

## СОПРЯЖЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ ОБРАЗЦОВ МАГНИЯ

А. В. Федоров, А. В. Шульгин

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск, fedorov@itam.nsc.ru

Разработана распределенная математическая модель воспламенения частицы магния с учетом гетерогенной химической реакции и области теплового влияния частицы на газ. Найдено решение задачи в стационарном случае, что позволило расширить классификацию тепловой истории системы «частица — газ». Предложен численный метод решения рассмотренного класса краевых задач воспламенения магниевых частиц, и верифицирована математическая модель по зависимости времени задержки воспламенения от числа Нуссельта. Выявлен предельный размер газового слоя вблизи частицы, определяющего режим воспламенения. Показана устойчивость некоторых режимов нагрева относительно конечных и инфинитезимальных возмущений, возможность управления процессом воспламенения с помощью высокочастотного теплового воздействия на неустойчивые состояния системы «частица — газ».

Ключевые слова: воспламенение, гетерогенная химическая реакция, математическое моделирование.

### ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проблема физико-математического моделирования воспламенения и горения образцов металлов представляет значительный интерес для различных отраслей промышленности [1]. В [1] представлены в основном точечные и частично-распределенные модели процесса воспламенения мелких металлических частиц, когда процесс низкотемпературного окисления проходит на поверхности частицы. При этом учет тепла, рассеиваемого в газовую фазу, не принимался во внимание. Это означает, что толщина так называемой «приведенной пленки» пренебрежимо мала. Представляет интерес изучить влияние данного фактора на тепловую историю реагирующей частицы.

Рассмотрим частицу металла радиусом  $r_p$ , окруженную слоем газа толщиной  $L - r_p$ . Считаем, что на поверхности образца протекает экзотермическая химическая реакция окисления. Тогда математическая модель, описывающая поля температур образца  $T_2$  и окружающего газа  $T_1$ , имеет вид

$$\rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\nu \frac{\partial T_2}{\partial r} \right), \quad 0 \leq r \leq r_p, \quad (1)$$

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda_1 \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\nu \frac{\partial T_1}{\partial r} \right), \quad r_p \leq r \leq L, \quad (2)$$

где  $\nu$  — показатель симметрии, равный 0, 1, 2 для плоского, цилиндрического и сферического случаев соответственно;  $\rho_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $c_i$  — плотность, теплопроводность и удельная теплоемкость фаз, индексом  $i = 1$  отмечены параметры газа,  $i = 2$  — частицы.

Уравнения (1), (2) должны удовлетворять следующим краевым и начальным условиям:

$$\begin{aligned} r = 0: \quad & \frac{\partial T_2}{\partial r} = 0, \\ r = L: \quad & \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = -\alpha(T_1 - \tilde{T}), \\ r = r_p: \quad & T_1 = T_2, \\ & \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} + q_0 \rho_3 \frac{dh}{dt} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}, \\ & \frac{dh}{dt} = K \exp\left(-\frac{E}{RT_2}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $q_0$  — тепловыделение на единицу массы оксида,  $\rho_3$  — плотность оксида,  $h$  — толщина оксидной пленки,  $\frac{dh}{dt}$  — скорость изменения толщины оксидной пленки,  $K$  — предэкспонент в законе окисления,  $E$  — энергия активации низкотемпературного окисления,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $\alpha = \text{Nu}/2$  — коэффициент теплообмена,  $\text{Nu}$  — число Нуссельта,  $\tilde{T}$  — температура на границе газовой области. Функция  $h(t)$  описывает зависимость толщины оксидной пленки от времени, и, вообще говоря, проблема окисления (1)–(3) должна ставиться как задача со свободной границей. Однако

толщина оксидной пленки меняется очень слабо в предвоспламенительный период, что позволяет расщепить задачу и считать возможным постановку краевого условия, описывающего окисление на границе частицы.

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{r} = \frac{r}{r_p}, \quad \bar{L} = \frac{L}{r_p}, \quad \bar{T}_i = \frac{T_i}{T_0}, \quad \bar{t} = t \frac{\lambda_2}{\rho_2 c_2 r_p^2} = \frac{t}{t_0},$$

$$t_0 = \frac{\rho_2 c_2 r_p^2}{\lambda_2}, \quad \bar{\alpha} = \frac{r_p}{\lambda_1} \alpha,$$

$$\bar{q}_0 = \frac{q_0 \rho_3 K r_p}{\lambda_1 T_0}, \quad \bar{E} = \frac{E}{R T_0}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

$$\bar{C}_1 = \frac{\lambda_1 \rho_2 c_2}{\lambda_2 \rho_1 c_1}.$$

Значения параметров таковы:  $\rho_1 = 1.29 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = 1740 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_3 = 3600 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_1 = 1000 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ ,  $c_2 = 1100 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ ,  $\lambda_1 = 2.47 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ,  $\lambda_2 = 156 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ ,  $E = 4.3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ ,  $R = 284 \text{ (кг}\cdot\text{К)/Дж}$ ,  $T_0 = 300 \text{ К}$ . В дальнейшем черту над переменными опускаем, но будем считать величины в (1)–(3) безразмерными.

### СТАЦИОНАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Уравнения, которым удовлетворяют температуры твердой частицы и газа, имеют решения вида ( $\nu = 0, 2$ )

$$T_i = -\frac{a_i}{(\nu-1)r^{\nu-1}} + b_i, \quad a_i, b_i = \text{const}, \quad i = 1, 2.$$

Отметим, что случай цилиндрической симметрии рассматривается совершенно аналогично, в качестве базового решения применяется логарифмическая функция. Из условия в точке симметрии следует, что  $T_2 = \text{const}$ . Используя условия сопряжения температур и притока тепла на границе между частицей и газом (3), а также условие теплообмена на внешней границе, находим следующую цепочку представлений:

$$T_2 = -\frac{a_1}{\nu-1} + b_1, \quad a_1 + q_0 \exp\left(-\frac{E}{T_2}\right) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{a_1}{L^\nu} = -\alpha \left( -\frac{a_1}{(\nu-1)L^{\nu-1}} + b_1 - \bar{T} \right).$$

После некоторых преобразований из (4) получаем функцию, описывающую многообразие катастроф/воспламенений в виде

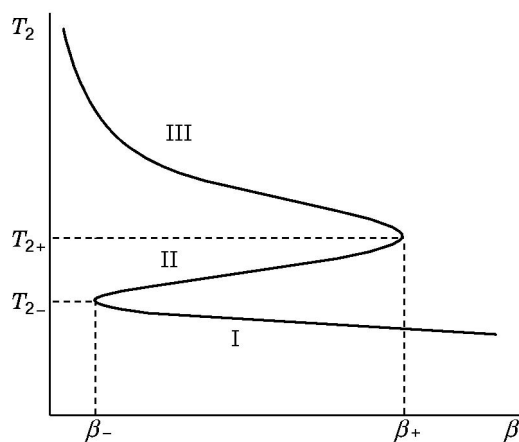


Рис. 1. Многообразие воспламенений

$$\beta = \beta(\alpha, L, q_0, \nu, E, \bar{T}) = \frac{\alpha L^\nu / q_0}{1 + \alpha L / (\nu - 1) - \alpha L^\nu / (\nu - 1)} = \frac{\exp(-E/T_2)}{T_2 - \bar{T}}. \quad (5)$$

Данное выражение определяет температуру частицы, а затем, подставляя эту температуру в (4), найдем из формул (4) коэффициенты  $a_1, b_1$ , т. е. температуру газа в области, окружающей частицу, в виде ( $\nu \neq 1$ )

$$a_1 = -\frac{\alpha L^\nu (T_2 - \bar{T})}{1 - \alpha L / (\nu - 1) + \alpha L^\nu / (\nu - 1)},$$

$$b_1 = T_2 - \frac{\alpha L^\nu (T_2 - \bar{T})}{\nu - 1 - \alpha L (1 - L^{\nu-1})}.$$

Заметим, что выражение (5) отличается от полученного в [1–3] наличием членов, обусловленных присутствием окружающей частицу газовой области. Применяя методы элементарной теории катастроф, можно получить точки разворота многообразия воспламенений из уравнения  $T_2^2 - E T_2 + E \bar{T} = 0$ , которое имеет два корня:

$$T_{2\pm} = \frac{E}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\bar{T}}{E}} \right).$$

Тогда в соответствии с [2, 3] в плоскости ( $\beta, T_2$ ) можно построить данное многообразие, схематический вид которого приведен на рис. 1, где  $\beta_{\pm}$  — значения, вычисленные в точках разворота, т. е. при  $T_2 = T_{2\pm}$ .

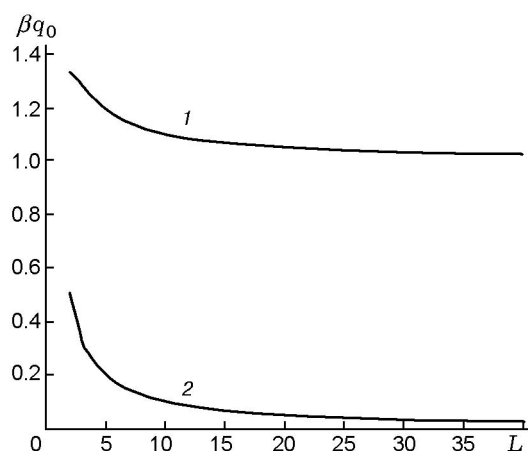


Рис. 2. Зависимость  $\beta q_0$  от  $L$ :  
1 — сферический случай, 2 — плоский

Из рис. 1 видно, что, вообще говоря, стационарное решение неоднозначно. На нижней ветви I при  $\beta \geq \beta_-$  решение  $T_2 \in [T_-, \tilde{T}]$  описывает режим регулярного нагрева. При  $\beta_+ \geq \beta \geq \beta_-$  имеем  $T_2 \in [T_-, T_+]$ , далее мы покажем, что ветвь II является неустойчивой. И наконец, при  $0 \leq \beta \leq \beta_-$  имеем  $T_2 \geq T_-$ , и это решение принадлежит ветви III, попадание на которую соответствует феноменологическому критерию воспламенения. На основе вышеизложенного можно сформулировать

**У т в е р ж д е н и е 1.** Краевая задача (1)–(3) в стационарном приближении имеет регулярное решение при  $\beta \geq \beta_-$ , такое что  $T_2 \in [T_-, \tilde{T}]$ , при  $0 \leq \beta \leq \beta_-$  решение имеет оценку  $T_2 \geq T_-$  и описывает воспламенение.

**З а м е ч а н и е 1.** Величина  $\beta$ , определяющая динамику нагрева частицы (регулярное или с воспламенением), при  $L \rightarrow \infty$  является убывающей функцией, стремящейся к некоторой константе. Это соответствует реально наблюдаемому факту, заключающемуся в том, что добавление в систему дополнительной массы газа повышает порог воспламеняемости образца.

Это положение иллюстрирует рис. 2, где приведена зависимость  $\beta q_0(L)$  при  $Nu = 2$  для сферического и плоского случаев. Можно отметить также, что в сферическом случае порог воспламенения выше, поскольку облегчено выполнение критерия регулярного развития процесса  $0 \leq \beta \leq \beta_-$ . Действительно,  $\beta(\nu = 0) < \beta(\nu = 2)$ .

В дальнейшем понадобятся данные о многообразии воспламенений, которые приведены

Таблица 1  
Зависимость  $\beta(T_2)$  при  $\tilde{T} = 3.74$

I		II		III	
$\beta \cdot 10^5$	$T_2$	$\beta \cdot 10^3$	$T_2$	$\beta \cdot 10^4$	$T_2$
8.91878	3.75639	0.11687	6.18456	28.8194	296.402
4.72750	3.77279	0.50178	8.30125	16.8018	546.402
3.33945	3.78918	1.17876	10.4179	11.8410	796.402
2.65250	3.80557	2.02832	12.5346	9.13924	1046.40
2.24621	3.82197	2.92486	14.6513	7.44060	1296.40
1.98045	3.83836	3.78401	16.7680	6.27416	1546.40
1.79515	3.85476	4.56125	18.8847	5.42376	1796.40
1.66031	3.87115	5.23901	21.0014	4.77631	2046.40
1.55924	3.88754	5.81531	23.1181	4.26693	2296.40
1.48195	3.90394	6.29620	25.2347	3.85570	2546.40
1.42206	3.92033	6.69126	27.3514	3.51677	2796.40
1.37535	3.93672	7.01107	29.4681	3.23260	3046.40
1.33887	3.95312	7.26599	31.5848	2.99091	3296.40
1.31055	3.96951	7.46554	33.7015	2.78285	3546.40
1.28885	3.98591	7.61814	35.8182	2.60185	3796.40
1.27261	4.00230	7.73113	37.9349	2.44296	4046.40
1.26098	4.01869	7.81079	40.0515	2.30235	4296.40
1.25327	4.03509	7.86248	42.1682	2.17705	4546.40
1.24894	4.05148	7.89075	44.2849	2.06468	4796.40
1.24763	4.06787	7.89942	46.4016	1.96335	5046.40

в табл. 1 для трех ее ветвей.

Для сферической частицы выполнены расчеты с различными размерами зоны, занятой газом. Результаты, приведенные на рис. 3, показывают, что основные изменения температуры системы происходят вблизи контактной границы, при  $r < 4$ . В этой области градиенты температуры наиболее велики. При больших размерах области, занятой газом, температура меняется слабо. Это позволяет утверждать, что граница области, занятой газом, может быть принята равной примерно четырем радиусам частицы.

### НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА

После решения нелинейной краевой задачи (1)–(3) в стационарном приближении нами использовалась консервативная разностная схема

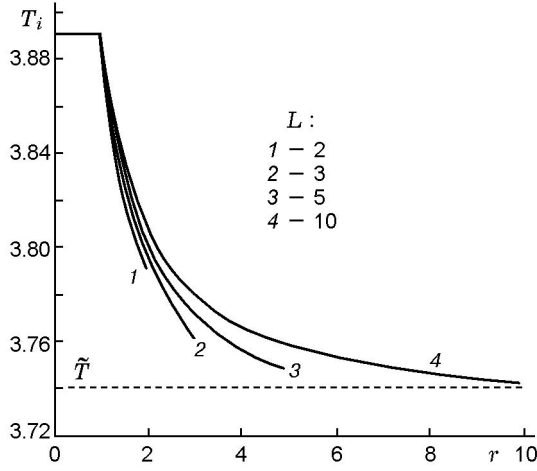


Рис. 3. Распределение температуры в системе «частица — газ» для ветви I многообразия воспламенения при различных значениях  $L$

с весами [4] для анализа системы в нестационарном случае, при этом число точек сетки в областях, занимаемых фазами, равнялось  $N_j$ . Решение полученной системы алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей проведено методом прогонки. Граничные условия в точках  $r = 0$  и  $r = L$  аппроксимируются известными [4] разностными соотношениями. Условия на границе контакта между газом и частицами реализованы следующим образом. На контактной границе условие тепловыделения за счет химической реакции записывалось в виде

$$\lambda \frac{T_{2,N_2}^{n+1} - T_{2,N_2-1}^{n+1}}{\Delta r_{N_2-1}} = \frac{T_{12}^n - T_{11}^n}{\Delta r_1} + q_0 \exp\left(-\frac{E}{T_{2,N_2}^n}\right)$$

(где  $T_{ij}^n$  — значение температуры  $i$ -й фазы  $T_i$  в  $j$ -й точке сетки на  $n$ -м временном слое), а условие идеального теплового контакта — в виде  $\bar{T}_{2,N_2}^{n+1} - \bar{T}_{11}^{n+1} = 0$ , что позволяет полностью определить все прогнанные коэффициенты:

$$a_{2j} = -\sigma(\nu + 1) \frac{\Delta t}{\Delta r_{j-1}} \frac{r_{j-1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}},$$

$$c_{2j} = -\sigma(\nu + 1) \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \frac{r_{j+1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}},$$

$$b_{2j} = 1 + \sigma(\nu + 1) \left( \frac{\Delta t}{\Delta r_{j-1}} \frac{r_{j-1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}} + \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \frac{r_{j+1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}} \right),$$

$$d_{2j} = \left[ (1 - \sigma)(\nu + 1) \frac{\Delta t}{\Delta r_{j-1}} \frac{r_{j-1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}} \right] \times$$

$$\times T_{2,j-1}^n + \left[ 1 - (1 - \sigma)(\nu + 1) \times \right.$$

$$\left. \times \left( \frac{\Delta t}{\Delta r_{j-1}} \frac{r_{j-1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \frac{r_{j+1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}} \right) \right] T_{2j}^n +$$

$$+ \left[ (1 - \sigma)(\nu + 1) \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \frac{r_{j+1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}} \right] T_{2,j+1}^n,$$

$$2 \leq j \leq N_2, \quad a_{1j} = C_1 a_{2j}, \quad c_{1j} = C_1 c_{2j},$$

$$b_{1j} = 1 + \sigma(\nu + 1) C_1 \left( \frac{\Delta t}{\Delta r_{j-1}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{r_{j-1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}} + \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \frac{r_{j+1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}} \right),$$

$$d_{1j} = \left[ (1 - \sigma)(\nu + 1) C_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_{j-1}} \frac{r_{j-1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}} \right] \times$$

$$\times T_{1,j-1}^n + \left[ 1 - (1 - \sigma)(\nu + 1) C_1 \times \right.$$

$$\left. \times \left( \frac{\Delta t}{\Delta r_{j-1}} \frac{r_{j-1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \frac{r_{j+1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}} \right) \right] T_{1j}^n +$$

Таблица 2  
Выход на нижнюю ветвь решения I  
многообразия катастроф

$\beta$	$\nu$	$T_2$
$2.65250 \cdot 10^{-5}$	0	3.80557
	2	3.80607
$1.98045 \cdot 10^{-5}$	0	3.83836
	2	3.83923
$1.55924 \cdot 10^{-5}$	0	3.88754
	2	3.88929

$$+ \left[ (1 - \sigma)(\nu + 1) C_1 \frac{\Delta t}{\Delta r_j} \frac{r_{j+1/2}^\nu}{r_{j+1/2}^{\nu+1} - r_{j-1/2}^{\nu+1}} \right] T_{1,j+1}^n,$$

$$2 \leq j \leq N_1 = 1 + (L - 1)(N_2 - 1),$$

$$a_{21} = 0, \quad b_{21} = 1, \quad c_{21} = -1, \quad d_{21} = 0,$$

$$a_{2,N_2} = -\lambda, \quad b_{2,N_2} = \lambda,$$

$$d_{2,N_2} = T_{12}^n - T_{11}^n + \Delta r_j q_0 \exp\left(-\frac{E}{T_{2,N_2}^n}\right),$$

$$b_{11} = 1, \quad c_{11} = 0, \quad d_{11} = T_{2,N_2}^{n+1},$$

$$a_{1,N_1} = -1, \quad b_{1,N_1} = 1 + \alpha \Delta r_j,$$

$$d_{1,N_1} = \alpha \Delta r_j \tilde{T}, \quad \Delta r_j = r_{j+1} - r_j.$$

Здесь соотношения приведены для общего случая неравномерной сетки, тестовые расчеты проводились на равномерной сетке.

## ТЕСТИРОВАНИЕ

### Ветвь I многообразия катастроф

Пусть  $L = 2$  и  $r_p = 25 \cdot 10^{-6}$  м. В соответствии с данными табл. 1  $\beta_- = 1.24763 \cdot 10^{-5}$ ,  $T_{2-} = 4.06787$ . Примем начальное условие для системы «частица — газ» в виде:  $T_1 = T_2 = 1$  при  $t = 0$ . Тогда в соответствии с изложенным выше при  $\beta > \beta_-$  и  $t \rightarrow \infty$  имеем выход на стационарный режим, определяемый ветвью I многообразия катастроф (см. рис. 3). Полученные предельные значения температуры частицы при различных значениях  $\beta$  приведены

в табл. 2. В данном случае расчеты в нестационарной постановке хорошо согласуются со стационарным приближением (см. табл. 1, 2).

Если  $\beta > \beta_-$ , но в начальный момент времени температура системы лежит между двумя предельными значениями  $T_{2-} < T_i(t = 0) < T_{2+}$ , частица также не воспламеняется, а имеет место выход сверху на ветвь погасания I.

### Ветвь III многообразия катастроф

При  $\beta = 2.46701 \cdot 10^{-6} < \beta_-$  и начальном значении температуры  $T_{20}$ , меньшем температуры на ветви III, происходит выход на участок диаграммы III (воспламенение). При этом время задержки воспламенения  $t_{ign} = 0.325$  с для  $\nu = 0$ ,  $t_{ign} = 4.17 \cdot 10^{-2}$  с для  $\nu = 2$ . При  $\beta_- < \beta < \beta_+$ ,  $T_{20} > T_2$  (II) решение нестационарной задачи также выходит на ветвь воспламенения.

Критерий воспламенения, в соответствии с известными воззрениями [2], определялся, во-первых, как момент времени, при котором температура частицы нарастает катастрофически (на порядки), т. е.  $T \rightarrow \infty$ ; во-вторых, как второй момент времени обращения в нуль второй производной по времени от температуры. В проведенных расчетах эти времена, естественно, практически не отличаются.

## ОБСУЖДЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

### Влияние размера области, занятой газом, и скорости роста пленки на динамику нагрева

Представляется интересным провести сопоставление данных по времени задержки воспламенения системы «частица — газ», полученных в рамках точечной и распределенной математической модели с учетом наличия газовой области вблизи частицы, а также при возрастании коэффициента теплообмена. Результаты расчетов для сопряженной математической модели и модели [2] приведены в табл. 3. Как видно, время задержки воспламенения при учете газовой пленки растет, что представляется разумным в силу замечания 1. С ростом коэффициента теплообмена это время за счет обдувающего потока, естественно, уменьшается.

Табл. 4 иллюстрирует влияние коэффициента, определяющего скорость роста оксидной

Таблица 3  
Зависимость  $t_{ign}(\text{Nu})$  при  $r_p = 17$  мкм,  
 $L = 2, \nu = 2, \tilde{T} = 5.127, K = 1$

Сопряженная модель			Модель [2]		
Nu	$t_{ign}, \text{мс}$	$\beta \cdot 10^6$	Nu	$t_{ign}, \text{мс}$	$\beta \cdot 10^5$
5	7.31	4.12	5	5.8	7.64
20	6.59	4.71	20	2.6	30.5
40	6.45	4.82	40	2	61.15
60	6.42	4.86	60	2.6	91.7
70	6.42	4.87	70	4	107.0
200	6.38	4.92	200	—	305

Таблица 4  
Зависимость  $t_{ign}(\text{Nu})$  при  $r_p = 17$  мкм,  
 $L = 2, \nu = 2, \tilde{T} = 5.127, K = 0.103$

Nu	$t_{ign}, \text{мс}$	$\beta \cdot 10^5$
5	13.69	3.99
20	12.66	4.57
40	12.48	4.68
60	12.41	4.72
70	12.41	4.73
200	12.34	4.77

пленки. Очевидно, с его уменьшением время задержки увеличивается.

Приведенные данные получены при расчете по чисто неявной схеме (вес  $\sigma = 1$ ). Для контроля проведены аналогичные расчеты по двухслойной схеме с весом  $\sigma = 0.75$ , а также на последовательностях сгущающихся сеток. Установлено, что результаты практически совпадают при  $N_2 = 101, 201, 401$ : различие в предельной температуре и времени задержки воспламенения составляет  $\approx 1\%$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Как следует из граничного условия при  $r = L$ , если  $\text{Nu} \rightarrow \infty$ , то  $T_1|_{r=L} \rightarrow \tilde{T}$ , что и наблюдалось в тестовых расчетах. Так, при  $\text{Nu} = 2, \tilde{T} = 3.74$  в результате расчета получаем  $T_1|_{r=L} = 3.81$ , а при  $\text{Nu} = 2000 — T_1|_{r=L} = 3.7401$ . Это также является дополнительным тестом использованной математической технологии решения задачи воспламенения в сопряженной постановке.

### Устойчивость решения задачи (1)–(3)

**Ветвь I.** Исследовалось влияние инфинитезимальных и конечных возмущений на устойчивость решения задачи (1)–(3), принадлежащего стационарной ветви I. Оказалось, что при возмущении неоднородного решения, в котором в начальный момент времени распределение температуры системы «частица — газ» имеет вид

$$T|_{t=0} = T_i(r) + \delta \sin(\omega r), \quad (6)$$

где  $T_2 = T_2^0 \in I, 0 \leq r \leq 1$  и  $T_1 = T_1^0(r) = -a_1/(\nu - 1)r^{\nu-1} + b_1, 1 \leq r \leq L$ , численное решение совпадает с неоднородным распределением температуры для всех моментов времени при невозмущенных начальных условиях

( $\delta = 0$ ). При амплитуде возмущений, отличной от нуля, возмущения также не развиваются для всех как инфинитезимальных, так и конечных амплитуд возмущений и частот. Тем самым решение для нижней ветви I является устойчивым.

**Ветвь II.** Возьмем близкие значения  $\beta$  и соответствующие им значения температур для ветвей I (устойчивая ветвь многообразия воспламенений) и II (неустойчивая ветвь многообразия воспламенений). А именно: для ветви I  $\beta_1 = 1.45614 \cdot 10^{-5}, T_2^0 = 3.91050$ , для ветви II  $\beta_2 = 1.45753 \cdot 10^{-5}, T_2^0 = 4.32188$ . Расчеты при  $\beta = \beta_1$  с невозмущенными начальными условиями ( $\delta = 0$ ) показывают, что при изменении начальной температуры частицы в интервале  $1 \leq T_{20} \leq 4.32075$  происходит выход с таких начальных данных на устойчивую ветвь I. При начальной температуре частицы, меньшей значений на промежуточной ветви II, но большей значений на ветви I, вышеуказанный процесс перехода физически мы интерпретировали как погасание.

При дальнейшем увеличении начальной температуры наблюдается уход нестационарного решения на ветвь III (здесь влияние погрешности расчета может проявляться лишь при температуре срыва). Это означает, что верхней границей выхода на режим погасания является значение температуры, близкое к 4.32075, так как после него осуществляется выход на режим воспламенения.

Дальнейшие расчеты показали, что если в качестве начальных данных для температуры частицы взять значение  $T_2 = 4.32075$  (температура выхода на устойчивый режим погасания) и использовать возмущение вида (6) с амплитудой  $\delta = 0.1 \div 0.3$  и частотой  $\omega \leq 17.4$ , то про-

исходит выход на стационарное значение температуры  $T_2 = 3.91050$ , принадлежащее нижней ветви многообразия воспламенений. При дальнейшем увеличении частоты  $\omega$  происходит срыв на ветвь III. То есть за счет возмущений температуры вблизи неустойчивой ветви II с частотой, большей некоторого предельного значения, можно осуществить переход к воспламенительному режиму, даже если базовая температура частицы ниже предела воспламенения.

### Линейное приближение

Будем искать решение задачи (1)–(3) в виде  $T(x, t) = T_i(x) + T_i'(x, t)$ , где величины, отмеченные штрихом, являются малыми, а первое слагаемое представляет собой какое-либо из стационарных решений данной задачи. Используя это представление в краевой задаче и пренебрегая величинами более высокого порядка малости, найдем, что в этом случае уравнения теплопроводности для «штрихованных» величин остаются прежними. Меняется только вид двух краевых условий:  $\lambda \frac{\partial T_1'}{\partial r} = -\alpha T_1'$  при  $r = L$  (что соответствует  $\dot{T}' = 0$ ) и  $\lambda \frac{\partial T_2'}{\partial r} = \frac{\partial T_1'}{\partial r} + q_0 \exp\left(-\frac{E}{T_2}\right) \frac{E}{T_2^2} T_2'$  при  $r = 1$ .

Расчеты, проведенные в этом случае для линеаризованного варианта задачи (1)–(3), показывают, что на нижней ветви при  $\beta_1 = 1.45614 \cdot 10^{-5}$  и  $T_2 = 3.91050$  решение линейной задачи как с нулевыми начальными данными, так и с возмущенными при  $t \rightarrow \infty$  является нулевым. Тем самым показана устойчивость данной ветви решения.

При  $\beta_2 = 1.45753 \cdot 10^{-5}$ ,  $T_2 = 4.32075 \in \Pi$  решение линейной контактной краевой задачи воспламенения при любых инфинитезимальных возмущениях температуры ( $\delta = 0.0001, 0.001, \dots, 0.1$ ) численно воспроизвести невозможно. Решение за конечное время разрушается из-за неустойчивости процесса, так как расчет становится невозможным ввиду переполнения разрядной сетки. В этом случае, т. е. в рамках линейного приближения, выход на ветвь воспламенения не происходит.

### ВЫВОДЫ

Для описания тепловой истории частицы магния в газовой среде предложена распределенная математическая модель, учитывающая гетерогенную химическую реакцию и область теплового влияния частицы на газ.

Показана разрешимость задачи в стационарном случае, что позволило расширить классификацию регулярных режимов, а также режимов погасания и воспламенения частицы на данную контактную математическую модель воспламенения.

Разработана математическая технология решения рассмотренного класса краевых задач воспламенения частиц магния, и на ее основе верифицирована математическая модель по зависимости времени задержки воспламенения от числа Нуссельта. Выявлен предельный размер газового слоя вблизи частицы, определяющего режим воспламенения.

Показана устойчивость некоторых режимов нагрева относительно конечных и инфинитезимальных возмущений, возможность управления процессом воспламенения с помощью высокочастотного теплового воздействия на неустойчивые состояния системы «частица — газ».

### ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров А. В., Фомин В. М., Гостев Ю. А. Теоретическое описание воспламенения реагирующих газовзвесей. Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 2003.
2. Федоров А. В. Физико-математическое моделирование воспламенения мелких частиц магния. Новосибирск, 1994. (Препр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики; № 12–94).
3. Федоров А. В. Численно-аналитическое исследование воспламенения частиц магния // Физика горения и взрыва. 1996. Т. 32, № 1. С. 75–84.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 12/V 2005 г.