

**СИНГУЛЯРНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ  
В ВЕРШИНЕ ХРУПКОЙ ТРЕЩИНЫ  
С НУЛЕВЫМ ЗНАЧЕНИЕМ  $J$ -ИНТЕГРАЛА**

*В. А. Хандогин*

*Новосибирский государственный технический университет,  
630092 Новосибирск*

Как известно, при решении проблем линейной механики разрушения основное внимание уделяется определению напряженно-деформированного состояния в окрестности хрупкого дефекта. Асимптотики полей распадаются в суперпозицию трех независимых видов деформации с коэффициентами интенсивности  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  (нормальный отрыв, поперечный сдвиг, продольный сдвиг). Принято считать, что «указанные три типа деформации являются необходимыми и достаточными для описания всех возможных видов поведения трещины в наиболее общем случае распределения упругих напряжений» [1, с. 104]. Соответственно этому положению построена и концептуальная основа экспериментальных исследований хрупкого разрушения.

В настоящей работе рассматривается простейший пример краевых задач плоской статической теории упругости для тел с трещиной, асимптотики напряжений в которых не могут быть представлены суперпозицией нормального отрыва, поперечного и продольного сдвига. Наиболее важной особенностью этого напряженного состояния является то, что  $J$ -интеграл теряет свою знакоопределенность и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Анализ характеристик состояний с  $J \leq 0$ , таких как раскрытие трещины, площадки максимальных растягивающих напряжений, направление минимальной плотности упругой энергии, иллюстрирует возможность их практического достижения. Причем развитие трещин из состояния  $J \leq 0$  оказывается энергетически невозможным при любых уровнях внешней нагрузки и поверхностной энергии. По критерию Гриффита трещина становится абсолютно устойчивой, хотя напряжения в ее вершине по-прежнему имеют сингулярность, а смещения разрывны на берегах.

**1. Краевая задача.** Рассмотрим неограниченную плоскую ортотропную среду с разными и чисто мнимыми характеристическими числами ( $s_k = im_k$ ,  $k = 1, 2$ ). При этом матрица упругих податливостей  $a_{ij}$  [1] удовлетворяет условию

$$\sqrt{a_{11}a_{22}} \neq a_{12} + a_{66}/2. \quad (1.1)$$

Напряжения, деформации, смещения и другие силовые факторы выражаются через две аналитические функции ( $\Phi(z_1)$  и  $\Psi(z_2)$ ) по известным общим правилам [1, 2]. Среда ослаблена одним разрезом вдоль отрезка  $L$  действительной оси  $|x| \leq b$ .

Предположим, что берега части разреза  $L_2$  с координатами  $a \leq x \leq b$  армированы нерастяжимой мембраной. По определению мембрана препятствует продольным деформациям растяжения — сжатия и не сопротивляется изгибу и сдвигу. Это несколько усложненная модель цепи, не допускающая не только растягивающих, но и сжимающих деформаций припо-

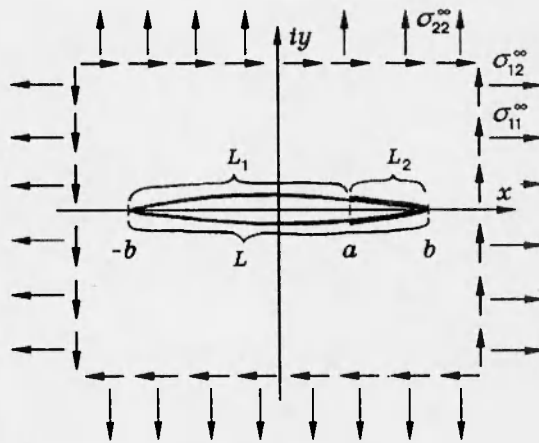
верхностного слоя. Остальную часть контура  $L$  с нестесненными берегами обозначим  $L_1 \equiv L \setminus L_2$  (см. рисунок).

Пусть среда нагружена на бесконечности равномерными напряжениями  $\sigma_{ij}^\infty$  и самоуравновешенной непрерывной и симметричной нагрузкой на разрезе. С учетом выражения для ортотропного закона Гука [1] краевые условия на контуре  $L$  имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^\pm(x, 0) &\equiv \sigma_{22}^\pm(x, 0) = f(x), & x \in L, \\ \sigma_{ns}^\pm(x, 0) &\equiv \sigma_{12}^\pm(x, 0) = h(x), & x \in L_1, \\ \sigma_{ss}^\pm(x, 0) &\equiv \sigma_{11}^\pm(x, 0) = g(x), & x \in L_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где известные функции  $f, g, h$  определяют расклинивающую нагрузку и начальный натяг мембраны.

Решение краевой задачи (1.2) не вызывает затруднений. Причем все сделанные ограничения (ортотропия, разные параметры  $m_k$  по условию (1.1), самоуравновешенная нагрузка) непринципиальны и допущены лишь для упрощения записи разрешающих формул и наглядности интерпретаций. Как обычно [2], комплексные потенциалы задачи представим в виде интегралов типа Коши с неизвестными плотностями. Краевая задача (1.2) превращается в задачу сопряжения на контурах  $L, L_1, L_2$ , единственное решение которой выбирается из условий однозначности смещений и главного вектора сил на контуре  $L$ .



Асимптотические выражения для комплексных потенциалов в окрестности правого конца  $x = b$  разреза запишем как

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \left\{ \frac{m_2 k_1}{m_2 - m_1} - \frac{m_1 m_2}{m_2^2 - m_1^2} G_1 + \frac{G_2}{m_2^2 - m_1^2} \right\} \frac{(z_1 - b)^{-1/2}}{2\sqrt{2}}, \\ \Psi(z_2) &= - \left\{ \frac{m_1 k_1}{m_2 - m_1} - \frac{m_1 m_2}{m_2^2 - m_1^2} G_1 + \frac{G_2}{m_2^2 - m_1^2} \right\} \frac{(z_2 - b)^{-1/2}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь коэффициенты интенсивности  $k_1, G_1, G_2$  определяются формулами

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{\pi\sqrt{b}} \int_{-b}^{+b} (\sigma_{22}^\infty - f) \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} dx, & G_1 &= \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{b-a}} \int_a^b (\sigma_{22}^\infty - f) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \\ G_2 &= \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{b-a}} \int_a^b (\sigma_{11}^\infty - g) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Отметим, что касательные напряжения  $\sigma_{12}^\infty, h$  не дают вклада в коэффициенты интенсивности для армированного конца разреза. Как следует из решений, состояние поперечного сдвига возникает только в начале

армированного участка ( $x = a$ ). На левом несстесненном конце трещины  $x = -b$  асимптотика потенциалов имеет обычный вид [1, 2]. Если армирование распространено на всю длину трещины ( $a = -b$ ), то в формулах (1.3), (1.4) и последующих необходимо принять  $k_1 = G_1$ .

**2. Асимптотики напряжений и смещений.** Формулы (1.3), (1.4) позволяют восстановить асимптотические распределения напряжений и смещений, которые отличаются от обычных выражений [1, 2] и не могут быть представлены в виде суперпозиции нормального отрыва и поперечного сдвига. Например, в изотропном пределе [2] формулы (1.3) дают следующие выражения:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{a_1}{4\sqrt{r}} \begin{bmatrix} 4 \cos \frac{\vartheta}{2} + \cos \frac{5\vartheta}{2} \\ 4 \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{5\vartheta}{2} \\ \sin \frac{5\vartheta}{2} \end{bmatrix} + \frac{a_2}{2\sqrt{r}} \begin{bmatrix} -\cos \frac{\vartheta}{2} \\ \cos \frac{\vartheta}{2} \\ -\sin \frac{\vartheta}{2} \end{bmatrix}; \quad (2.1)$$

$$u_1 + iu_2 = \frac{\sqrt{r}}{4\mu} \left\{ 2\alpha a_1 \exp \frac{i\vartheta}{2} - a_1 \exp \frac{i3\vartheta}{2} - 2a_2 \exp \left( -\frac{i\vartheta}{2} \right) \right\}; \quad (2.2)$$

$$J_1 + iJ_2 = \frac{\pi(1 + \alpha)}{8\mu} (a_1^2 + 2a_1a_2); \quad (2.3)$$

$$a_1 = \frac{k_1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}} (G_2 - G_1), \quad a_2 = \frac{k_1}{\sqrt{8}} - \frac{3}{4\sqrt{2}} (G_2 - G_1). \quad (2.4)$$

Здесь  $(r, \vartheta)$  — полярные координаты с центром в точке  $x = b$ ;  $\alpha$  — постоянная плоской задачи;  $\mu$  — модуль сдвига;  $J_1, J_2$  — компоненты трещинодвижущей силы, из которых  $J_1$  контролирует энергозатраты на увеличение длины трещины и соответствует известному  $J$ -интегралу, а  $J_2 \equiv 0$  в системе координат, связанной с вершиной трещины.

Из соотношений (2.1)–(2.4) видно, что выражения для напряжений и смещений складываются из полей нормального отрыва с коэффициентом  $k_1$  и еще одного независимого симметричного поля с коэффициентом интенсивности  $(G_2 - G_1)$ .

**3. Состояние абсолютной устойчивости трещины.** Из формул (2.3), (2.4) следует выражение для  $J$ -интеграла через коэффициенты интенсивности напряжений:

$$J_1 \equiv J = \frac{\pi(1 + \alpha)}{8\mu} \left\{ k_1^2 - \frac{1}{4} (G_2 - G_1)^2 \right\}. \quad (3.1)$$

Таким образом, в рассмотренной краевой задаче  $J$ -интеграл не имеет свойства положительной определенности и может принимать отрицательные значения. Увеличение длины трещины из конца  $x = b$  армированного участка будет сопровождаться не выделением, а поглощением энергии. Следовательно, развитие трещины в напряженном состоянии (2.1) при условии  $J = 0$  оказывается энергетически невозможным при любых уровнях внешней нагрузки и поверхностной энергии. Поэтому назовем такое состояние *состоянием абсолютной устойчивости трещины*.

Определим характерные параметры состояния абсолютной устойчивости. В силу квадратичности формы  $J$ -интеграла (2.3) возможны два варианта, так как

$$J = 0 \quad \text{при} \quad a_1 = 0 \quad \text{или} \quad \text{при} \quad a_1 = -2a_2. \quad (3.2)$$

1.  $a_1 = 0$ . Растягивающее напряжение в полярной системе координат описывает функция

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}(r, \vartheta) = \frac{a_2}{2\sqrt{r}} \cos \frac{3\vartheta}{2}, \quad (3.3)$$

максимум которой достигается при  $\vartheta = 0$  — на продолжении трещины. Плотность упругой энергии  $W(r, \vartheta)$  в окрестности правого конца трещины не зависит от полярного угла

$$W(r, \vartheta) = a_2^2/8\mu r,$$

и поэтому известный критерий выбора направления прорастания трещины по минимальному значению функции  $W(r, \vartheta)$  не выделяет единственного значения полярного угла. Раскрытие окрестности вершины армированного участка трещины происходит без налегания берегов

$$u_1 + iu_2 \Big|_{-\pi}^{+\pi} = \frac{ia_2}{\mu} \sqrt{r}.$$

Таким образом, первый вариант может быть реализован на практике, так как берега не налегают друг на друга. При выходе из состояния абсолютной устойчивости предпочтительное направление распространения магистральной трещины совпадает с направлением начального дефекта по условию  $\sigma_{\vartheta\vartheta}(r, \vartheta) \rightarrow \max$ .

2.  $a_1 = -2a_2$ . Растягивающее напряжение в полярной системе координат определяется функцией вида

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}(r, \vartheta) = \frac{a_1}{4\sqrt{r}} \left( 3 \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{3\vartheta}{2} \right),$$

максимум которой достигается при  $\vartheta = \pm\pi/2$ .

Плотность упругой энергии имеет вид

$$W(r, \vartheta) = \frac{a_1^2}{8\mu r} \{ (\varkappa - 1)(1 + \cos \vartheta) + \cos^2 \vartheta \},$$

а минимальное значение ее достигается при  $2 \cos \vartheta = (1 - \varkappa) \leq 0$ , т. е. при  $|\vartheta| \geq \pi/2$  в зависимости от значений коэффициента Пуассона.

Форма раскрытия острия трещины определяется из формул (2.2), (3.2) и дается соотношением

$$u_1 + iu_2 \Big|_{-\pi}^{+\pi} = \frac{ia_1\varkappa}{\mu} \sqrt{r}.$$

Таким образом, и второй вариант абсолютной устойчивости тоже реализуется без налегания берегов. Предпочтительные направления прорастания трещины по обоим критериям — минимум упругой энергии и максимум растягивающих напряжений — ориентированы (примерно) перпендикулярно ее контуру.

**4. Поправка поверхностной энергии на стеснение деформаций.** Рассмотрим трещину, армированный участок которой мал  $(b - a) \ll b$ . Развитие такой трещины можно описывать в рамках квазихрупкой модели, в которой отступления от хрупкого механизма локализованы в малой окрестности вершины.

Выражение для  $J$ -интеграла в коэффициентах интенсивности (3.1) складывается из положительной и отрицательной частей. Последняя может быть интерпретирована как добавка к параметру прочности материала в критерии Гриффитса, так как локализована в малой окрестности

вершины:

$$\gamma_0 = \gamma + \Delta\gamma, \quad 2\Delta\gamma = \frac{\pi(1+\varkappa)}{32\mu} (G_2 - G_1)^2. \quad (4.1)$$

Здесь  $\gamma$  — начальная поверхностная энергия;  $\gamma_0$  — поверхностная плотность энергии на разрыв;  $\Delta\gamma$  — поправка на стеснение деформаций, зависящая от внешней нагрузки и размеров концевой зоны. В частности, если внешняя нагрузка постоянна, то из формул (1.4) и (4.1) следует соотношение

$$\Delta\gamma = \frac{\pi(1+\varkappa)}{128\mu} (b-a)(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + g - f)^2, \quad (4.2)$$

которое показывает, что усилие натяга  $g$  армирующей мембраны теоретически можно использовать для управления прочностью материала в предложенной интерпретации (4.1). Отметим, что в выражение для поправки (4.2) входит и расклинивающая сила  $f$ . Этот факт показывает, что сцепляющим действием обладает не только нормальная нагрузка  $f$ , как в модели Г. И. Баренблатта, но и продольная  $g$ , если продольные деформации концевой зоны стеснены.

**5. Выводы.** 1. Рассмотрена краевая задача (1.2) плоской эластостатики для тела с трещиной, асимптотики напряжений в которой не могут быть представлены суперпозицией полей нормального отрыва и поперечного сдвига.

2. Получены асимптотические формулы для комплексных потенциалов (1.3), напряжений (2.1), смещений (2.2) и выражение для  $J$ -интеграла (2.3), (3.1).

3. В рассмотренной задаче  $J$ -интеграл теряет свою положительную определенность и может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

4. Состояния, в которых  $J = 0$  (3.2), названы состояниями абсолютной устойчивости хрупкой трещины. Для них рассмотрены форма раскрытия конца трещины, растягивающие напряжения  $\sigma_{\vartheta\vartheta}(r, \vartheta)$  и плотность упругой энергии  $W(r, \vartheta)$ , а также дается прогноз развития магистральной трещины (при преодолении состояния абсолютной устойчивости) по известным критериям  $\sigma_{\vartheta\vartheta} \rightarrow \max$  и  $W \rightarrow \min$ .

5. Отрицательная часть в выражении  $J$ -интеграла (3.1) интерпретируется как поправка поверхностной энергии на стеснение деформаций (4.1). Пример (4.2) позволяет расширить известную модель трещины Г. И. Баренблатта. Показано, что сцепляющим свойством обладает не только нормальная, но и продольная нагрузка на контуре трещины, если деформации стеснены.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Си Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушения. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 83–203.
2. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 5. С. 91–97.

Поступила в редакцию 22/XI 1994 г.