9. **Бичепков Е. И., Войтенко А. Е.** Автомодельный электрический скиновый взрыв проводника // ПМТФ.— 1969.— № 3.

г. Москва *Поступила 20/XII 1990 г., в окончательном варианте — 5/VI 1991 г.*

УДК 532.529

А. В. Федоров, Н. Н. Федорова

СТРУКТУРА, РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В СМЕСИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ (ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Вопросы математического моделирования поведения смесей различных материалов при высоких давлениях возникают при расчете действия на гетерогенные материалы, пористые среды и т. д. продуктов взрыва высокоэнергетических ВВ.

Для описания такого рода явлений в гидродинамическом приближении механики гетерогенных сред в [1, 2] предложены соответствующие математические модели в двухдавленческом приближении. В случае неравенства давлений фаз необходимо некоторое замыкающее соотношение, каким может служить условие пропорциональности давлений $p_1 = kp_2$, $k = \mathrm{const}$ (в том числе и $k = 1$). Отличный от упомянутого способ замыкания модели по давлениям предложен в [3]. Он основан па постулировании уравнения m_2-переноса для объемной концентрации второй фазы с источниковым членом. В [4] приводится выражение источникового члена в уравнении m_2-переноса, дается замыкание модели для двух твердых тел.

Согласно предложенной математической модели, для однодавленческой смеси в [1] приводится расчет структуры замороженной ударной волны (УВ) в насыщенной пористой среде (вода и песок). Вопросы существования и единственности решения подробно не обсуждаются. В [5] дан обзор работ по структурам УВ в смесях двух твердых материалов в двухскоростном однодавленческом баротропном приближении. В [6] на основе качественных рассуждений для такого течения показано существование четырех типов УВ. В [7] изучены вопросы существования и единственности решений типа бегущих волн для смеси газов Клапейрона в двухскоростном двухтемпературном приближении, в [8] аналогичные вопросы рассмотрены в односкоростном двухдавленческом баротропном течении газожидкостной смеси.

Представляется интересным исследование структуры УВ в смеси двух твердых тел в гидродинамическом приближении с учетом разницы в скоростях и давлениях фаз, а также образования УВ различных типов из начальных данных ступенчатого вида и отражения УВ от жесткой стенки.

1. Стационарное течение. Уравнения [9], описывающие течения типа бегущей волны в сопутствующей системе координат, имеют вид

$$
\begin{gathered}
\rho_i u_i = c_i, \quad i = 1, 2, \quad p + c_1 u_1 + c_2 u_2 = c_3, \\
p_i = a_i^2 (\rho_i / m_i - \rho_{ii,0}), \quad i = 1, 2, \quad p = m_1 p_1 + m_2 p_2, \\
c_2 \dot{u}_2 + m_2 \dot{p}_2 + (p_2 - p_1) \dot{m}_2 = -R, \\
R = -\frac{\rho_2 c_D}{\tau_{\text{ст}}} \frac{\mathrm{Re}}{24} m_1 (u_1 - u_2), \quad \dot{m}_2 = -\varkappa = -\frac{(p_1 - p_2)}{\mu_2 u_2}.
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Здесь $\rho_i = m_i \rho_{ii}$ — средняя плотность; m_i, ρ_{ii} — объемная концентрация и истинная плотность; p_i — парциальные давления; u_i — скорости фаз; нулем отмечено начальное состояние; c_i — значения соответствующих расходов в начальной точке; R — сила межфазного взаимодействия: c_D — коэффициент сопротивления; Re — число Рейнольдса; $\tau_{\text{ст}}$ — время стоксовой релаксации скоростей. Система (1.1) должна удовлетворять краевым условиям стационарности на $\pm\infty$ для вектора решения $\Phi = \Phi(\rho_1, \rho_2, u_1, u_2, m_2)$:

(1.2) $$\Phi \to \Phi_{0,\text{к}},\ \dot{\Phi} \to 0 \text{ при } x \to \pm\infty.$$

Тогда задача о распространении стационарной УВ в смеси двух твердых материалов сводится к решению краевой задачи (1.1), (1.2) в области $(-\infty, +\infty)$.

В смеси протекают два релаксационных процесса: выравнивание скоростей компонент с характерным масштабом по времени $\tau_{\text{ст}}$ и изменение объемной концентрации частиц металла, вызванное различием давлений фаз с масштабом $\tau_{m2} = 2r\rho_{22,0}a_2/(\rho_{11,0}a_1^2)$ (r — радиус частицы, для вязкости второй фазы принята оценка $\mu_2 = 2\rho_{22}a_2r$). Можно определить также характерное время распространения возмущений в смеси $\tau_{\text{г}} = x_0/a_2$ (x_0 — характерная длина).

Течение смеси, в котором $\tau_{\text{ст}}/\tau_{\text{г}} \ll 1$, $\tau_{m2}/\tau_{\text{г}} \ll 1$, будем называть полностью равновесным или равновесным, $\tau_{\text{ст}}/\tau_{\text{г}} \ll 1$, $\tau_{m2}/\tau_{\text{г}} \sim 1$ — равновесно-замороженным, $\tau_{\text{ст}}/\tau_{\text{г}} \sim 1$, $\tau_{m2}/\tau_{\text{г}} \ll 1$ — замороженно-равновесным, $\tau_{\text{ст}}/\tau_{\text{г}} \gg 1$, $\tau_{m2}/\tau_{\text{г}} \gg 1$ — замороженным.

Первый тип движения характерен равенством скоростей и давлений фаз, второй — равенством скоростей, но различными давлениями [9], третий — различными скоростями и равными давлениями фаз, четвертый — различными скоростями и давлениями. Определим далее полностью равновесную скорость звука $c_e^2 = dp/d\rho$, где $p = p_1(\rho_1, m_2^e(\rho)) \equiv p_2(\rho_2, m_2^e(\rho))$, $\rho_1 = (1-\alpha)\rho$, $\rho_2 = \alpha\rho$, $\alpha = \rho_{20}/\rho_0$.

Нетрудно получить, что

$$c_e^2 = c_{ef}^2 + (S_1 + p_2 - p_1)\, dm_2^e/d\rho.$$

Здесь $dm_2^e/d\rho = R_1/P_1$; $S_1 = m_2\partial p_2/\partial m_2 - m_1\partial p_1/\partial m_1$; $\xi_i = \rho_i/\rho$ $(i = 1, 2)$; $R_1 = \xi_1\partial p_1/\partial\rho_1 - \xi_2\partial p_2/\partial\rho_2$; $P_1 = \partial p_2/\partial m_2 + \partial p_1/\partial m_1$. Функция $m_2^e(\rho)$ находится из условия равенства давлений. Для второго типа течения в смеси определена равновесно-замороженная скорость звука c_{ef}:

$$c_{ef}^2 = \partial p/\partial\rho\,\Big|_{\substack{u_1=u_2\\ p_1\neq p_2}} = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2,$$

а для третьего — замороженно-равновесиая:

$$c_{fe}^2 = \partial p/\partial\rho\,\Big|_{\substack{u_1\neq u_2\\ p_1=p_2}} = (m_2\,\partial p_2/\partial\rho_2\partial p_1/\partial m_1 + m_1\,\partial p_1/\partial\rho_1\partial p_2/\partial m_2)/P_1.$$

Отметим, что имеются две замороженные скорости звука: a_1 и a_2, максимальную из них a_2 будем называть полностью замороженной (или замороженной) скоростью звука.

В равновесном течении смеси ($p_1(\rho) = p_2(\rho)$) можно найти зависимость объемной концентрации фаз от средней плотности

$$P(\rho, m_1) = cum_1^2 - m_1(cu + c_1c_{ef}^2) + \xi_1c_1 = 0$$

($u = c_1/\rho$, $c = 1 - a\rho_{22,0}/\rho_{11,0}$, $a = (a_2/a_1)^2$). Показано, что дискриминант этого уравнения положителен, поэтому обе ветви решения действительны. Физический смысл имеет ветвь $m_1 = m_1^e(\rho)$, соответствующая в выражении для корней квадратного уравнения знаку минус, так как она проходит через начальную точку (m_{10}, ρ_0).

Уравнение состояния здесь

$$P = \xi_1\rho/m_1^e(\rho) - 1.$$

Множество состояний за фронтом УВ может быть найдено по начальному с помощью равновесной адиабаты Гюгонио. Оказалось, что при этом существуют два конечных состояния: $u_к^+$, $u_к^-$, определяемых как решения квадратного уравнения

$$u_к^2 + bu_к + \tilde{c} = 0,$$

где $\tilde{c} = ((1 + y)c_{ef} - \xi_1 c)/(c_1 M_{10})$; $b = -(2 + y - c)/c_1$; $y = \rho_0 M_{10}^2$. Действительно, дискриминант данного уравнения может быть представлен как квадратичный полином от y, положительный для всех физических начальных данных. При этом для чисел Маха решений, найденных по равновесной скорости звука c_e,

$$M_{e,к} = u_к/c_{e,к}, \quad c_e^2 = \xi_1\left(cm_1^e - \xi_1\rho\right)/\left(m_1^e\left(c\left(m_1^e\right)^2 - \xi_1\rho\right)\right),$$

имеют место оценки $M_{e,к}^+ > 1$, $M_{e,к}^- < 1$.

Для определения условий за замороженной УВ при $m_1 = m_{10}$ служит адиабата Гюгонио замороженного течения, которую запишем как

$$(1.3) \qquad F(u_1, u_2) = \frac{(u_2 - u_0)(u_2 - \tilde{u}_2)}{u_2} - \frac{\xi_1}{\xi_2}\frac{(u_1 - u_0)(u_1 - \tilde{u}_1)}{u_1} = 0$$

($\tilde{u}_1 = 1/u_0$, $\tilde{u}_2 = a/u_0$). Отсюда видно, что равновесной точке (u_0, u_0) отвечают три состояния: $(u_0, \tilde{u}_2)$, $(\tilde{u}_1, u_0)$, $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, т. е. условия за фронтом замороженной УВ также находятся неоднозначно.

Получим, наконец, условия за фронтом равновесно-замороженной УВ, т. е. когда $u_1 = u_2$, $m_1 = m_{10}$, $p_1 \neq p_2$. Здесь скорость за фронтом $\tilde{u} = \xi_1\tilde{u}_1 + \xi_2\tilde{u}_2 = c_{ef}^2/u_0$. Решение краевой задачи (1.1), (1.2) сводится к решению системы дифференциальных уравнений

$$(1.4) \qquad \frac{du_1}{dx} = \frac{u_1}{\rho_1}\,\frac{R + \varkappa m_1 \partial p_1/\partial m_2}{u_1^2 - a_1^2} = A(u_1, u_2);$$

$$(1.5) \qquad \frac{du_2}{dx} = \frac{u_2}{\rho_2}\,\frac{-R + \varkappa\left(m_2\partial p_2/\partial m_2 + p_2 - p_1\right)}{u_2^2 - a_2^2} = B(u_1, u_2)$$

с соответствующими краевыми условиями.

В [9] показано, что при $\tau_{ст}/\tau_г \ll 1$, $\tau_{m2}/\tau_г \sim 1$ в смеси могут распространяться замороженные и дисперсные УВ, и найден критерий немонотонности давления во второй фазе. Изучим типы течений в смеси при $\tau_{ст}/\tau_г \sim 1$, $\tau_{m2}/\tau_г \gg 1$. В этом случае можно показать разрешимость краевой задачи для уравнения (1.4), дополненного интегралом (1.3). Из уравнения (1.3) явным образом выразим u_2 как функцию u_1. Область определения функции $u_2(u_1)$ состоит из трех подобластей. В первой из них $(0 < u_1 < u_1^3)$ функция $u_2(u_1)$ неоднозначна (при $u_1 \to 0$ одна из ветвей стремится к нулю, вторая — к $-\infty$), во второй $\left(u_1^1 \leqslant u_1 \leqslant u_1^2\right)$ она представляет собой замкнутую кривую, а в третьей $\left(u_1 > u_1^4\right)$ также неоднозначна (здесь величины u_1^i $(i = 1, 4)$ зависят от начальных параметров смеси). При $u_1^3 < u_1 < u_1^1$, $u_1^2 < u_1 < u_1^4$ функция $u_2(u_1)$ не определена. Прямая $u_2 = u_1$ пересекает описанную функцию $u_2(u_1)$ в двух точках: (u_0, u_0), $(u_к, u_к)$. Для нахождения $u_к = c_{ef}^2/u_0$ служит адиабата Гюгонио в равновесном по скоростям, неравновесном по давлениям течении при $u_0 > c_{ef}$. Результаты оценок значений скоростей в конечной точке для различных начальных данных u_0, ξ_1 приведены в таблице, в которой $\tilde{\xi} = \left(u_0^2 - a\right)/(1 - a)$,

$$\xi_* = \sqrt{a}\left(u_0 - \sqrt{a}\right)/(1 - a), \quad \xi_{**} = (u_0 - a)/(1 - a).$$

Исследуем знак $\lambda_1 = dA(u_1, u_2(u_1))/du_1$ в начальной и конечной точках течения ($A(u_1, u_2)$ определено (1.4)). Используя представление

$$\frac{du_2}{du_1} = -\frac{c_1\left(u_1^2 - 1\right)u_2^2}{c_2\left(u_2^2 - 1\right)u_1^2}$$

и принимая для простоты $c_D = 24/\mathrm{Re}$, при $u_1 = u_2 = u$ получим

$$\lambda_1 = -\frac{\rho_2\left(u^2 - c_{ef}^2\right)u}{\rho_1\left(u^2 - 1\right)\left(u^2 - a\right)\tau_{\text{ст}}\xi_2}.$$

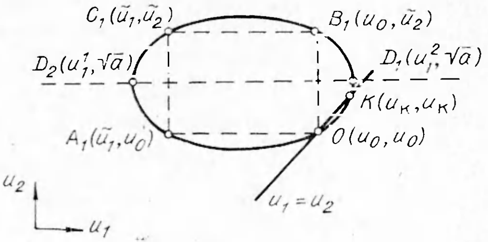

Рис. 1

Пусть $\Phi_0 = (u_0, \xi_1)$— вектор начальных данных, λ_{10}, $\lambda_{1к}$ — значения λ_1 в начальной и конечной точках течения. Имеет место

Утверждение 1. Если $\Phi_0 \in \mathrm{I}_1$, то $\lambda_{10} < 0$, $\lambda_{1к} < 0$, если $\Phi_0 \in \mathrm{I}_2$, то $\lambda_{10} < 0$, $\lambda_{1к} > 0$, если $\Phi_0 \in \mathrm{II}_1$, III_1, IV, то $\lambda_{10} < 0$, $\lambda_{1к} < 0$, если $\Phi_0 \in \mathrm{II}_2$, III_2, то $\lambda_{10} > 0$, $\lambda_{1к} > 0$.

На основе этого утверждения опишем типы течений в указанных областях. Качественную картину течения можно представить с помощью рис. 1. Точки $O(u_0, u_0)$, $B_1(u_0, \tilde{u}_2)$, $C_1(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, $A_1(\tilde{u}_1, u_0)$ на замкнутой кривой (1.3) отвечают условиям на замороженных волнах сжатия и разрежения. Прямая $u_2 = u_1$ проходит через точки $O(u_0, u_0)$, $K(u_к, u_к)$. Переходя из точки O к точкам A_1, C_1, B_1 разрывом, течение в дальнейшем релаксирует к точкам D_1, D_2, в которых скорость второй фазы достигает скорости звука. После этого происходит запирание потока. Здесь, следуя [10], можно ввести L — максимальную длину образца гетерогенной среды, в которой происходит течение смеси. При длине образца $l < L$ в конечной точке реализуется дозвуковое истечение, при $l = L$ — звуковое во второй фазе, при $l > L$ течение нереально. Используя условия устойчивости Лакса, можно показать, что течения $C_1 \to D_1$, $B_1 \to D_2$ неустойчивы (УВ разрежения в обеих фазах и во второй фазе соответственно). При $A_1 \to D_1$ УВ устойчива в первой фазе и оканчивается на конечном расстоянии L от фронта волны. В этой точке происходит обострение величины du_2/dx. Такое течение можно интерпретировать, следуя С. А. Христиановичу, как волну дробления.

Аналогично рассматривается течение в области I_2. Здесь конечная точка сместилась выше линии $u_2 = \sqrt{a}$. Устойчивым будет течение, начинающееся в точке $A(\tilde{u}_1, u_0)$ и оканчивающееся в точке $D_1(u_1^1, \sqrt{a})$ в режиме с обострением du_2/dx.

При течении в области II_1 функция $u_1(x)$ принимает при $x \to \mp\infty$ значения u_0, $u_к$ с точкой разворота при $u_1 = 1$. При этом u_2 меняется непрерывно и однозначно от u_0 до $u_к$. Для ликвидации неоднозначности в скорости первой компоненты в точке, в которой достигается равенство $u_2 = u_к$, вводится разрыв в первой фазе. За ним скорости фаз выравни-

<table>
<tr><td rowspan="2">ξ_1</td><td colspan="4">u_0</td></tr>
<tr><td>$1 < u_0 < c_{ef}$</td><td>$c_{ef} < u_0 < \sqrt{a}$</td><td>$\sqrt{a} < u_0 < a$</td><td>$u_0 > a$</td></tr>
<tr><td>$\xi_1 > \xi_{**}$</td><td>Нет решений</td><td>II_1
$u_к < 1$</td><td>III_1
$u_к < 1$</td><td rowspan="4">IV
$u_к < 1$</td></tr>
<tr><td>$\tilde{\xi} < \xi_1 < \xi_{**}$</td><td>» »</td><td>$\mathrm{II}_2$
$c_{ef} > u_к > 1$</td><td rowspan="3">III_2
$1 < u_к < c_{ef}$</td></tr>
<tr><td>$\xi_* < \xi_1 < \tilde{\xi}$</td><td>$\mathrm{I}_1$
$c_{ef} < u_к < \sqrt{a}$</td><td>Нет решений</td></tr>
<tr><td>$0 < \xi_1 < \xi_*$</td><td>I_2
$u_к < \sqrt{a}$</td><td>» »</td></tr>
</table>

ваются: $u_1 = u_2 = u_к$. Отметим, что равновесие достигается на конечном расстоянии с помощью хвостового скачка.

Решение в области II_2 с $\lambda_0 > 0$, $\lambda_к < 0$, будучи непрерывным, асимптотически принимающим начальное и конечное значения на $\mp\infty$, представляет собой дисперсную УВ. Пусть $u_0 = \alpha c_{ef} + (1-\alpha)\sqrt{a}$, $\alpha \in (0, 1)$, где $c_{ef} = \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4(1-\alpha)\sqrt{\alpha}}\right)/2$, $\xi_1 = (c_{ef} - a)/(1-a)$, $M_1 = \xi_1\rho_{22}/(\xi_2 + \xi_1\rho_{22})$, тогда $u_к = 1$. В этом случае в решении достигается неустойчивая точка промежуточного равновесия $u_1 = u_2 = u_к = 1$ ($du_1/dx(u_к) \neq 0$, $du_1/dx(u_к) \neq \infty$, $du_2/dx(u_к) = 0$). При переходе через эту точку скорость второй фазы возрастает до $\sqrt{a}$, скорость первой убывает до u_1^1. Данный режим имеет точки перехода через обе скорости звука фаз с обострением du_1/dx и существует на конечном интервале. Он является граничным между дисперсной УВ с хвостовым скачком и полностью дисперсной УВ.

Аналогично показывается, что в области III_1, IV есть течение с двухволновой конфигурацией. В голове замороженной УВ имеется скачок во второй фазе $(u_0, u_0) \to (u_0, \tilde{u}_2)$, затем идет зона релаксации скоростей до тех пор, пока u_1 не сравняется с $u_к$. В этой же точке происходит ударно-волновой переход в конечную точку в первой фазе. Течение в области III_2 представляет собой замороженную УВ в первой фазе в головной части, дополненную зоной релаксации скоростей в обеих фазах. Режимы III_1, III_2 разделяются течением с $m_1 = m_{10}$, при котором решение есть замороженная УВ в первой фазе, дополненная областью непрерывного течения, в котором осуществляется переход через обе скорости звука. Существует это течение в режиме с обострением du_2/dx на конечной длине L среды.

На основании изложенного сформулируем

Утверждение 2. Решение задачи (1.1), (1.2) существует в классе: 1) замороженных УВ, дополненных зоной релаксации с обострением du_2/dx в конечной области зоны течения при $(u_0, \xi_1) \in I_1, I_2$; 2) дисперсных УВ с хвостовым разрывом в первой фазе при $(u_0, \xi_1) \in II_1$, полностью дисперсных УВ при $(u_0, \xi_1) \in II_2$; 3) замороженных УВ во второй фазе (головной скачок), граничащих через зону релаксации с хвостовым скачком в первой фазе, при $(u_0, \xi_1) \in III_1$, IV, полностью замороженных УВ при $(u_0, \xi_1) \in III_2$.

Для $\xi_1 = \xi_{**}$ в областях II_1, II_2 течение существует в виде дисперсной волны с двумя звуковыми точками и обострением du_2/dx на полуограниченном интервале. Если $\xi_1 = \xi_{**}$ в области III_1, реализуемое течение имеет вид замороженной УВ с двумя звуковыми точками на полуограниченном интервале с обострением du_2/dx. Полное изложение доказательства существования режимов течения смеси дано в [15].

2. Нестационарное течение. Уравнения, описывающие течение смеси в нестационарном одномерном случае, имеют вид

$$\begin{gathered}
\partial\rho_i/\partial t + \partial\rho_i u_i/\partial x = 0,\ i = 1, 2, \\
\rho_1(\partial u_1/\partial t + u_1\partial u_1/\partial x) + m_1\partial p_1/\partial x = -\rho_1(u_1 - u_2)c_D \mathrm{Re}/24/\tau_{ст} = R, \\
\rho_2(\partial u_2/\partial t + u_2\partial u_2/\partial x) + m_2\partial p_2/\partial x = -R + (p_2 - p_1)\partial m_1/\partial x, \\
\partial m_2/\partial t + u_2\,\partial m_2/\partial x = -(p_1 - p_2)/\mu_2,\quad p_i = a_i^2(\rho_i/m_i - \rho_{ii,0}),\quad i = 1, 2.
\end{gathered}\tag{2.1}$$

В качестве начальных данных примем распределение параметров в виде одного из трех возможных типов стационарных УВ. Решение задачи проведем методом крупных частиц, изучая при этом следующие проблемы.

З а д а ч а 1. *Распространение дисперсной и замороженной УВ в пространстве.* Пусть $u_{10} = u_{20} = 0$, $D = -3{,}2$, $m_1 = 0{,}5$ (величины обезразмерены согласно [9]). В этом случае при $t = 0$ течение является полностью дисперсной УВ. Поскольку на правой границе области течения поддерживается постоянное равновесное значение параметров (для скоростей это есть значение $u_i = u_к$, $i=1, 2$), то влево распространяется стационарная дисперсная УВ. Изучался процесс образования дисперсной УВ из начальных данных типа ступеньки. При этом параметры течения слева и справа от точки разрыва удовлетворяли равновесной адиабате Гюгонио. Как видно из приведенных на рис. 2 профилей плотности второй фазы, имеющийся на момент времени $t = 0$ (кривая *4*) разрыв при $t = 0{,}5$ (кривая *3*) сглаживается и при $t = 1$; 1,5 (кривые *2*, *1* соответственно) распространяется дисперсная УВ.

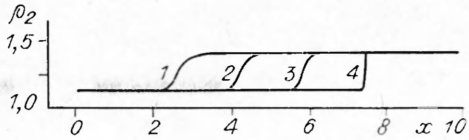

Рис. 2

Аналогично рассматривались варианты течения с $u_{10} = 0$, $u_{20} = 0$, $D = -3{,}5$, $m_1 = 0{,}75$. При $t = 0$ реализуется замороженная УВ с одноволновой структурой, течение непрерывно в первой фазе с разрывом во второй. Передний скачок немного размазывается из-за влияния аппроксимационной вязкости, и волна устойчиво распространяется со скоростью, близкой к $D = -3{,}5$.

Пусть $u_{10} = 0$, $u_{20} = 0$, $D = -6{,}5813$, $m_1 = 0{,}75$. Параметры первой фазы непрерывны в голове волны и имеют скачок в хвосте при $t = 0$, в то время как во второй фазе УВ расположена в голове течения. И в данном случае наблюдается устойчивое стационарное распространение изучаемой волновой конфигурации. Отметим, что течение во второй фазе с передним разрывом формируется быстрее, чем в первой.

Представляет интерес поведение смеси, в которой в начальный момент времени реализуется течение типа УВ разрежения. Для нее характерно наличие неустойчивого разрыва во второй фазе, дополненного зоной релаксации скоростей до конечного равновесного состояния. Течение в первой фазе непрерывно. Реализуется этот тип течения при $u_{10} = 0$, $u_{20} = 0$, $D = -1{,}5$. Поскольку относительная скорость звука в конечном равновесном состоянии $u_к - D$ больше скорости звука во второй фазе, то зона релаксации непрерывно примыкает к конечному состоянию. Картина возникающего течения для давления в первой фазе приведена на рис. 3. Неустойчивая конфигурация течения при $t = 0$ (кривая *4*) распадается на две волны разрежения (ВР), распространяющиеся вправо и влево (кривые *1—3* соответствуют $t = 1{,}2$; 0,8; 0,4). Распространяющаяся вправо ВР снимает давление в компонентах, и за ней формируется зона постоянного течения смеси. Данная конфигурация обусловлена тем, что в точке $x = 5$ сосредоточен разрыв давления. При распаде начинается разгрузка, которая снимает давление $p_0 = 0$ и приводит в движение среду вправо от разрыва. Однако ее скорость велика, и приведенные в движение точки смеси (лежащие слева от точки $x = 5$) не подпитывают по давлению правую половину, так как скорость «убегания» частиц здесь достаточно велика. В данном случае ситуация аналогична описанной в [11] конфигурации *B* задачи о распаде разрыва, если в последней сделать замену переменных $u = -u_{10} + u$, $x = x - u_1 t$ ($u_1 < 0$ — скорость газа слева от разрыва). Расчеты, проведенные на большие времена, с отодвинутыми границами расчетной области показали, что при $t \to \infty$ в смеси формируется равновесное по скоростям течение ($u_1 = u_2 = 2{,}8$), при этом давления компонент не равны и близки к значениям давлений в точке пересечения профилей при различных моментах времени.

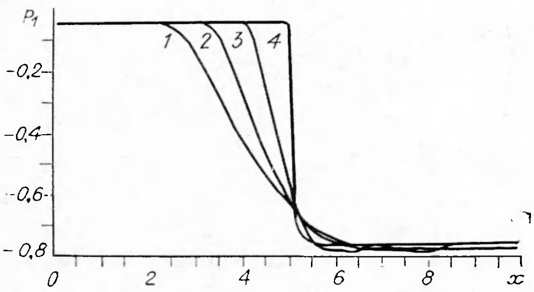

Рис. 3

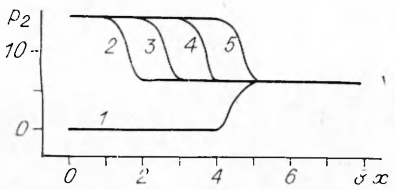

Рис. 4

Задача 2. *Отражение УВ в смеси от жесткой стенки.* Эта проблема привлекает внимание исследователей (библиографию можно найти в [12, 13]). Отметим работу [14], где для падающих замороженных и дисперсных волн в смеси газа и твердых частиц выписаны условия, определяющие тип отражения. Дана проверка этих условий на основе расчета в рамках модели смеси без учета объемной доли частиц (модель Клигеля — Никерсона). Расчеты подтвердили сформулированные три типа отражения УВ.

Остановимся на проблеме отражения УВ от жесткой стенки в случае смеси двух сжимаемых газов. Предположим, что справа налево по покоящейся смеси распространяется УВ сжатия с постоянной амплитудой. Течение перед УВ при $t = 0$ находится в равновесии с параметрами $p_i = p_0 = 0$, $u_i = 0$, $\rho_i = \rho_{i0}$, $i = 1, 2$. Параметры течения за падающей УВ отметим индексом к, индексом R — за отраженной УВ ($D_к$, D_R — скорости падающей и отраженной УВ). За фронтом падающей УВ параметры смеси принимают равновесные по скоростям значения $u_i = u_к$, $p_i = p_{iк}$, $i = 1, 2$. Законы сохранения в этом случае имеют вид

$$-\rho_0 D_к = \rho_к (u_к - D_к), \quad \rho_0 D_к^2 = p_к + \rho_к (u_к - D_к)^2, \quad -\rho_R D_R = \rho_к (u_к - D_R), \quad p_R + \rho_R D_R^2 = p_к - \rho_R D_R (u_к - D_R),$$

где $p_к = m_1 p_{1к} + m_2 p_{2к}$; $\rho_0 = \rho_{10} + \rho_{20}$; $\rho_к = \rho_{1к} + \rho_{2к}$; $p_к = c_{ef}^2(\rho_к - \rho_0)$; $p_R = c_{ef}^2 (\rho_R - \rho_0)$.

После несложных преобразований для определения D_R получим уравнение $D_R^2 - D_R u_к - c_{ef}^2 = 0$, имеющее решения $D_{2+} = D = -u_0$, $D_{2-} = -c_{ef}^2/D$. Первое из них определяет скорость падающей УВ, второе — отраженной. Выпишем формулы для относительных скоростей смеси перед и за фронтом отраженной УВ соответственно: $u_к' = u_к - D_{2-} = D$, $v_к' = -D_{2-} = c_{ef}^2/D$. На основе этих выражений и утверждений, доказанных для падающей дисперсной УВ выше, показывается, что падающая дисперсная УВ отражается волной того же типа, т. е. при $(u_0, \xi_1) \in \mathrm{II}_1$ — дисперсной УВ с хвостовым скачком в первой фазе, при $(u_0, \xi_1) \in \mathrm{II}_2$ — полностью дисперсной УВ. Для $(u_0, \xi_1) \in \mathrm{III}_1$ падающая УВ отразится волной аналогичного типа, падающая замороженная волна одноволновой структуры отразится замороженной волной той же структуры. Если $(u_0, \xi_1) \in \mathrm{III}_2$, то падающая и отраженная волны имеют двухволновую структуру.

Опишем некоторые численные эксперименты, проведенные для этой задачи. В качестве начальных условий выберем течение типа полностью дисперсной УВ, соответствующее $u_{i0} = 0$, $D_к = 3{,}2$, $m_{10} = 0{,}5$, $i = 1, 2$. На момент $t = 0$ голова УВ сосредоточена в $x = 4$ (под головой дисперсной УВ понимается точка в пространстве, в которой параметры течения на $\varepsilon = 0{,}01$ отличаются от значений перед фронтом дисперсной УВ). На рис. 4 приведены профили давления во второй фазе при $t = 0$; 0,2; 0,24; 0,28; 0,32 (кривые *1—5*). Как видно, отраженная УВ также дисперсная. При этом следует отметить хорошую передачу параметров за фронтом отраженной УВ: аналитическое решение дает $\rho_{2,R}/\rho_{2,0} = (D/c_{ef})^4 = 1{,}545$, а численное 1,540.

Интересно поведение скоростей фаз. Так, при распространении дисперсной УВ слева в направлении жесткой стенки профиль скоростей фаз представляет собой кривую с резким изменением в передней части волны и более плавную в задней. На рис. 5, *а* показано поведение скорости u_2 при $t = 0$; 0,4; 0,8; 1,2; 1,6 (кривые *1—5*), на рис. 5, *б* — при $t = 0$; 2; 2,4; 2,8; 3,2 (кривые *1—5*). Скорость волны при этом $D_R = 3{,}2$. Расстояние $l = 4$ волна проходит за $\Delta t = 1{,}25$ (кривая *1* на рис. 5, *а*). Видно, что

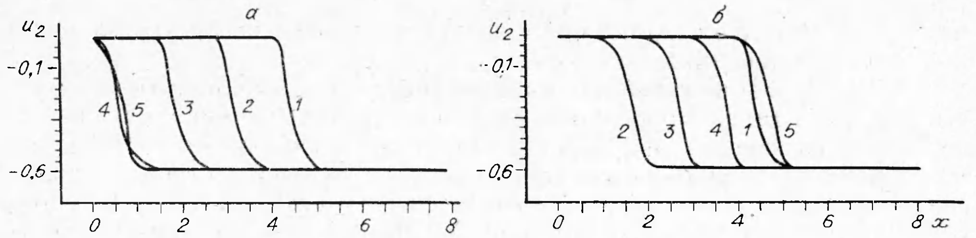

Рис. 5

картина изменения скорости по толщине волны полностью обратима. В передней части по-прежнему резкое изменение скорости, в задней — более плавное; скорость отраженной дисперсной УВ (полученная аналитически) $D_R = -c_{ef}^2/D = 2{,}57$ близка к расчетной $\widetilde{D}_R = 2{,}58$.

Отметим, что давление и плотность первой фазы вблизи от стенки слегка превышают значения, определяемые аналитически. Это связано, по-видимому, с тем обстоятельством, что здесь происходит взаимодействие падающей и отраженной волн. Поэтому смесь не достигает однородного состояния за конечное время.

Рассмотрим далее отражение от стенки замороженной УВ ($m_1 = 0{,}75$, $D = 3{,}5$, $u_{i0} = 0$, $i = 1.2$) в случае одноволновой конфигурации (головная УВ во второй фазе, непрерывное течение в первой). Результаты расчетов для давления первой фазы представлены на рис. 6 (кривые *1—5* соответствуют $t = 3{,}2$; 3,6; 4,0; 4,4; 4,8). В этом случае при ударе первой фазы о твердую стенку в первые моменты времени после удара в ней развиваются давления, значительно большие, чем в состоянии за отраженной волной. По мере отхода волны от стенки давление на стенке уменьшается. Однако расчеты, проведенные до расстояния шесть калибров (калибр — отношение линейного размера к ширине замороженной УВ), показали, что значение $p_2(0,\ t)$ еще не установилось. Давление во второй фазе, где имеется разрыв в голове волны, возрастает на стенке до своего значения за фронтом. При этом значение $p_1(0,\ t)$ устанавливается значительно быстрее, чем во второй фазе. Уже на расстоянии 1,5 калибра давление в первой фазе близко к предельному. Естественно, что плотности фаз ведут себя аналогично. Как и в предыдущем случае, решение отразилось симметричным образом.

Рассмотрим отражение замороженной УВ с двухволновой конфигурацией ($u_{10} = u_{20} = 0$, $p_{10} = p_{20} = 0$, $m_1 = 0{,}75$, $D_к = 6{,}5813$), когда в первой фазе в голове волны течение непрерывно, а в хвосте имеется разрыв и когда во второй фазе в голове разрыв с последующей зоной релаксации. Результаты расчетов для скорости первой фазы представлены на рис. 7 (начальные данные — линия *5*, решение при $t = 2{,}4$; 2,7; 3; 3,3 — линии *1—4*). Видно, что после отражения от стенки замороженная УВ остается волной того же типа, движется она со скоростью $D_R = -0{,}83$. Хвостовой скачок в этой фазе воспроизводится при численных расчетах хуже, чем головной: за его фронтом возникают нефизические осцилляции небольшой амплитуды. Передний скачок во второй фазе передается весьма удовлетворительно. На расстоянии от стенки, примерно равном 5 калибрам, отраженная волна распространяется уже в стацис-

Рис. 6

Рис. 7

нарном режиме. Хорошо различим головной скачок с последующей зоной выхода к стационарному значению.

Таким образом, в работе сформулированы и доказаны утверждения относительно типов стационарных волн в двухскоростной двухдавленческой смеси твердых тел (гидродинамическое приближение). Численно показана устойчивость распространения волн сжатия в смеси. Найдена аналогия конфигурации B газодинамического распада разрыва [11] при исследовании эволюции неустойчивой УВ разрежения в смеси. Аналитически и численно показано, что при падении УВ на стенку ее тип сохраняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Николаевский В. Н.** Механика пористых и трещиноватых сред.— М.: Недра, 1984.
2. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред.— М.: Наука, 1984.— Т. 1, 2.
3. **Stewart H. B., Wendroff B.** Two-phase flows: models and metods // J. Comp. Physics.— 1984.— V. 56, N 3.
4. **Baer M. R., Nunziato J. W.** A two-phase mixture theory for deflagration-to-detonation transition in reactive granular materials // Int. J. Multiphase Flow.— 1986.— V. 12, N 6.
5. **Куропатенко В. Ф.** Неустановившиеся течения многокомпонентных сред // Динамика многофазных сред/Под ред. В. М. Фомина.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1989.
6. **Буряков О. В., Куропатенко В. Ф., Мустафин В. К.** Ударная волна и волна разрежения в гетерогенной смеси двух конденсированных веществ // ВАНТ. Методики и программы численного решения задач математической физики.— 1989.— № 4.
7. **Руев Г. А., Фомин В. М.** Структура ударной волны в бинарной смеси вязких газов // ПМТФ.— 1984.— № 5.
8. **Гаврилюк С. Л.** Бегущие волны в неравновесной по давлениям газожидкостной среде // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Спб. отд.-ние, Ин-т гидродинамики.— 1986.— Вып. 76.
9. **Федоров А. В.** Математическое описание течения смеси конденсированных материалов при высоких давлениях // Физическая газодинамика реагирующих сред/Под ред. Ю. А. Березина, А. М. Гришина.— Новосибирск: Наука, 1990.
10. **Черный Г. Г.** Газовая динамика.— М.: Наука, 1988.
11. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений.— М.: Наука, 1978.
12. **Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М.** Исследование структур изотермических ударных волн и расчет разлета облака газовзвесей.— Новосибирск, 1986.— (Препр./АН СССР, Спб. отд-ние, ИТПМ; № 8—86).
13. **Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М.** Расчет разлета сжатого объема газовзвеси // ПМТФ.— 1987.— № 5.
14. **Miura H., Saito T., Glass I. I.** Shock-wave reflection from a rigid wall in a dusty gas // Proc. Roy. Soc. London.— 1986.— V. A404.— P. 55.
15. **Федоров А. В.** Структура ударной волны в смеси двух твердых тел (гидродинамическое приближение) // Моделирование в механике.— 1991.— Т. 5(22), № 4.

г. Новосибирск *Поступила 28/I 1991 г., в окончательном варианте — 19/VI 1991 г.*

УДК 536.46

Г. М. Махвиладзе, В. И. Мелихов

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ПОГАСАНИЯ ПЛАМЕНИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ

Один из наиболее существенных вопросов в теории пределов горения — роль естественной конвекции в процессе погасания. Хорошо известно, что направление распространения пламени сильно влияет на концентрационные пределы горения: при распространении сверху вниз они у́же, чем при движении пламени снизу вверх.

Гипотеза, объясняющая механизм гашения пламени при его распространении по сосуду от верхней стенки вниз, была выдвинута в [1]. Авторы предположили, что из-за охлаждения горячих продуктов реакции