

3. Виленская Г. Г., Имшенник В. С., Медведев Ю. А., Степанов Б. М., Феоктистов Л. П. Электромагнитное поле, возбуждаемое в воздухе нестационарным источником гамма-излучения, находящимся на идеально проводящей плоскости.— ПМТФ, 1975, № 3, с. 18—26.
4. Gilinsky V., Peebles G. The development of a radio signal from a nuclear explosion in the atmosphere.— «J. Geoph. Res.», 1968, vol. 137, N 1, p. 405—414.
5. Jöhler J. R., Morgenstern J. C. Propagation of the ground wave electromagnetic signal with particular reference to a pulse of nuclear explosion.— «Proc. IEEE», 1965, vol. 53, N 12, p. 2048.
6. Медведев Ю. А., Федорович Г. В., Степанов Б. М. Радиоизлучение, сопровождающее возмущение геомагнитного поля нестационарным источником гамма-излучения.— «Геомагнетизм и аэронавтика», 1972, № 2, с. 191—195.
7. Brode H. L. Gas dynamic motion with radiation.— «Astronautica Acta», 1969, vol. 14, p. 433.
8. Karzas W. J., Latter R. The electromagnetic signal due to the interaction of nuclear explosion with earth's magnetic field.— «J. Geoph. Res.», 1962, vol. 67, N 12, p. 4635.
9. Райзер Ю. П. О торможении и превращении энергии плазмы, расширяющейся в пустом пространстве, в котором имеется магнитное поле.— ПМТФ, 1963, № 6, с. 19.
10. Ландау Л. Д., Lifшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
11. Федорович Г. В. Диамагнетизм проводников, движущихся в магнитном поле.— ПМТФ, 1969, № 2, с. 56.

УДК 536.46

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАЖИГАНИЯ ГАЗА НАКАЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Задача о поджигании однородной горючей смеси является классической задачей теории горения. Наряду с практическим значением ее анализ дает возможность на примере одной из простейших задач нестационарного горения разрабатывать приближенные аналитические и численные методы решения. В работе [1] впервые рассмотрена задача о зажигании конденсированной среды. В ряде работ (например, [2, 3], обзор [4]) численно рассмотрено зажигание газа.

В последнее время предпринимаются попытки построения приближенных аналитических решений задач о поджигании на основе метода срачиваемых асимптотических разложений. В работах [5, 6] с помощью этих методов проведен анализ зажигания конденсированной фазы световым потоком. Зажигание конденсированной фазы накаленной поверхностью исследовалось в [7] и одним из авторов*.

1. Постановка задачи. Одномерная задача зажигания газа плоской накаленной поверхностью, поддерживаемой при постоянной температуре, при ряде упрощающих предположений может быть описана следующей системой уравнений, граничных и начальных условий:

$$(1.1) \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - mc \frac{\partial T}{\partial z} + Qk\rho^n (1-y)^n e^{-E/RT};$$

* Берман В. С. Некоторые вопросы теории распространения зоны с экзотермическими химическими реакциями в газовой и конденсированной средах. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. ИИМ АН СССР, М., 1974.

$$(1.2) \quad \rho \frac{\partial y}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \rho \frac{\partial y}{\partial z} \right) - m \frac{\partial y}{\partial z} + k \rho^n (1-y)^n e^{-E/RT};$$

$$(1.3) \quad \partial \rho / \partial t' + \partial m / \partial z = 0;$$

$$(1.4) \quad z = 0, \quad T = T_w, \quad \partial y / \partial z = 0 \quad (m(z=0, t') = 0);$$

$$(1.5) \quad z = \infty, \quad T = T_-, \quad y = 0;$$

$$(1.6) \quad t' = 0, \quad T = T_-, \quad y = 0,$$

где T — температура; y — концентрация продукта реакции; $\rho(T)$ — плотность; λ — теплопроводность; c — теплоемкость; z — пространственная координата; t' — время; Q — тепловой эффект реакции; k — предэкспоненциальный множитель; E — энергия активации; n — порядок реакции; R — газовая постоянная; D — коэффициент диффузии; m — массовая скорость движения газа; T_w и T_- — соответственно температура стенки и начальная температура газа. При формулировке задачи принято, что давление сохраняет постоянное значение; это соответствует численным оценкам [2]. Перейдем от переменных t' , z и t' , ψ по формулам

$$m = -\partial \psi / \partial t', \quad \rho = \partial \psi / \partial z, \quad \psi(z=0, t') = 0.$$

Тогда из (1.1)–(1.3) получаем

$$(1.7) \quad c \frac{\partial T}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\lambda \rho \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + Q k \rho^{n-1} (1-y)^n e^{-E/RT};$$

$$(1.8) \quad \frac{\partial y}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(D \rho^2 \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + k \rho^{n-1} (1-y)^n e^{-E/RT}.$$

Для простоты полагаем, что

$$\lambda \rho = \text{const}, \quad c = \text{const}, \quad D \rho^2 = \text{const}.$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$X = \psi / \Delta x; \quad t = t' / \Delta t, \quad \Delta t = \frac{\beta \gamma}{\rho_w^{n-1} k e^{-E/\beta}},$$

$$(\Delta x)^2 = \lambda \Delta t / \rho_w c, \quad \gamma \sim O(1),$$

$$L = \lambda / D \rho c, \quad \gamma = c(T_w - T_-) / Q, \quad \sigma = T_- / T_w - T_-,$$

$$\Theta = (T - T_-) / (T_w - T_-), \quad \Gamma(\Theta) = (\rho / \rho_w)^{n-1}, \quad \beta = E / RT_w.$$

Вместо (1.7), (1.8), (1.4)–(1.6) можно записать

$$(1.9) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \beta (1-y)^n \Gamma(\Theta) e^{\frac{\beta(\Theta-1)}{\Theta+\sigma}};$$

$$(1.10) \quad \frac{\partial y}{\partial t} = L^{-1} \frac{\partial^2 y}{\partial X^2} + \beta \gamma (1-y)^n \Gamma(\Theta) e^{\frac{\beta(\Theta-1)}{\Theta+\sigma}};$$

$$(1.11) \quad X = 0, \quad \Theta = 1, \quad \partial y / \partial X = 0;$$

$$(1.12) \quad X = \infty, \quad \Theta = 0, \quad y = 0;$$

$$(1.13) \quad t = 0, \quad \Theta = 0, \quad y = 0.$$

Найдем асимптотическое решение задачи, соответствующее начальной стадии процесса, предполагая, что $\beta \gg 1$; $L, \gamma, n, \sigma, \Gamma, d\Gamma/d\Theta \sim 1$.

2. Решение задачи. Представим решение $\Theta(X, t)$ в виде суммы

$$\Theta(X, t) = \Theta_i(X, t) + u(X, t), \quad \Theta_i = \text{erfc}(X/2\sqrt{t}),$$

где Θ_i — решение задачи

$$\partial \Theta_i / \partial t = \partial^2 \Theta_i / \partial X^2, \quad \Theta_i(0, t) = 1, \quad \Theta_i(\infty, t) = \Theta_i(X, 0) = 0.$$

Тогда задача (1.9)–(1.13) принимает вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \beta(1-y)^n \Gamma(\Theta) \exp\left(\frac{\beta(\Theta_i + u - 1)}{(\Theta_i + u + \sigma)}\right);$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial y}{\partial t} = L^{-1} \frac{\partial^2 y}{\partial X^2} + \beta(1-y)^n \Gamma(\Theta) \exp\left(\frac{\beta(\Theta_i + u - 1)}{\Theta_i + u + \sigma}\right);$$

$$(2.3) \quad u(0, t) = (\partial y / \partial X)(0, t) = y(\infty, t) = u(\infty, t) = 0, \\ u(X, 0) = y(X, 0) = 0.$$

Выделим две пространственные области: внутреннюю, прилегающую к точке $X = 0$, где введем переменную $x = X/\beta$, и оставшуюся часть — внешнюю область. Во внешней области член, описывающий химическую реакцию, экспоненциально мал.

Во внутренней области уравнения (2.1), (2.2) принимают вид

$$(2.4) \quad \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta} (1-y)^n \Gamma \exp\left(\frac{\beta(u - x/\beta \sqrt{\pi t})}{1 + \sigma}\right) + o\left(\frac{1}{\beta}\right);$$

$$(2.5) \quad \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial y}{\partial t} = L^{-1} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta} (1-y)^n \Gamma \exp\left(\frac{\beta(u - x/\beta \sqrt{\pi t})}{1 + \sigma}\right) + o\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

Решение задачи строится в каждой из областей в виде асимптотических разложений, согласующихся с начальными условиями и удовлетворяющих во внутренней области условиям при $X = 0$, а во внешней области — при $X = \infty$.

Внутреннее и внешнее разложения должны удовлетворять условиям сращивания [8, 9]. Анализ различных форм разложений показывает, что во внутренней и внешней областях решения следует искать в виде

$$(2.6) \quad u = u_1(x, t)/\beta + u_2(x, t)/\beta^2 + \dots;$$

$$y = y_0(x, t) + y_1(x, t)/\beta + \dots;$$

$$(2.7) \quad u = U_1(X, t)/\beta + U_2(X, t)/\beta^2 + \dots;$$

$$y = Y_0(X, t) + Y_1(X, t)/\beta + \dots$$

Подставляя (2.6) в (2.4), (2.5), с учетом (2.3) имеем

$$(2.8) \quad \partial^2 u_1 / \partial x^2 + (1 - y_0)^n \exp((u_1 - x/\sqrt{\pi t})/(1 + \sigma)) = 0,$$

$$u_1(0, t) = u_1(x, 0) = 0;$$

$$(2.9) \quad \partial^2 y_0 / \partial x^2 = 0, \quad (\partial y_0 / \partial x)(0, t) = 0;$$

$$(2.10) \quad L^{-1} \partial^2 y_1 / \partial x^2 + \gamma(1 - y_0)^n \exp((u_1 - x/\sqrt{\pi t})/(1 + \sigma)) = 0,$$

$$(\partial y_1 / \partial x)(0, t) = 0.$$

Из (2.9) следует $y_0 = y_0(t)$, тогда общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$(2.11) \quad u_1(x, t) = x/\sqrt{\pi t} + (1 + \sigma)[-n \ln(1 - y_0) + \ln C_2 - \\ - 2 \ln \operatorname{ch}(C_1 + x/\sqrt{C_2/2(1 + \sigma)})].$$

Здесь $C_1 = C_1(t)$ и $C_2 = C_2(t)$ — некоторые функции от t . Из граничного условия при $x = 0$ найдем

$$(2.12) \quad C_2/(1 - y_0)^n = \operatorname{ch}^2 C_1,$$

$$C_1 = \ln[\sqrt{C_2/(1 - y_0)^n} \pm \sqrt{[C_2/(1 - y_0)^n] - 1}].$$

Для сращивания главных членов (2.6), (2.7) получим из (2.11) асимптотическое выражение u_1 при $x \rightarrow \infty$

$$(2.13) \quad u_1(x \rightarrow \infty, t) = x(1/\sqrt{\pi t} - \sqrt{2(1+\sigma)C_2}) + (1+\sigma) \times \\ \times [-n \ln(1-y_0) + \ln C_2 + 2C_1 + \ln 4] + o(1) = X\beta(1/\sqrt{\pi t} - \\ - \sqrt{2(1+\sigma)C_2}) + (1+\sigma)[-n \ln(1-y_0) + \ln C_2 + 2C_1 + \ln 4] + o(1).$$

Сравнивая (2.13) с соответствующими разложениями (2.7), получаем

$$(2.14) \quad C_2 = \tau_0/t; \quad \tau_0 = (1/2)\pi(1+\sigma), \\ U_1(0, t) = f(t) = (1/2\pi\tau_0)[-n \ln(1-y_0) + \ln C_2 - 2C_1 + \ln 4].$$

Формулы (2.14) определяют вид функции (2.11) и граничного условия для $U_1(X, t)$. Для того, чтобы удовлетворить начальному условию (2.8), необходимо выбрать в (2.12) знак плюс. Решения во внешней области должны удовлетворять уравнениям и граничным условиям

$$\partial U_1/\partial t = \partial^2 U_1/\partial X^2, \\ U_1(X \rightarrow 0, t) = f(t), \quad U_1(\infty, t) = U_1(X, 0) = 0; \\ \partial Y_0/\partial t = (\partial^2 Y_0/\partial X^2)L^{-1}, \\ Y_0(X \rightarrow 0, t) = y_0(t), \quad Y_0(\infty, t) = Y_0(X, 0) = 0,$$

откуда

$$U_1(X, t) = \frac{X}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t f(t') \frac{\exp[-X^2/4(t-t')]}{(t-t')^{3/2}} dt'; \\ Y_0(X, t) = \frac{XL^{1/2}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t y_0(t') \frac{\exp[-X^2L/4(t-t')]}{(t-t')^{3/2}} dt'.$$

При $X \rightarrow 0$ из (2.15) имеем

$$(2.16) \quad Y_0(X \rightarrow 0, t) = y_0(t) - \frac{X\sqrt{L}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{y_0'(t')}{\sqrt{t-t'}} dt' = \\ = y_0(t) - \frac{x}{\beta} \sqrt{\frac{L}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{y_0(t')}{\sqrt{t-t'}} dt'.$$

Формула (2.16) представляет Y_0 в виде, удобном для сращивания с $y_1(x, t)$. Интегрируя (2.10), можно получить

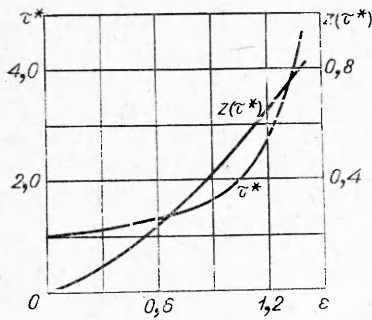
$$(2.17) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = L\gamma \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{\sqrt{\pi\tau_0}} \operatorname{th} C_1 \right].$$

Из (2.17) при $x \rightarrow \infty$ и (2.16), воспользовавшись условием сращивания, получаем интегральное уравнение для $y_0(t)$

$$(2.18) \quad \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{y_0(t')}{\sqrt{t-t'}} dt' = \gamma\sqrt{L} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} \sqrt{\frac{\tau_0}{t} - (1-y_0)^n} \right].$$

Введем новую переменную $\tau = t/\tau_0$ и $y_0(t) = z(\tau)$, тогда вместо (2.18) можно записать

$$(2.19) \quad \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{z(\tau') d\tau'}{\sqrt{\tau-\tau'}} = (\gamma\sqrt{L}) \left[\frac{1}{\sqrt{\tau}} - \sqrt{\frac{1}{\tau} - (1-z)^n} \right].$$



Уравнение (2.18) применимо в интервале времен $0 \leq t \leq t^*$ ($y_0(t^*) = 1 - (\tau_0/t^*)^{1/n}$).

Определим зависимость потока тепла в накалившую стенку от времени

$$(2.20) \quad \partial\Theta/\partial X|_{X=0} = \beta\partial\Theta/\partial x = \\ = -\sqrt{C_2/\pi\tau_0} \cdot \text{th}(C_1) + o(1).$$

Принимая за момент зажигания момент обращения потока тепла в стенку в нуль, имеем из (2.20), что это время равно t^* .

Отметим, что время зажигания t^* , являющееся функцией параметров τ_0 , γ ,

L , n и β , можно в этом приближении выразить в виде функции только от двух переменных

$$t^*/\tau_0 = F(\varepsilon, n); \quad \varepsilon = \gamma\sqrt{L}, \quad \tau_0 = 1/2\pi(1 + \sigma).$$

Уравнение (2.19) справедливо при больших, но конечных β , если $\varepsilon = o(1)$ и $t^*/\tau_0\beta \ll 1$. Уравнение (2.19), записанное в виде

$$(2.21) \quad \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \frac{z(x) dx}{\sqrt{\tau-x}} = \varepsilon \frac{F(\tau, z(\tau))}{\sqrt{\tau}},$$

решалось численно.

Выражая из (2.21) $z(\tau)$, имеем

$$z(\tau) = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^1 \frac{F(\tau x, z(\tau x))}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

Вводя $\tau_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$, имеем

$$z(\tau_k) = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^1 \frac{F(\tau_k x, z(\tau_k x))}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

Экстраполирование между узлами τ_{k-1} и τ_k проводилось по двум предыдущим точкам τ_{k-1} и τ_{k-2} . На фигуре приведено численное решение (2.19) при $n = 1$. В качестве примера рассмотрим случай протекания реакции нулевого порядка. Скорость химической реакции равна $k \exp(-E/RT)$ при $0 \leq y \leq 1$ и обращается в нуль при $y > 1$. Решение (2.19) имеет вид

$$z(\tau) = \varepsilon[1 - (2/\pi)E(\sqrt{\tau})],$$

где $E(x)$ — полный эллиптический интеграл. При $0 < \varepsilon \leq \pi/(\pi - 2) = 2,752$ время зажигания $\tau^* = 1$ и $z(\tau^*) = \varepsilon[(\pi - 2)/\pi]$. При $\varepsilon < 2,752$ химическая реакция прекращается в момент времени $\tau = \tau^+$ ($z(\tau^+) = 1$), где τ^+ — корень уравнения $1 = \varepsilon[1 - (2/\pi)E(\sqrt{\tau^+})]$.

Поступила 26 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории зажигания. — «Докл. АН СССР», 1963, т. 150, № 2.
2. Шкадинский К. Г., Барзыкин В. В. Закономерности зажигания газов накаленной поверхностью с учетом диффузии и гидродинамики. — ФГВ, 1968, № 2.
3. Мержанов А. Г., Хайкин Б. И., Шкадинский К. Г. Установление стационарного распространения пламени при зажигании газа накаленной поверхностью. — ПМТФ, 1969, № 5.
4. Мержанов А. Г., Аверсон А. Э. Современное состояние тепловой теории зажигания. Препринт ИХФ АН СССР, М., 1970.
5. Linian A., Williams F. A. Theory of ignition of a reaction solid by constant energy flux combustion. — «Sci. and Techn.», 1971, vol. 3, p. 91.
6. Linian A., Williams F. A. Radiant ignition of a reactive solid with in-depth absorption. — «Combustion and Flame», 1972, vol. 18, p. 85.
7. Виллюнов В. Н., Гольдман Р. С. О применении метода сращиваемых асимптотических разложений к одной задаче зажигания. — В кн.: Материалы IV конференции по математике и механике. Томск, изд. Томск. ун-та, 1974.
8. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1960.
9. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1971.

УДК 533.6.011

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ
ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ПОВЕРХНОСТИ
НА ТЕЧЕНИЕ В ДОННОЙ ОБЛАСТИ ТЕЛА
КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ**

А. В. Бабаков, Л. И. Северинов

(Москва)

Результаты данной работы получены с помощью метода «потоков» [1], обладающего свойствами консервативности по массе, импульсу и полной энергии. Характерная особенность метода — несимметричная аппроксимация конвективных членов.

Принято, что газ является ньютоновским, совершенным, имеет постоянные удельные теплоемкости, коэффициент вязкости μ зависит от температуры по закону $\mu \sim T^\omega$ ($\omega = \text{const}$), число Прандтля Pr постоянно. Кроме того, выполнено предположение Стокса о равенстве давления и среднего арифметического трех главных напряжений с обратным знаком. Расчеты проведены в следующей системе координат: ось x направлена по поверхности сферы, ось y — по местной нормали к ней, начало помещено в переднюю критическую точку. Введем следующие обозначения: u, v — составляющие скорости по x и y ; p, ρ, T — давление, плотность и температура соответственно; γ — отношение удельных теплоемкостей. Безразмерные u, v, p, ρ, T, μ получены посредством деления размерных переменных на $V_\infty, V_\infty, \rho_\infty V_\infty^2, \rho_\infty, T_\infty, \mu_\infty$, где V_∞ — модуль вектора скорости в невозмущенном потоке. Линейные размеры отнесены к радиусу обтекаемой сферы R .

Результаты численного исследования получены при следующих значениях определяющих параметров: $M_\infty = 20, Pr = 0,72, Re_\infty = \rho_\infty V_\infty R / \mu_\infty = 1500, \gamma = 1,4, \omega = 0,5$. В качестве параметра, характеризующего температуру поверхности, взята величина $k = T_w / T_0$, где T_w — температура поверхности; T_0 — температура адиабатически заторможенного газа.