

## О ПОЛИВАХ И РАСТЕКАНИЯХ БУГРОВ ГРУНТОВЫХ ВОД

С. Н. Муминов (Новосибирск)

Известно решение простейших задач: о движении грунтовых вод при поливах полосообразной площади и растекании этих вод после прекращения полива в грунте конечной и бесконечной глубины [1, 2]. Для прямоугольной области был рассмотрен случай бесконечно глубокого грунта [3].

Приводим формулы для прямоугольной области в случае грунта конечной глубины. Линеаризованное уравнение Буссинеска для движения грунтовых вод имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \left( a = \frac{kh'}{\sigma}, f(x, y, t) = \frac{W(x, y, t)}{\sigma} \right) \quad (1)$$

Здесь  $k$  — коэффициент фильтрации,  $h'$  — средняя высота грунтового потока,  $\sigma$  — недостаток насыщения,  $W$  — разность между инфильтрацией и испарением. Будем рассматривать безграничную область плоскости  $xy$ , над некоторой частью которой производится полив и в то же время происходит растекание ранее образовавшихся бугров.

Если начальная форма поверхности грунтового потока  $h(x, y, 0) = h_0(x, y)$ , то решение уравнения (1) имеет вид

$$h(x, y, t) = \frac{1}{4\pi at} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{-r^2}{4at} h_0(x_1, y_1) dx_1 dy_1 + \\ + \frac{1}{\pi a 4} \int_0^t \frac{dt_1}{t-t_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{-r^2}{4a(t-t_1)} f(x_1, y_1, t_1) dx_1 dy_1 \quad (2)$$

$$r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2$$

*Растекание бугров.* Если не учитываются инфильтрация или испарение, то форма бугров, изменяющаяся со временем, определяется первым слагаемым формулы (2). Рассмотрим растекание бугра, в начальный момент представлявшего столб в виде прямоугольного параллелепипеда

$$h_0(x, y) = H_0 = \text{const}, \quad |x| \leq R, \quad |y| \leq R_1 \\ h_0(x, y) = H_1 = \text{const}, \quad |x| > R, \quad |y| > R_1$$

Тогда решение имеет вид (3)

$$h(x, y, t) = H_1 + \frac{H_0 - H_1}{4} \left[ \operatorname{erf} \frac{R-x}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erf} \frac{R+x}{2\sqrt{at}} \right] \left[ \operatorname{erf} \frac{R-y}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erf} \frac{R+y}{2\sqrt{at}} \right]$$

Введем безразмерные величины

$$\frac{x}{R} = \xi, \quad \frac{y}{R_1} = \eta, \quad \tau = \frac{4at}{R^2}, \quad n = \frac{R_1}{R}, \quad U(\xi, \eta, \tau) = \frac{h(x, y, t) - H_1}{H_0 - H_1}$$

При этом формула (3) примет вид

$$U(\xi, \eta, \tau) = \frac{1}{4} \left[ \operatorname{erf} \frac{1-\xi}{\sqrt{\tau}} + \operatorname{erf} \frac{1+\xi}{\sqrt{\tau}} \right] \left[ \operatorname{erf} \frac{(1-\eta)n}{\sqrt{\tau}} + \operatorname{erf} \frac{(1+\eta)n}{\sqrt{\tau}} \right] \quad (4)$$

Для  $n = \infty$ , т. е. для случая растекания полосы ( $-R \leq x \leq R$ ), имеем

$$U(\xi, \tau) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \frac{1-\xi}{\sqrt{\tau}} + \operatorname{erf} \frac{1+\xi}{\sqrt{\tau}} \right] \quad (5)$$

В центре прямоугольника при  $\xi = 0, \eta = 0$  формула (4) будет

$$U(\tau) = \operatorname{erf} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \operatorname{erf} \frac{n}{\sqrt{\tau}} \quad (6)$$

При  $n = 1$  имеем квадрат, при  $n = 2, 3, \dots$  — прямоугольники, при  $n = \infty$  — полосу. Для больших значений  $\tau$  имеем  $U(\tau) \approx 4n / \pi\tau$ .

На фиг. 1 представлены графики растекания максимума бугра  $U = U(\tau; n)$ , построенные согласно формуле (6) при помощи таблицы, для  $n = 1, 2, 3, 4, \infty$ . Видим, что кривые зависимости максимальной ординаты от времени сначала круто спадают, затем растекание становится все более медленным.

При этом вначале для прямоугольника даже с небольшим удлинением ( $n = 2$ ) кривая оказывается ближе к кривой для бесконечно длинной полосы; при  $\tau = 7-8$  линия  $n = 2$  лежит почти посредине между линиями  $n = 1$  и  $n = \infty$  и лишь затем она начинает приближаться к линии, соответствующей квадрату.

Линия  $n = 3$  находится очень близко к линиям  $n = 4$  и  $n = \infty$  при  $\tau = 3-4$ , но при  $\tau = 6-7$  заметно удаляется. Линия  $n = 4$  еще ближе к кривой  $n = \infty$  при  $\tau = 5-6$  и заметно отстает от нее при  $\tau = 8-9$ .

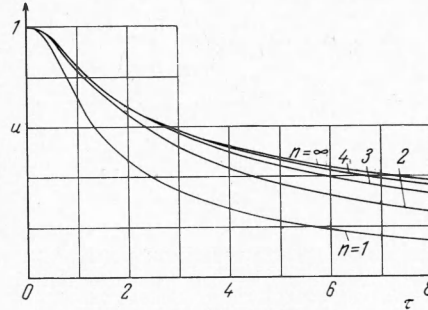
Обе линии,  $n = 3$  и  $n = 4$ , близки к линии  $n = \infty$ , что видно и из таблицы.

На фиг. 2 представлены кривые растекания бугра, в начальный момент представлявшего параллелепипед с квадратным основанием ( $n = 1$ , по формуле (4)) для нескольких значений  $\eta$  и случай растекания полосы (по формуле (5)) для  $\tau = 1$  и  $\tau = 4$ .

Из графиков при  $n = 1$  видно, как быстро падает вначале значение  $U$  при  $\xi = 0$  с увеличением  $\tau$  и происходит заметный подъем грунтовых вод для  $\xi > 1$ , например для  $\xi = 2$ .

Такая же картина растекания наблюдается для прямоугольника, но растекание параллелепипеда с прямоугольным основанием при  $n > 1$  происходит медленнее, чем растекание квадрата.

Если построить гидроизогипсы растекания для параллелепипеда с квадратным основанием, то видно, что изолинии при удалении от начала все больше стремятся к окружностям, для больших  $\tau$  они еще больше будут похожи на окружности.



Фиг. 1

На больших площадях орошения бугры от поливов могут не успевать рассасываться не только от полива к поливу, но и от одного года к другому. Это будет тогда, когда за сезон происходит несколько поливов с большими нормами или интенсивное выпадение атмосферных осадков.

Возьмем для примера  $R = 100$  м,  $a = 2000$  м<sup>2</sup>/сутки. Тогда будем иметь  $t = 1.25$  т. Определим, сколько времени потребуется, чтобы максимум бугра снизился в 10 раз, т. е. чтобы стало  $U = 0.1$  (фиг. 2). Для квадрата  $\tau = 11.1$  и для полосы  $\tau = 123$ , поэтому время опускания до  $1/10$  начальной высоты равно 14 суткам — для квадрата и 154 суткам — для полосы.

Отметим еще один случай, когда решение уравнения (1) получается в простом виде: при

$$h_0(x, y) = A \exp \{-\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2\} \quad (7)$$

имеем

$$h(x, y, t) = \frac{A}{\sqrt{\theta(\alpha, t) \vartheta(\beta, t)}} \exp \left( \frac{-\alpha^2 x^2}{\theta(\alpha, t)} + \frac{-\beta^2 y^2}{\vartheta(\beta, t)} \right), \quad \theta(\alpha, t) = 1 + 4\alpha^2 at \quad (8)$$

$$\vartheta(\beta, t) = 1 + 4\beta^2 at$$

Если  $h_0(x, y)$  представляется в виде суммы нескольких слагаемых, то и  $h(x, y, t)$  будет суммой соответствующих слагаемых. При растекании бугра наибольшая ордината его снижается, другие несколько приподнимаются, так что общий объем, в силу несжимаемости жидкости, все время остается постоянным. Поэтому один бугор действует на другой всегда таким образом, что в каждый момент в той или иной мере повышает его ординаты и замедляет растекание.

*Полив прямоугольной площади.* Будем считать, что полив производится с постоянной по времени интенсивностью, т. е. что в формуле (2) функция  $f(x, y, t)$  не зависит от  $t$ . Тогда под знаком интеграла можно сделать замену переменной:  $t - t_1 = t'$ ; получим (считая  $h_0(x, y) = 0$ )

$$h(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a} \int_0^t \frac{dt'}{t'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{-(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4at'} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (9)$$

Будем предполагать, что полив производится по поверхности прямоугольника  $-R \leq x \leq R$ ,  $-R_1 \leq y \leq R_1$ , над которым  $W = \varepsilon = \text{const}$ , причем вне прямоугольника  $W = 0$ . Тогда по формуле (9) будем иметь (при  $h_0(x, y) = H_0$ )

$$h(x, y, t) = \frac{\varepsilon}{4a\pi\sigma} \int_0^t \frac{dt'}{t'} \int_{-R}^R \exp \frac{-(x-\xi)^2}{4at'} d\xi \int_{-R_1}^{R_1} \exp \frac{-(y-\eta)^2}{4at'} d\eta + H_0$$

Аналогично задаче о растекании найдем

$$n(x, y, t) = H_0 + \frac{\varepsilon}{4\sigma} \int_0^t \left( \operatorname{erf} \frac{R-x}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erf} \frac{R+x}{2\sqrt{at}} \right) \left( \operatorname{erf} \frac{R_1-y}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erf} \frac{R_1+y}{2\sqrt{at}} \right) dt \quad (10)$$

В центре прямоугольной площади при  $x = y = 0$

$$h(0, 0, t) = H_0 + \frac{\varepsilon}{\sigma} \int_0^t \operatorname{erf} \frac{R}{2\sqrt{at}} \operatorname{erf} \frac{R_1}{2\sqrt{at}} dt$$

Для малых значений  $t$  аргументы сомножителей под знаком интеграла велики, сами сомножители близки к единице, и их можно представить в виде

$$\operatorname{erf} x = 1 - \operatorname{erfc} x, \quad \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

Применим асимптотическую формулу

$$\operatorname{erfc} x = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{2x^2} + \dots \right)$$



Фиг. 2

ошибка которой не превосходит первого из отбрасываемых членов. Отбросив  $1/2x^2$ , будем иметь

$$h(0, 0, t) - H_0(t) \approx \varepsilon \left\{ \frac{1}{\sigma} t - \sqrt{\frac{t}{\pi}} [f(\alpha) + f(\alpha_1)] - 2t f_1(\beta) \right\}$$

$$f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha^2}}{3\alpha^2} + \frac{2e^{-\alpha^2}}{3} + \frac{2\sqrt{\pi}\alpha}{3} \operatorname{erfc} \alpha, \quad f_1(\beta) = \frac{e^{-\beta^2}}{\beta} + e^{-\beta^2} - \beta E_i(-\beta)$$

$$\alpha = \frac{R}{2\sqrt{at}}, \quad \alpha_1 = \frac{R_1}{2\sqrt{at}}, \quad \beta = \frac{R^2 + R_1^2}{4at}$$

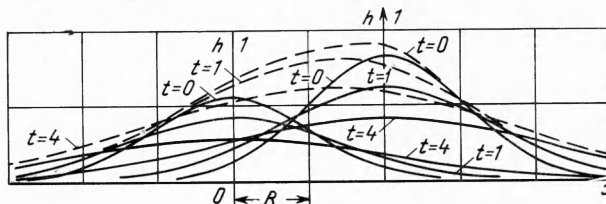
Это показывает, что для достаточно малых значений  $t$  подъем центра бугра происходит равномерно со скоростью  $\varepsilon / \sigma$ . Продолжительность стадии равномерного подъема зависит от размеров поливного участка. При заданном  $R$  она наибольшая для  $R_1 = \infty$ , т. е. для полосы. В этом случае точное равенство, как известно, имеет простой вид [1]

$$U(0, \tau) = \tau - \left[ \left( \tau + \frac{1}{2} \right) \operatorname{erf} \frac{1}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp \frac{-1}{4\tau} \right], \quad \tau = \frac{at}{R^2}$$

При  $\tau > 0.1$  линия  $u(0, \tau)$  отклоняется от прямой.

*Примеры.* На двух соседних участках шириной  $2R$  производился одновременный полив с интенсивностями  $\varepsilon$  на одном и  $1.5\varepsilon$  — на другом. После определенного промежутка времени был выключен полив. Как будет происходить растекание этих бугров

и как они влияют друг на друга? Для этого представляем форму бугра в момент выключения полива в виде уравнения (7), тогда растекание его будет определяться уравнением (8). На фиг. 3 даются графики растекания для  $t = 0$  (начальная форма поверхности),  $t = 1$ ,  $t = 4$ . Пунктирная линия получена после сложения ординат кривых свободной поверхности. Из графика видно, что происходит подъем грунтовых вод на больших расстояниях от поливных участков. Пунктирная линия, полученная от сложения этих бугров, перекрывает эти два бугра, и наблюдается течение со стороны большего бугра к меньшему.



Фиг. 3

Автор благодарит П. Я. Кочину за помощь и внимание при выполнении данной работы.

Поступила 8 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. П о л у б а р и н о в а-К о ч и н а П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
2. К о ч и н а Н. Н. Плоская задача о растекании бугра грунтовых вод в слое бесконечной глубины. ПММ, 1951, т. 15, вып. 6.
3. К о ч и н а Н. Н. Некоторые вопросы пространственного растекания грунтовых вод. ПММ, 1953, т. 17, вып. 3.

СКАЧОК ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ ЗВУКА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ НАСЫЩЕННЫХ ПАРОВ

А. Н. Соловьев, Е. П. Шелудяков

(Новосибирск)

При переходе из области перегретого пара в область влажного пара через кривую насыщения ряд величин, в том числе теплоемкость и термодинамическая скорость звука, изменяются скачком. Величина скачка скорости звука различна для разных веществ. Наибольшие скачки обнаружены у воды, ртути и калия. Скачок мал у бензола, четыреххлористого углерода и диэтилового эфира [1].

Получим аналитическое выражение для скачка термодинамической скорости звука. Скорость звука при подходе к кривой насыщения со стороны однофазной области определяется по формуле Лапласа

$$c^{(1)} = \left( -gv''^2 \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \right)^{1/2}, \text{ или } c^{(1)} = \left( -gv''^2 \frac{c_p}{c_v} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \right)^{1/2} \quad (1)$$

При этом учитывается соотношение

$$\left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = \frac{c_p}{c_v} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \quad (2)$$

Скорость звука в насыщенном паре при подходе из области двухфазных состояний описывается формулой, полученной В. В. Сычевым [2]

$$c^2 = v'' \frac{dp''}{dT} \left( \frac{gT}{c_v^{(2)}} \right)^{1/2} \quad (3)$$

В этих уравнениях два штриха относятся к насыщенному пару, а верхние индексы (1) и (2) означают подход со стороны однофазной и двухфазной областей соответственно.

Тогда скачок скорости звука можно записать в виде

$$\Delta c = c^{(1)} - c^{(2)} = \left( -gv''^2 \frac{c_p}{c_v} \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \right)^{1/2} - v'' \frac{dp''}{dT} \left( \frac{gT}{c_v^{(2)}} \right)^{1/2}$$

Пусть

$$c_v^{(2)} = c_v^{(1)} + \Delta c_v''$$