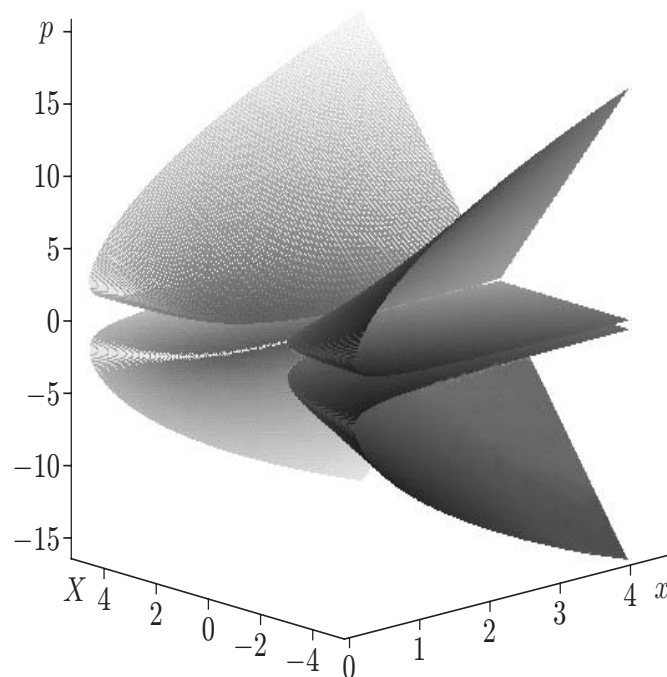


Рис. 1. Поверхность, определяемая ключевым уравнением (2.4) в пространстве струй

к $x = 0$ в случае его увеличения. Композиция сдвига и растяжения не меняет геометрию поверхности уравнения.

Лемма 2. Все решения уравнения (2.4), кроме $X \equiv 0$, являются строго монотонными функциями переменной x .

Доказательство. Действительно, если $p = 0$, то $X \equiv 0$.

Лемма 3. Область Ω существования решения (2.4) на плоскости $\mathbb{R}^2(x, X)$ ограничена дискриминантными кривыми. Через каждую точку Ω проходит ровно четыре интегральных кривых уравнения (2.4).

Доказательство. Поскольку дискриминантная кривая задается на плоскости $\mathbb{R}^2(x, X)$ уравнениями $F = 0$, $F_p = 0$, для уравнения (2.4) имеем криванту, состоящую из двух компонент в пространстве струй $\mathbb{R}^3(x, X, p)$:

$$K_1: p = 0, \quad X = 0; \quad K_2: \alpha_0^4 x^2 X^2 = 1, \quad X \neq 0, \quad p^2 = \alpha_0^2 x X^2. \quad (3.1)$$

Компонентам (3.1) соответствуют дискриминантные кривые

$$DK_1: X = 0; \quad DK_2: \alpha_0^4 x^2 X^2 = 1, \quad X \neq 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (2.4) является биквадратным по p и может быть разрешено в виде

$$p = \varepsilon_1 \sqrt{\alpha_0^2 x X^2 + \varepsilon_0 X \sqrt{\alpha_0^4 x^2 X^2 - 1}} \quad (3.3)$$

($\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$). Вещественные решения уравнения (2.4) существуют только в области Ω : $\alpha_0^4 x^2 X^2 \geq 1$, причем в каждой точке Ω уравнение (2.4) имеет ровно четыре решения относительно p . Это означает, что через каждую точку области Ω проходит ровно четыре интегральных кривых уравнения (2.4): C_{++} , C_{+-} , C_{-+} , C_{--} . Лемма 3 доказана.

В дальнейшем многообразия K_1 и DK_1 не рассматриваются, так как они не имеют физического смысла (на этих многообразиях согласно (1.10) $\rho = 0$). Поскольку дискриминантная кривая является границей области существования решения (2.4), обозначим DK_2 как $\partial\Omega$ (рис. 2).

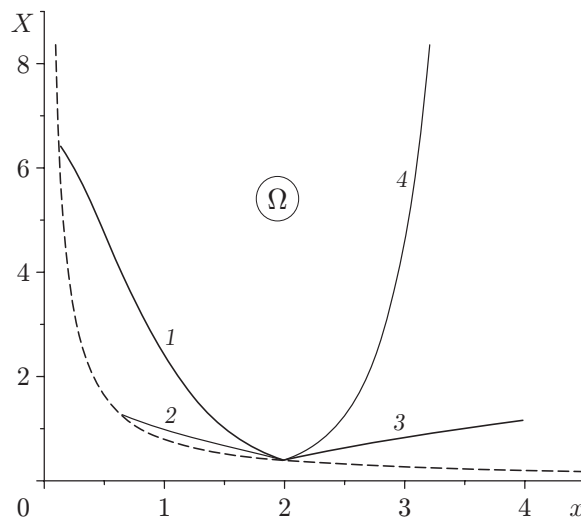


Рис. 2. Дискриминантная кривая $\partial\Omega$ при $X > 0$ (штриховая линия) и интегральные кривые уравнения (2.4) (сплошные линии):

1 — C_{-+} ; 2 — C_{--} ; 3 — C_{+-} ; 4 — C_{++}

Справедлива доказанная в [7]

Теорема 2. *Правильная особая точка $T_0 = (x_0, y_0, p_0)$ уравнения (2.4) при четном ν есть точка останова, если $(\partial^\nu F/\partial p^\nu)G > 0$, и точка ветвления, если $(\partial^\nu F/\partial p^\nu)G < 0$, где ν таково, что $(\partial F/\partial p) = 0, \dots, (\partial^{\nu-1} F/\partial p^{\nu-1}) = 0, (\partial^\nu F/\partial p^\nu) \neq 0$, а $G = F_x + pF_y$. Если же ν нечетное, то T_0 — точка единственности.*

Лемма 4. *Дискриминантная кривая ключевого уравнения содержит как регулярные, так и нерегулярные особые точки.*

1. *Каждая точка дискриминантной кривой, не являющаяся нерегулярной особой точкой, является точкой ветвления или останова для интегральных кривых уравнения (2.4).*

2. *Уравнение (2.4) имеет две нерегулярные особые точки типа “фокус”, положение которых определяется параметром α_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.1) $F_{pp} = 8p^2 \neq 0$ на многообразии K_2 . По теореме 1 для уравнения (2.4) $\nu = 2$, при этом $G \equiv F_x + pF_y = p(2X - 4\alpha_0^2 x X p^2) - 2\alpha_0^2 X^2 p^2$. Тогда условие $G > 0$ определяет на кривинанте точки останова. Множество решений этого неравенства имеет вид

$$\{-1/\alpha_0^{4/3} < X < 0, p > 0\} \cup \{0 < X < 1/\alpha_0^{4/3}, p < 0\}. \quad (3.4)$$

Аналогично условие $G < 0$ определяет на кривинанте точки ветвления:

$$\{X < -1/\alpha_0^{4/3}, p > 0\} \cup \{X > 1/\alpha_0^{4/3}, p < 0\}. \quad (3.5)$$

Неравенства (3.4), (3.5) определяют регулярные точки кривинанты, являющиеся точками ветвления или останова. Первый пункт леммы 4 доказан.

Если $G = 0$, то система трех уравнений $F = 0, F_p = 0, G = 0$ определяет дискретное множество точек на кривинанте и имеет два решения в пространстве струй:

$$\xi_1: (1/\alpha_0^{2/3}, -1/\alpha_0^{4/3}, 1/\alpha_0^{2/3}), \quad \xi_2: (1/\alpha_0^{2/3}, 1/\alpha_0^{4/3}, -1/\alpha_0^{2/3}).$$

В результате замены координат

$$x^1 = x - x_0, \quad X^1 = X - X_0 - X'_0(x - x_0), \quad p^1 = p - p_0$$

неправильная особая точка с координатами (x_0, y_0, p_0) переходит в начало координат $O(0, 0, 0)$. В окрестности точки O уравнение (2.4) приводится к дифференциальному уравнению первого приближения [8]

$$\alpha(X^1)^2 + \beta(x^1)^2 + \gamma x^1 p^1 + (p^1)^2 = 0, \quad (3.6)$$

где

$$\alpha = 2F_{X^1}/F_{p^1 p^1}, \quad \beta = F_{x^1 x^1}/F_{p^1 p^1}, \quad \gamma = 2F_{x^1 p^1}/F_{p^1 p^1}.$$

Введем следующие обозначения: $\Delta = -4\beta + \gamma(\alpha + \gamma)$, $\delta = (\alpha + 2\gamma)^2 - 16\beta$. В [8] доказана

Теорема 3. *Для неправильной особой точки O уравнения (3.6) имеет место следующая классификация:*

- 1) *если $\delta > 0$, $\Delta < 0$ или $\delta > 0$, $\alpha + 2\gamma \neq 0$, точка O — узел;*
- 2) *если $\delta > 0$, $\Delta > 0$, точка O — седло;*
- 3) *если $\delta < 0$, $\alpha + 2\gamma \neq 0$, точка O — фокус;*
- 4) *если $\delta < 0$, $\alpha + 2\gamma = 0$, точка O — центр.*

Поскольку $F_{xp} = -4\alpha_0^2 p(X^2 + 2pxX)$, $F_{xx} = 2p^2(1 - \alpha_0^2(4pX + 2p^2x))$, $F_X = 2X(1 - 2\alpha_0^2 xp^2)$, для точек ξ_1 и ξ_2 соответственно получаем $\alpha + 2\gamma = \pm 5/2$, $\delta = -23/4$ и $\Delta = -3/2$. Согласно теореме 2 точки ξ_1 и ξ_2 (рис. 3) являются неправильными особыми точками типа “фокус”. Свойство 3 теоремы 3 доказано.

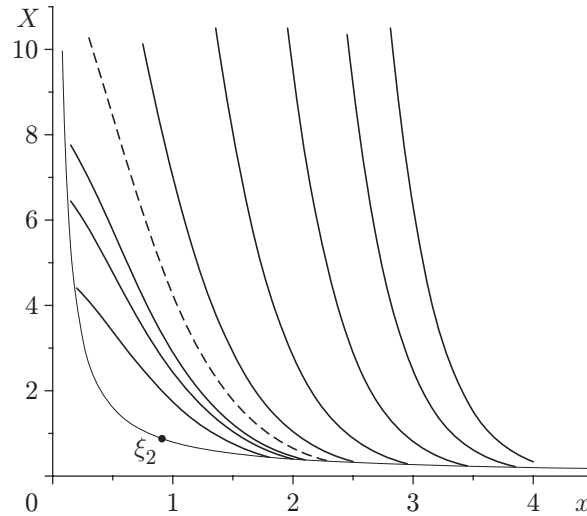


Рис. 3. Интегральные кривые уравнения (2.4) (сплошные линии), сепаратриса (штриховая линия) и неправильная особая точка ξ_2 ключевого уравнения на дискриминантной кривой

Принципиальным является вопрос о существовании интегральных кривых, которые, стартуя с дискриминантной кривой, не возвращаются на нее. На рис. 3 представлены интегральные кривые трех типов: 1) интегральные кривые, лежащие слева от штриховой линии и определенные лишь на конечном интервале по X ; 2) кривые, расположенные справа от штриховой линии и продолжающиеся неограниченно по X ; 3) штриховая линия, называемая далее сепаратрисой и разделяющая области, в которых определены интегральные кривые двух описанных выше типов. Эта линия является интегральной кривой, которой соответствует некоторый предельный режим течения. В п. 5 доказано, что все эти режимы действительно имеют место.

Заметим, что неправильные особые точки ключевого уравнения исчезают (смещаются на бесконечность) при $g_0 \rightarrow 0$, что согласуется с задачей, исследованной в [3], в которой при отсутствии постоянной силы отсутствуют и неправильные особые точки.

4. Поведение интегральных кривых ключевого уравнения на бесконечности. Для наиболее полного описания интегральных кривых необходимо выяснить, существуют ли интегральные кривые, определенные для любых значений x , и, если таковые имеются, исследовать их асимптотику при $x \rightarrow \infty$. Перейдем в (2.4) от переменных (x, X, X') к новым переменным (t, q, q') , где $t^2 = 1/x, q^2 = 1/(x^2 y^2)$. В новых переменных уравнение (3.3) принимает вид

$$t^4 q' = 2t^3 q + 2\sqrt{2} \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 q (1 - q^2 / (8\alpha_0^4)) + O(t^2, q^2) \quad \text{при } \varepsilon_0 = 1; \tag{4.1}$$

$$t^4 q' = t^3 q + \sqrt{2} \varepsilon_1 q^2 / \alpha_0 + o(t^2, q^2) \quad \text{при } \varepsilon_0 = -1. \tag{4.2}$$

Для дальнейшего исследования решения важны лишь главные члены в правой части уравнений (4.1), (4.2), которые выписаны явно. При такой замене образом дискриминантной кривой являются прямые $q^2 = \alpha_0^4$, что существенно упрощает анализ. Уравнение (4.2) можно записать в виде

$$t^{h_0} q' = a_0 q^{m_0} (1 + \varphi_0(q)) + f_0(t, q), \tag{4.3}$$

где $h_0 = 4; m_0 = 1; a_0 = 2\sqrt{2} \varepsilon_1 \beta_0$; φ_0, f_0 — голоморфные функции своих аргументов ($\beta_0 = \text{const} > 0$). Согласно теории Пуанкаре — Бендиксона [9, 10] окрестность точки $(0, 0)$ для уравнения (4.3) при заданных значениях параметров h_0, m_0, a_0 делится на три сектора:

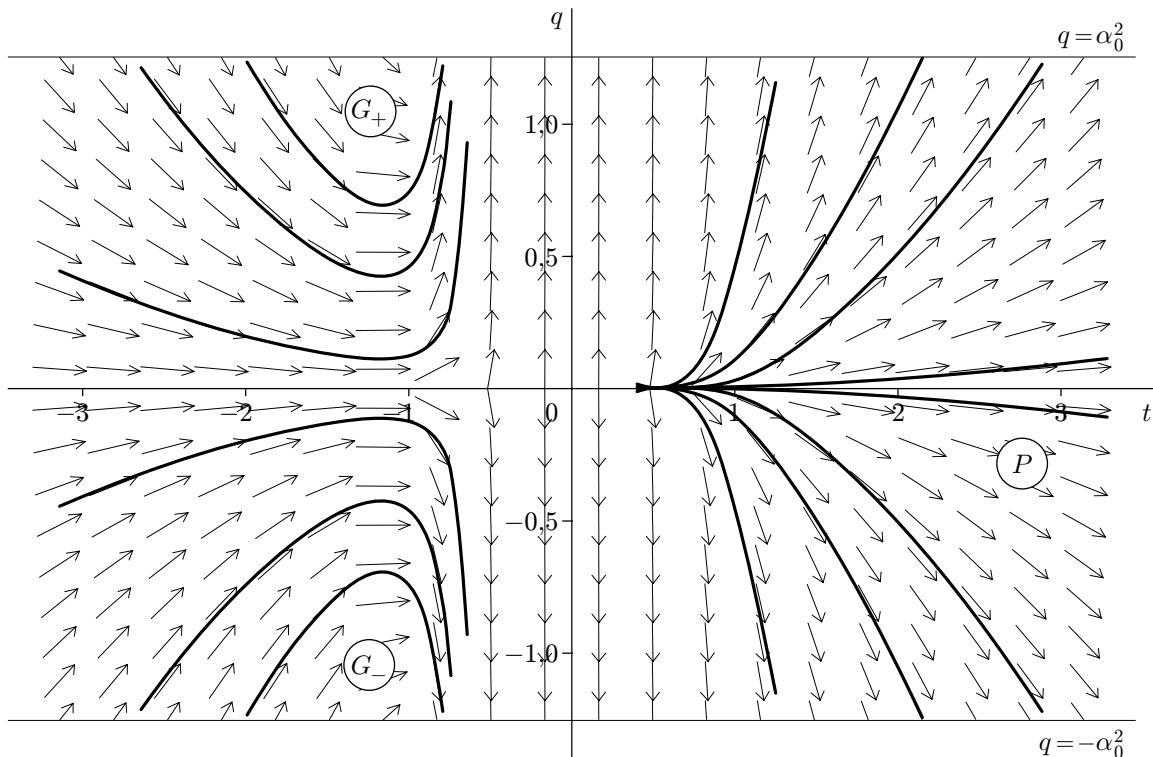


Рис. 4. Поведение интегральных кривых (4.3) в окрестности начала координат

два гиперболических и один параболический. Поведение решения при $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ показано на рис. 4.

Таким образом, при определенных начальных данных некоторые интегральные кривые уравнения (4.3) входят в точку $O(0,0)$, и, следовательно, интегральные кривые исходного уравнения (2.4) существуют при любых значениях $X > 0$ (параболический сектор P). Интегральные кривые, лежащие в гиперболических секторах G_+ и G_- , не достигают точки $O(0,0)$, следовательно, соответствующие им интегральные кривые уравнения (2.4) существуют на конечном по X интервале. Сепаратрисе соответствует отрезок прямой $\{t = 0, q^2 < \alpha_0^4\}$. Такое поведение интегральных кривых в окрестности особой точки позволяет сделать вывод об асимптотике движения газа. В зависимости от стартовых условий движение частицы газа может продолжаться сколь угодно далеко в направлении x или происходить лишь на конечном по x интервале. Это зависит от соотношения кинетической и потенциальной энергий.

Для $\varepsilon_0 = -1$ в уравнении (4.3) $h_0 = 4$, $m_0 = 2$, $a_0 = \sqrt{2}\varepsilon_1/\alpha_0$. В этом случае окрестность особой точки делится на два гиперболических и один либо два параболических сектора. Данные численного эксперимента подтверждают существование двух гиперболических и двух параболических секторов.

5. Характеристики и звуковая линия. Рассмотрим вопрос о том, в каких областях течение, описываемое формулами (1.10) при $H \equiv 0$, является до- и сверхзвуковым.

Лемма 5. Точки дискриминантной кривой (3.2) на плоскости $\mathbb{R}^2(x, X)$ являются образами инвариантных звуковых характеристик системы (1.10), задаваемых в физическом пространстве уравнением $x = x_0$. На дискриминантной кривой $u^2 = c^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записав условие $u^2 = c^2$ в терминах функции σ : $1/\sigma' = c_0^2(\sigma'/\sigma)^2$, получаем уравнение $p^2 = X$, которое на решениях ключевого уравнения (2.4) имеет вид $\alpha_0^2 x X = 1$. Лемма 5 доказана.

Решение (1.10) при $H \equiv 0$ определяет двумерное установившееся движение газа на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$. В этом случае имеет место

Лемма 6. *Интегральные кривые уравнения (2.4) совпадают с линиями тока течения газа на физической плоскости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линии тока на физической плоскости определяются равенством $dx/u(x, y) = dy/v(x, y)$, которое в терминах функции σ имеет вид $\sigma' dx = \sigma dy/y$. После интегрирования получим

$$y = y_0 \sigma(x), \quad y_0 = \text{const}. \quad (5.1)$$

Решение ключевого уравнения (2.4) имеет вид $X = X(x)$. С учетом замены (2.4) равенство (5.1) означает, что на физической плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ x и y связаны так же, как x и X на фазовой плоскости $\mathbb{R}^2(x, X)$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Интегральные кривые C_{+-} , C_{--} для $\varepsilon_0 = -1$ соответствуют сверхзвуковым течениям газа, и для них имеет место неравенство*

$$u^2 > c^2. \quad (5.2)$$

Интегральные кривые C_{++} , C_{-+} для $\varepsilon_0 = 1$ соответствуют течениям газа, на которых возможен переход через скорость звука, и для них имеет место неравенство

$$u^2 < c^2. \quad (5.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение (5.2) с учетом (2.4) эквивалентно неравенствам

$$\{-X < p^2 < X, X > 0\} \cup \{X < p^2 < -X, X < 0\}. \quad (5.4)$$

Подставляя в (5.4) p^2 из (3.3), в области Ω существования решения неравенства (5.4) получим

$$\Omega: \quad \alpha_0^2 x X > 1. \quad (5.5)$$

Неравенства (5.4) не имеют решений для интегральных кривых C_{++} , C_{-+} и выполняются тождественно для интегральных кривых C_{+-} , C_{--} . Аналогично установим, что система неравенств (5.3), (5.5) для интегральных кривых C_{++} , C_{-+} выполнена тождественно, а для интегральных кривых C_{+-} , C_{--} не совместна. Это означает, что интегральные кривые C_{+-} , C_{--} описывают сверхзвуковое течение. Для интегральных кривых C_{++} , C_{-+} выполнено неравенство (5.3), и, следовательно, на них возможен переход через скорость звука.

Лемма 8. *Для течения газа, задаваемого решением (1.10) при $H \equiv 0$, образ звуковой линии $S: |\mathbf{u}| = c$ на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ определяется уравнением*

$$y^2 = (\sigma(x)^2 A_0^2 - c_0^2)/A_0,$$

где x — исходная физическая переменная; $\sigma(x)$ — решение ключевого уравнения (2.4) в переменных $(x, \sigma(x))$; $A_0 = g_0 x + b_0$ — полная энергия частицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в интеграл Бернулли $u^2 + v^2 + c^2 = 2(g_0 x + b_0)$ уравнение звуковой линии $u^2 + v^2 = c^2$, получаем систему двух уравнений

$$u^2 + v^2 = g_0 x + b_0, \quad c^2 = g_0 x + b_0. \quad (5.6)$$

Второе из них имеет вид $(\sigma')^2 = \sigma^2(g_0 x + b_0)/c_0^2$. Подставляя это выражение в первое уравнение (5.6), записанное в терминах (1.10), получаем $(1/\sigma')^2 + y^2/\sigma^2 = g_0 x + b_0$. В результате имеем

$$y^2 = (\sigma(x)^2(g_0 x + b_0)^2 - c_0^2)/(g_0 x + b_0),$$

что и требовалось доказать.

Численный эксперимент показывает, что образ звуковой линии находится в области существования решения на плоскости $\mathbb{R}^2(x, X)$.

6. Течения со стационарной ударной волной. Рассмотрим течение газа с неподвижной ударной волной, фронт которой задается уравнением $x = x_0$. Пусть p_i , ρ_i , c_i — давление, плотность и скорость звука, u_i — нормальные к фронту компоненты скорости газа перед фронтом волны ($i = 1$) и за ним ($i = 2$). Тогда для политропного газа с уравнением состояния $p_i = S_{0i}\rho_i^3$ имеют место условия на скачке — соотношения Ренкина — Гюгонно [2]

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2; \quad (6.1)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2; \quad (6.2)$$

$$3p_1/\rho_1 + u_1^2 + g_0 x_0 = 3p_2/\rho_2 + u_2^2 + g_0 x_0. \quad (6.3)$$

При переходе через скачок сохраняются касательные к фронту компоненты скорости

$$v_1 = v_2. \quad (6.4)$$

Имеет место теорема Цемплена: абсолютная величина нормальной к фронту компоненты скорости u_i больше скорости звука c_i перед фронтом волны и меньше скорости звука за ее фронтом:

$$u_1^2 > c_1^2, \quad u_2^2 < c_2^2.$$

Утверждение теоремы Цемплена эквивалентно утверждению о возрастании энтропии при переходе через скачок:

$$S_{02} > S_{01}.$$

Запишем формулы (1.10) для состояний по разные стороны от скачка в терминах функции $X = X(x)$ при $H \equiv 0$:

$$u_i = \frac{c_{0i}}{X'_i}, \quad v_i = \frac{y c_{0i}}{X_i}, \quad w = W_0, \quad \rho_i = R_{0i} \frac{X'_i}{X_i}, \quad S_i = S_{0i}, \quad p_i = S_{0i} \rho_i^3. \quad (6.5)$$

При этом условие (6.4) принимает вид

$$X_2 = (c_{02}/c_{01}) X_1. \quad (6.6)$$

Поскольку $\rho u = R_0 c_0 / X$, из (6.6) и (6.1) следует, что R_{0i} сохраняется:

$$R_{01} = R_{02} = R_0. \quad (6.7)$$

Подставляя $c_0^2 = 3S_0 R_0^2$ в (6.6), имеем

$$X_2 = \sqrt{S_{02}/S_{01}} X_1. \quad (6.8)$$

Подставим в выражение $p + \rho u^2$ представление решения (6.5) и заменим производные функции $X(x)$ из (4.3). В силу (6.7), (6.8) полученное равенство упрощается и принимает вид

$$\frac{D_1^4 + X_1^2}{D_1 X_1} - \frac{D_2^4 + X_2^2}{D_2 X_2} = 0, \quad (6.9)$$

где

$$D_i = \sqrt{\frac{g_0 x_0}{3S_{01} R_0^2} X_1^2 + (-1)^i \sqrt{\frac{g_0^2 x_0^2}{9S_{01}^2 R_0^4} X_1^4 - X_i^2}}.$$

Условие сохранения энергии на скачке (6.3) совпадает с инвариантным интегралом Бернулли (1.9) и, следовательно, с уравнением (2.4) и не накладывает дополнительных условий: сохранение постоянной b_0 следует из общего интеграла Бернулли, а слагаемое $g_0 x$ на скачке постоянно. Таким образом, ключевое уравнение (2.4) есть условие (6.3) на скачке. Произвол в выборе решения перед и за фронтом волны определяется произволом выбора интегральных кривых уравнения (4.3).

Суммируем полученные результаты в виде следующего утверждения.

Теорема 4. Для решения (6.5), (2.4) условия (6.1)–(6.3) на скачке эквивалентны конечным соотношениям (6.8), (6.9), связывающим на фронте скачка $x = x_0$ значения решений X_1 и X_2 дифференциального уравнения (2.4).

Аналогичный результат справедлив и для движения в отсутствие силы [11].

Соотношение (6.8) задает на плоскости состояний $\mathbb{R}^2(X_1, X_2)$ однопараметрическое семейство прямых с угловым коэффициентом $s = \sqrt{S_{01}/S_{02}}$. Согласно теореме Цемплена $0 < s < 1$. Уравнение (6.9) определяет на этой плоскости некоторую кривую. Каждая прямая (6.8) соответствует классу ударных переходов, самосопряжению решений вида (6.5) с заданным отношением $S_{01}/S_{02} = s^2$. Точки пересечения прямой (6.8) с кривой (6.9) определяют пары состояний (X_1, X_2) , сопряженные через ударную волну. Таким образом, кривую (6.9) можно назвать ударной адиабатой, характеризующей возможные ударные переходы для данного решения (6.5).

7. Анализ ударной адиабаты. Вследствие того что ключевое уравнение (2.4) допускает инволюцию $J: X \mapsto -X$, а области определения решения для $X > 0$ и $X < 0$ не имеют общих точек, далее без потери общности будем полагать $X_1 > 0, X_2 > 0$.

Преобразовав равенство (6.9), получим

$$kX_1(1 - X_1^2/X_2^2) = \sqrt{kX_1^2 - X_2^2/X_1^2} + \sqrt{kX_1^2 - 1}, \quad (7.1)$$

где $k = g_0x_0/(3S_{01}R_0^2)$. В приведенном виде формула (7.1) неудобна для исследования. Выполним замену переменных $(X_1, X_2) \rightarrow (t, q)$, где

$$t = X_2/X_1, \quad q = X_1. \quad (7.2)$$

В переменных (7.2) уравнение (7.1) можно записать в виде

$$kq(1 - 1/t^2) = \sqrt{kq^2 - t^2} + \sqrt{kq^2 - 1}. \quad (7.3)$$

Уравнение (7.3) однозначно разрешается относительно переменной q :

$$q = \frac{t^2}{k} \sqrt{\frac{k^2t^2 + k^2 + 2\sqrt{k^4t^2 + k^3t^4}}{k(-4t^4 + kt^4 - 2kt^2 + k)}}. \quad (7.4)$$

Это верно, поскольку $q > 0$, и, следовательно, из четырех возможных корней уравнения (7.3) два отрицательных можно не рассматривать. По теореме Цемплена в силу (6.8) получаем $t > 1$. Это означает, что область возможных ударных переходов есть $\Delta = \{(t, q): t > 1, q > 0\}$. В области Δ из двух оставшихся корней вещественным является корень, задаваемый формулой (7.4). Заметим, что при изменении значения k функция $q(t)$, задаваемая формулой (7.4), меняет свое поведение. Действительно, значения

$$t_+ = 1/\sqrt{1 - 2/\sqrt{k}}, \quad t_- = 1/\sqrt{1 + 2/\sqrt{k}} \quad (7.5)$$

являются корнями знаменателя подкоренного выражения и существенно зависят от значения параметра k . Для любых значений k корень $t_- < 1$. Однако при $k < 4$ $t_+ \neq 0, t_+ \in i\mathbb{R}$, при $k > 4$ $t_+ > 1$, при $k = 4$ знаменатель, являющийся в общем случае многочленом четвертой степени по t , преобразуется в квадратный двучлен. Прямые (6.8) при замене (7.2) задаются уравнением

$$t = \text{const}. \quad (7.6)$$

7.1. *Случай $k < 4$.* Согласно (7.5) при $k < 4$ решение (7.6) существует при всех $t > 1$. Кроме того, справедлива

Лемма 9. В случае $k < 4$ решение (7.4) имеет следующую асимптотику при $t \rightarrow \infty$:

$$q \sim \frac{t}{k} \sqrt{\frac{k + \sqrt{k}}{4 - k}}.$$

Доказательство. Необходимо лишь внести в (7.4) t^2 под корень и устремить t к бесконечности.

7.2. *Случай $k > 4$.* При $k > 4$ у знаменателя в (7.4) появляется второй положительный корень, который к тому же больше единицы. Так как числитель подкоренного выражения строго больше нуля при всех значениях t , то вещественные решения (7.4) существуют только при $t \in (t_-, t_+)$. В этом случае справедлива следующая лемма, являющаяся аналогом леммы 9.

Лемма 10. В случае $k > 4$ решение (7.4) имеет следующую асимптотику при $t \rightarrow t_+$:

$$q \sim F_0 / \sqrt{t_+ - t^2}, \quad F_0 = \text{const}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

7.3. *Случай $k = 4$.* В случае $k = 4$ запишем (7.4) в виде

$$q = \frac{t^2}{4} \sqrt{\frac{t^2 + 1 + \sqrt{t^4 + 4t^2}}{2t^2 - 1}}. \quad (7.7)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 11. Функция $q(t)$, задаваемая (7.7), имеет следующую асимптотику при $t \rightarrow \infty$:

$$q \sim t^2/4.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 9.

Поведение ударной адиабаты и прямой (7.6) отличается от случая $k < 4$ лишь тем, что при $t \rightarrow \infty$ адиабата имеет другую асимптотику.

С использованием полученных выше результатов сформулируем следующую теорему.

Теорема 5. Любому состоянию перед скачком (X_1, S_{01}) соответствует пара (X_2, S_{02}) , где X_2 вычисляется из уравнения (6.9), а S_{02} — согласно (6.8).

Доказательство. Три случая, рассмотренные выше, описывают все возможные варианты поведения ударной адиабаты. В каждом из них она имеет единственную (однозначную) ветвь типа (7.4), которая на плоскости (t, q) в силу лемм 9–11 имеет одну и только одну точку пересечения с прямой (7.6). Это означает, что любому значению $q^* = X_1$ ударная адиабата ставит в соответствие ровно одно значение $t^* = X_2/X_1 > 1$. Таким образом, состояние X_2 за скачком вычисляется по формуле

$$X_2 = q^*/t^*.$$

Тогда пару (X_1, S_{01}) подставляем в (6.9) и разрешаем полученное равенство относительно X_2 . Затем, подставляя (X_1, S_{01}) и X_2 в (6.8), однозначно вычисляем S_{02} . Теорема доказана.

8. Картина исследуемого течения на физической плоскости. Дадим физическую трактовку полученного решения.

8.1. *Интерпретация непрерывного решения.* В формуле (3.3) параметр ε_1 задает режимы течения (источнику соответствует значение +1, стоку — значение -1). Характер течения определяется тем, как ориентированы относительно друг друга сила тяжести и движение струи газа. В случае их сонаправленности имеет место источник, если они противонаправлены, — сток.

В случае источника возможны следующие режимы движения.

1. Струя газа разгоняется и уходит на бесконечность.
2. Струя газа разгоняется и уходит на бесконечность с другой асимптотикой (случай сепаратрисы).

Данным режимам соответствуют интегральные кривые типа C_{+-} , второй случай является предельным случаем первого (штриховая линия на рис. 3).

3. Остановка частиц происходит на конечном расстоянии от точки истечения (сток частиц с одной поверхности на другую). Остановка происходит несмотря на то, что струя движется в направлении гравитационной силы. Это объясняется тем, что движение частицы газа отличается от движения материальных частиц наличием “сопротивления среды” — давления. Частица газа затрачивает дополнительную энергию, для того чтобы продвигаться вперед. Место старта таких частиц не может быть произвольным: оно связано со значением параметра задачи α_0 (см. лемму 3).

В случае стока движение газа происходит следующим образом.

1. Сила тяжести останавливает поток частиц газа, приходящий из бесконечности.
2. Сила тяжести останавливает поток частиц газа, приходящий из бесконечности с другой асимптотикой (случай сепаратрисы).

Оба режима соответствуют интегральным кривым типа C_{-+} . Вновь второй случай является предельным случаем первого. С физической точки зрения существует некоторая “поверхность конденсации”, на которой скапливаются прилетающие частицы и которая играет роль поверхности нулевого потенциального уровня.

3. Возможна остановка частиц газа на конечном расстоянии от стока.

8.2. *Интерпретация решения с сильным разрывом.* Согласно формуле (5.1) поведение интегральных кривых ключевого уравнения (2.4) аналогично поведению линий тока плоского установившегося течения газа (1.10). На рис. 5 показан ударный переход на физической плоскости при $x = x_0$ (линия 2 — интегральная кривая C_{+-} , задающая течение перед ударной волной, линия 3 — интегральная кривая C_{++} , задающая течение за ударной волной). Точка пересечения этих интегральных кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(x, X)$ соответствует ударной волне. Движению частиц газа в пространстве соответствует движение точки на плоскости (x, X) по интегральным кривым. При $x < x_0$ точка движется по линии 2, при $x > x_0$ переходит на линию 3.

Заключение. Исследование подмодели показало, что область существования решения на фазовой плоскости $\mathbb{R}^2(x, X)$ ограничена дискриминантной кривой. Рассмотрены и классифицированы все регулярные точки ключевого дифференциального уравнения. Установлено существование неправильных особых точек, которые существенно усложняют исследование модели и качественно меняют картину течения.

С физической точки зрения модель описывает двумерное установившееся движение газа в поле постоянной силы. При этом дискриминантная кривая представляет собой источник при $p > 0$ и сток при $p < 0$. Изучена асимптотика решения при $x \rightarrow \infty$.

Исследованы звуковые характеристики системы (1.10) и найдено уравнение звуковой линии. Доказано, что звуковая линия расположена в области Ω существования решения. При прохождении через нее потока газа по интегральным кривым C_{++} , C_{+-} происходит непрерывный переход от сверхзвукового течения к дозвуковому. Получены аналоги уравнения ударной адиабаты и прямой Михельсона. Особенностью данной задачи является сильная зависимость поведения ударной адиабаты от параметра задачи g_0 , положения фронта волны x_0 и значения энтропии перед фронтом S_{01} .

В силу того что аргументы H являются лагранжевыми координатами и непрерывны при переходе через скачок $x = x_0$, приведенная конструкция ударного перехода переносится на общие решения вида (1.1), в которых функция $H \neq 0$.

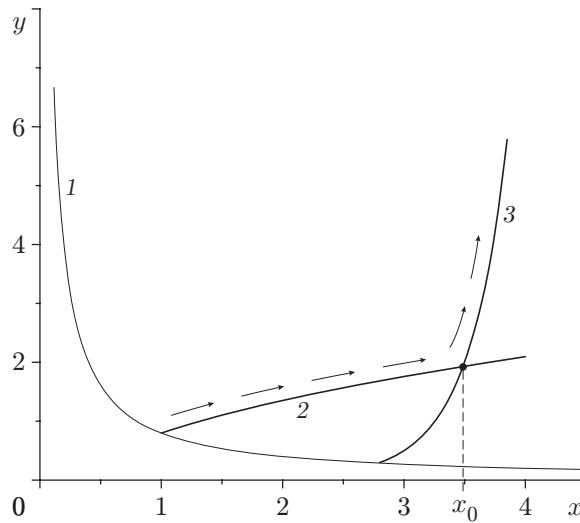


Рис. 5. Кривые на плоскости (x, y) , задающие ударный переход:
 1 — граница области существования решения; 2 — интегральная кривая C_{+-} ; 3 —
 интегральная кривая C_{++} ; точка — ударный переход

Представляет интерес физическая интерпретация неправильных особых точек ξ_1 и ξ_2 , а также построение решения с ударной волной для максимально общего уравнения состояния газа. В этом случае в ключевом уравнении (2.4) нелинейная зависимость от производной определяется уравнением состояния (функцией $I = I(\rho)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
3. **Чупахин А. П.** Небарохронные подмодели типов $(1, 2)$ и $(1, 1)$ уравнений газовой динамики. Новосибирск, 1999. (Препр. / Ин-т гидродинамики СО РАН; № 1-99).
4. **Станюкович К. П.** Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
5. **Арнольд В. И.** Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Ижевск. респ. тип., 2000.
6. **Прасолов В. В.** Многочлены. М.: Моск. центр непрерыв. мат. образования, 1999.
7. **Ремизов А. О.** О правильных особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. С. 1053–1062.
8. **Пхакадзе А. В., Шестаков А. А.** О классификации особых точек дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной // Мат. сб. 1959. Т. 49, № 1. С. 1–7.
9. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
10. **Андреев А. Ф.** Особые точки дифференциальных уравнений. Минск: Вышэйш. шк., 1979.
11. **Чупахин А. П.** Самосопряжение решений через ударную волну: предельный скачок уплотнения // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 3. С. 26–40.

Поступила в редакцию 28/X 2005 г.,
 в окончательном варианте — 25/I 2006 г.