

вращения имеет место не только для цилиндра, но и для шара, на границе как плоских струй, так и осесимметричных, на водяных струях и воздушных.

Зависимость числа оборотов цилиндра от расходной скорости в струе оказывается практически линейной. Однако вращение начинается не при сколь угодно малой скорости, а лишь когда скорость достигает некоторой величины V_0 . Это обусловлено наличием постоянного момента трения оси цилиндра в подшипниках. В проведенных опытах цилиндр был насажен на часовую ось, вращающуюся в подшипниках, в качестве которых использовались рубиновые часовые камни. В этих условиях момент трения был весьма мал, так что величина V_0 не превосходила 1 м / сек , но она оказывалась разной для разных положений цилиндра.

Данные опытов в координатах

$$\zeta = \frac{\omega r}{V - V_0}, \quad \eta = \frac{y}{d}$$

представленные на фиг. 2, где $\omega r \text{ м / сек}$ — окружная скорость вращения цилиндра, $V \text{ м / сек}$ — скорость жидкости или газа на оси струи, $d \text{ мм}$ — диаметр цилиндра; точки 1, 2, 3 соответствуют цилиндрам с диаметрами $d = 3.5, 7, 10 \text{ мм}$.

В качестве величины y бралось расстояние от точки, при переходе через которую направление вращения меняло знак.

Результаты обработки опытов хорошо ложатся на одну кривую. Теоретического объяснения описанного здесь явления пока не дано.

Поступила 23 III 1965

О ДВИЖЕНИИ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ

В. М. Бузицов, Б. А. Луговцов, Е. И. Шер

(Новосибирск)

Рассматривается движение газового пузыря, возникающее под действием сил поверхностного натяжения в невесомой вязкой жидкости с градиентом температуры. Дана теория стационарного движения пузырька в поле с постоянным градиентом температуры в случае малых чисел Рейнольдса. Приведены результаты эксперимента, качественно согласующиеся с теорией¹.

Пусть в неограниченной невесомой вязкой жидкости имеется газовый пузырек радиуса r_0 . Будем рассматривать движение пузырька столь малого размера, что силами инерции можно пренебречь по сравнению с вязкими силами. В неравномерно нагретой жидкости вследствие зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры возникают силы, под действием которых пузырек может перемещаться.

Рассмотрим стационарное движение пузырька в жидкой среде с постоянным градиентом температуры. Известно [1], что в этом случае в покоящемся пузырьке градиент температуры также будет постоянным. Будем считать, что при движении пузырька градиент температуры внутри него сохраняет постоянное значение. Будем также пренебрегать зависимостью коэффициента вязкости от температуры.

При малых числах Рейнольдса уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости имеют следующий вид:

$$\text{grad } p = \eta \Delta v, \quad \text{div } v = 0 \quad (1)$$

Выберем систему координат так, чтобы градиент температуры был направлен по оси z . Пусть пузырек движется с постоянной скоростью V вдоль оси z , что очевидно из соображений симметрии. Перейдем в систему координат, связанную с центром пузырька, и рассмотрим задачу в сферических координатах. В этом случае уравнения (1) с учетом симметрии относительно оси z ($v_\varphi = 0$) в общепринятых обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \eta \left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\text{ctg } \theta}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{2U_r}{r^2} - \frac{2\text{ctg } \theta}{r^2} U_\theta \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \eta \left(\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{\text{ctg } \theta}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \quad (2) \\ \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{2U_r}{r} + \frac{U_\theta \text{ctg } \theta}{r} &= 0 \end{aligned}$$

¹ Замечание от редакции. Перед самым выходом выпуска журнала в свет авторы обратились с письмом в редакцию; им стала известна работа, в которой рассматривалась аналогичная задача The motion of bubbles in a vertical temperature gradient. N. O. Young, L. S. Goldstein, and M. J. Block. J. of Fluid mechanics, 1959, vol. 6, p. 3 по техническим причинам редакция не могла выполнить просьбы авторов задержать работу с тем, чтобы они могли сопоставить результаты.

Считая газ внутри пузырька несжимаемой вязкой жидкостью, можем написать для его движения уравнения, аналогичные (2). Условимся в дальнейшем все величины, относящиеся к газу, обозначать штрихом. Решение этих уравнений должно удовлетворить следующим граничным условиям:

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad U_r = -V \cos \theta, \quad U_\theta = V \sin \theta, \quad p = p_0 \quad (3)$$

$$\text{при } r = r_0 \quad U_r = U_r' = 0, \quad U_\theta = U_\theta' \quad (4)$$

$$\eta \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r_0} \right) = \eta' \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial U_r'}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta'}{\partial r} - \frac{U_\theta'}{r_0} \right) - \frac{1}{r_0} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}$$

$$p - 2\eta \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{2\sigma}{r_0} = p' - 2\eta' \frac{\partial U_r'}{\partial r}$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения. Зависимость σ от θ в силу сделанного выше предположения о постоянстве dT/dz внутри пузырька имеет вид

$$\sigma = \sigma_0 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \left(\frac{dT}{dz} \right) r_0 \cos \theta \quad (5)$$

Решение задачи ищем аналогично [2] в виде:

$$U_r = \left(A + \frac{B}{r} + \frac{C}{r^3} \right) \cos \theta$$

$$U_\theta = - \left(A + \frac{1}{2} \frac{B}{r} - \frac{1}{2} \frac{C}{r^3} \right) \sin \theta$$

$$p = D + \eta \frac{B}{r^2} \cos \theta$$

$$U_r' = (A' + B'r^2) \cos \theta \quad (6)$$

$$U_\theta' = - (A' + 2B'r^2) \sin \theta$$

$$p' = D' + \eta' 10B'r \cos \theta$$

Константы и скорость V находят-ся из граничных условий (3), (4) с учетом (5).

Для скорости движения пузырька в результате вычислений получаем

$$V = - \frac{2}{3} \frac{r_0}{2\eta + 3\eta'} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \frac{dT}{dz} \quad (7)$$

Так как $\partial \sigma / \partial T < 0$, то отсюда следует, что скорость движения пузырька направлена в сторону возрастания температуры. Обычно $\eta' \ll \eta$, и формулу (7) можно записать приближенно в виде

$$V = - \frac{r_0}{3\eta} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \frac{dT}{dz} \quad (8)$$

В случае воздушного пузырька в воде имеем

$$\eta = 0.01 \text{ г/см сек}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial T} = -0.15 \text{ эрг/см}^2 \text{ град}, \quad V = 15r_0 \frac{dT}{dz} \quad (9)$$

$$[V] = \text{см/сек}, \quad [r_0] = \text{см}, \quad \left[\frac{dT}{dz} \right] = \text{град/см}$$

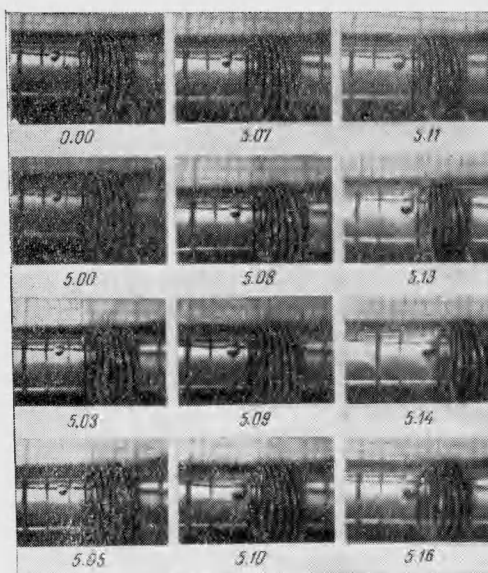
Полученный результат справедлив при условии, что число Рейнольдса

$$R = \frac{\rho r_0 V}{\eta} \ll 1 \quad (10)$$

В рассматриваемом случае это условие эквивалентно условию

$$500r_0^2 \frac{dT}{dz} \ll 1 \quad (11)$$

Приводим некоторые результаты экспериментов. Ввиду трудностей, связанных с наличием силы тяжести, вызывающей конвективное движение жидкости и всплывание



Фиг. 1

пузырьков, проведенный эксперимент имеет качественный характер. В горизонтально расположенной стеклянной трубке внутренним диаметром 2.5 мм, заполненной дистиллированной водой, помещается пузырек воздуха диаметром ~ 0.7 мм. На расстоянии нескольких миллиметров от него снаружи трубки была расположена нихромовая спираль, нагреванием которой создавался градиент температуры в воде. Движение пузыря регистрировалось при помощи киносъемки со скоростью 300 к/сек.

Результат эксперимента представлен на фигуре. Покоящийся вначале пузырек по истечении 5—6 сек после начала нагрева начинает двигаться. Как видно по фотографии, пузырек воздуха, расширяясь вследствие испарения, движется в сторону увеличения температуры. Таким образом, качественный результат эксперимента совпадает с выводом теории.

Авторы благодарят М. А. Лаврентьева за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила 2 VIII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. и Лившиц Е. М. Механика сплошных сред, Физматгиз, 1953.
2. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика, Изд-во АН СССР, 1952.

О ВЛИЯНИИ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ОТКРЫТОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ

О. Ф. Васильев, В. И. Квол

(Новосибирск)

В последнее время в теории пограничного слоя найден путь учета эффектов неустановившегося движения [1]. Вместе с тем, в гидравлике появляется все больший интерес к применению идей и методов теории пограничного слоя к рассмотрению потоков в каналах. Здесь сделана попытка применить этот гидродинамический подход при выводе закона сопротивления для турбулентного неустановившегося течения в открытых руслах.

§ 1. Вывод системы уравнений. Рассматриваются плоские нестационарные течения вязкой несжимаемой жидкости, описываемые системой уравнений Навье—Стокса. Выполним известное преобразование

$$t = (U/X)t_0, \quad x = Xx_0, \quad y = Yy_0, \quad u = Uu_0, \quad v = Vv_0, \quad p = \rho U^2 p_0$$

Тогда эта система уравнений примет безразмерную форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t_0} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{XV}{UY} v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y_0} &= \frac{F_x \bar{X}}{U^2} - \frac{\partial p_0}{\partial x_0} + \frac{\nu X}{Y^2 U} \left(\frac{Y^2}{X^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0^2} \right) \\ \frac{\partial v_0}{\partial t_0} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x_0} + \frac{XV}{UY} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y_0} &= \frac{F_y \bar{X}}{UV} - \frac{UX}{VY} \frac{\partial p_0}{\partial y_0} + \frac{\nu X}{Y^2 U} \left(\frac{Y^2}{X^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y_0^2} \right) \\ \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{XV}{YU} \frac{\partial v_0}{\partial y_0} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь приняты обычные в гидромеханике обозначения: t — время; (x, y) — декартова система координат, ось x направлена по неподвижному прямолинейному контуру; u, v — компоненты скорости соответственно по x и y ; p — давление; ρ и ν — плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости соответственно; F_x, F_y — компоненты объемной силы; X, Y, U, V — масштабы длин, компонент скорости.

Наложим на течение первое ограничение. Число Рейнольдса $R = UX/\nu$ велико, точнее — можно пренебречь величинами порядка малости $O(1/R)$ и выше.

Имеются четыре произвольных величины U, V, X, Y . Чтобы получить из (1.1) систему уравнений, зависящую от одного параметра, подчиним указанные величины трем условиям в двух вариантах

$$R = \frac{UX}{\nu}, \quad \frac{XV}{YU} = 1, \quad \nu X = Y^2 U \quad (1.2)$$

$$R = \frac{UX}{\nu}, \quad \frac{XV}{YU} = 1, \quad X = Y \quad (1.3)$$

Условия (1.2), как известно, приводят систему уравнений (1.1) к системе уравнений, зависящей от числа Рейнольдса R в области пограничного слоя, а условия (1.3) — в области внешнего потока.