

УДК 539.3

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

С. А. Анисимов, И. О. Богульский\*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

\* Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036 Красноярск

Предлагается алгоритм, по которому процесс численного решения сводится к последовательному расчету элементарных одномерных задач типа системы уравнений акустики.

**Введение.** Моделирование распространения плоских волн в анизотропном неоднородном упругом теле приводит к необходимости решать смешанную задачу для одномерной системы перевязанных между собой гиперболических уравнений. Алгоритм численного решения таких задач хорошо известен [1, 2] и основан на приведении системы к каноническому виду. В случае системы большой размерности такая процедура сопряжена со значительными техническими трудностями. В данной работе предлагается алгоритм, по которому процесс численного решения сводится к последовательному расчету элементарных одномерных задач типа системы уравнений акустики.

**Плоские волны в анизотропном упругом слое.** Рассмотрим процесс распространения в направлении оси  $z$  плоских волн в слоисто-неоднородном упругом слое  $0 \leq z \leq L$ , представляющем собой набор из  $K$  упругих слоев постоянной толщины  $H_i, i = 1, \dots, K$ , бесконечных в направлениях  $x$  и  $y$  (рис. 1). Будем считать эти слои трансверсально-изотропными. Для каждого из слоев в системе координат  $(x', y', z')$ , согласованной с кристаллографическими осями материала, закон Гука для трансверсально-изотропной среды (гексагональная система) можно записать в виде [3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y) - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_z, & \tau_{xy} &= 2\mu_1 \varepsilon_{xy}, & \varepsilon_y &= \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \nu_1 \sigma_x) - \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_z, \\ \tau_{xz} &= 2\mu_2 \varepsilon_{xz}, & \varepsilon_z &= -\frac{\nu_2}{E_2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E_2} \sigma_z, & \tau_{yz} &= 2\mu_2 \varepsilon_{yz}. \end{aligned} \quad (1)$$

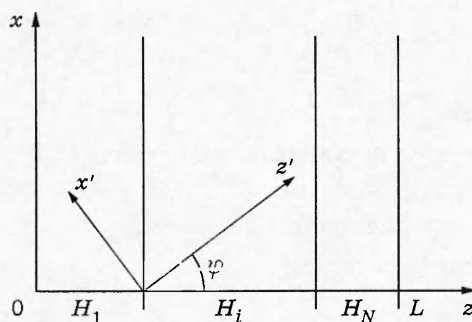


Рис. 1

Модули Юнга  $E_1$  и  $E_2$ , коэффициенты Пуассона  $\nu_1$  и  $\nu_2$  и модули сдвига  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , входящие в (1), связаны дополнительным соотношением  $E_1 = 2\mu_1(1 + \nu_1)$ .

Таким образом, трансверсально-изотропная среда в каждом слое характеризуется пятью независимыми модулями упругости, плотностью и наклоном кристаллографических осей к осям декартовой системы координат  $(x, y, z)$ .

Сделаем некоторые упрощающие предположения. Пусть граничные условия на поверхностях, перпендикулярных оси  $z$  ( $z = 0$  и  $z = L$ ), а также начальные напряжения и массовая скорость частиц при  $t = 0$  не зависят от координат  $x$  и  $y$ . Кроме того, предположим, что плоскость  $(z', x')$  совпадает с плоскостью  $(z, x)$ , так что наклон кристаллографической оси однозначно определяется одним углом  $\varphi$  наклона оси  $z'$  к оси  $z$ , а вектор скорости как в начальный момент времени, так и после лежит в плоскости  $(z, x)$ . Таким образом, рассматривается одномерная задача — неизвестные функции являются функциями только пространственной переменной  $z$  и времени  $t$ .

В качестве неизвестных функций рассматриваются две компоненты вектора массовой скорости  $u$  и  $v$  в направлениях  $z$  и  $x$  соответственно и нормальная  $\sigma_z$  и касательная  $\tau_{zx}$  компоненты тензора напряжений в системе координат  $(z, x)$ . Они удовлетворяют уравнениям движения

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (2)$$

и закону Гука, который после дифференцирования по времени запишем в форме

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial z} + B \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial t} = B \frac{\partial u}{\partial z} + C \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (3)$$

Здесь

$$A = a \cos^4 \varphi + 2b \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + c \sin^4 \varphi + \mu_2 \sin^2 2\varphi, \quad C = \frac{1}{4} (a - 2b + c) \sin^2 2\varphi + \mu_2 \cos^2 2\varphi,$$

$$B = -\frac{1}{2} (a \cos^2 \varphi - b \cos 2\varphi - c \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi + \mu_2 \cos 2\varphi \sin 2\varphi, \quad (4)$$

$$a = \frac{(1 - \nu_1)E_2^2}{E_2(1 - \nu_1) - 2E_1\nu_2^2}, \quad b = \frac{\nu_2 E_1 E_2}{E_2(1 - \nu_1) - 2E_1\nu_2^2}, \quad c = \frac{E_1(E_2 - \nu_2^2 E_1)}{(1 + \nu_1)E_2(1 - \nu_1) - 2E_1\nu_2^2}.$$

С учетом (4) несложно проверить, что матрица коэффициентов при производных по  $z$  в правой части (3) положительно определена. Для каждого слоя имеем одномерную систему четырех уравнений (2), (3) гиперболического типа [1] для определения четырех неизвестных функций  $u, v, \sigma_z, \tau_{zx}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sigma_z \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\rho \\ A & B & 0 & 0 \\ B & C & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sigma_z \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Скорость распространения возмущений в описанном материале определяется величиной наклона характеристик системы  $dz/dt = \pm c_+$ ,  $dz/dt = \pm c_-$ , которые вычисляются как собственные числа матрицы коэффициентов в правой части (5):

$$c_+^2 = \frac{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2\rho}, \quad c_-^2 = \frac{A + C - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2\rho}.$$

Заметим, что если  $A > C$ , то  $c_- \leq \sqrt{c}/\rho < \sqrt{A}/\rho \leq c_+$ .

Рассмотрим следующую задачу для системы уравнений (2), (3). В начальный момент времени все неизвестные функции заданы:

$$u(0, z) = u^0(z), \quad v(0, z) = v^0(z), \quad \sigma_z(0, z) = \sigma_z^0(z), \quad \tau_{zx}(0, z) = \tau_{zx}^0(z); \quad (6)$$

на поверхностях  $z = 0$  и  $z = L$  ограничимся краевыми условиями вида

$$(\psi_1^\pm u + \chi_1^\pm \sigma_z) \Big|_{z=0,L} = f_1^\pm, \quad (\psi_2^\pm v + \chi_2^\pm \tau_{zx}) \Big|_{z=0,L} = f_2^\pm, \quad (7)$$

где  $\psi_i^\pm, \chi_i^\pm, f_i^\pm$  ( $i = 1, 2$ ) — заданные функции времени. Соседние слои жестко сопряжены — векторы напряжений и скорости на их границе непрерывны.

**Численное решение на основе векторного расщепления.** Если рассматриваемые слои отличаются механическими свойствами, решение поставленной задачи можно получить только численно. Если материал является изотропным, т. е.  $E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2, \mu_1 = \mu_2$ , или угол наклона  $\varphi$  оси  $z'$  к оси  $z$  равен либо нулю, либо  $\pi/2$ , то  $B = 0$  и задача (5)–(7) полностью расщепляется на две независимые задачи вида

$$\rho \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (8)$$

$$W(0, z) = W^0(z), \quad P(0, z) = P^0(z), \quad (\psi^\pm W + \chi^\pm P) \Big|_{z=0,L} = f^\pm,$$

причем величинам  $W, P$  соответствуют в первой задаче  $u, \sigma_z, D = A$ , во второй —  $v, \tau_{zx}, D = C$ .

С помощью специальной, согласованной со скоростью распространения возмущений дискретизации расчетной области можно получить точное решение обеих задач. В случае  $B \neq 0$  способ решения полной задачи известен [1, 2] и сводится к процедуре диагонализации матрицы в (5).

Запишем систему уравнений (5) в виде

$$\rho \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = D \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z}, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Расчетную область на плоскости  $(z, t)$  прямыми, параллельными  $z$  и  $t$ , разобьем на элементарные прямоугольники  $\Omega = \{z_j \leq z \leq z_{j+1}, t_k \leq t \leq t_{k+1}\}$  и в каждом из них введем локальную систему координат  $(\xi, \eta)$ :

$$\xi = \frac{2}{h} \left[ z - \frac{1}{2} (z_j + z_{j+1}) \right], \quad \eta = \frac{2}{\tau} \left[ t - \frac{1}{2} (t_k + t_{k+1}) \right], \quad h = z_{j+1} - z_j, \quad \tau = t_{k+1} - t_k.$$

В качестве приближенного решения в  $\Omega$  примем линейные по  $\xi$  и  $\eta$  полиномы

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 \eta, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 \eta, \quad \mathbf{W}' = \mathbf{W}'_0 + \mathbf{W}'_1 \xi, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{P}'_0 + \mathbf{P}'_1 \xi, \quad (10)$$

которые удовлетворяют системе уравнений

$$\rho \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = D \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z}. \quad (11)$$

Из (10), (11) следуют формулы для вычисления  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{P}$  на верхнем слое по времени

$$\mathbf{W}^{j+1/2} = \mathbf{W}_{j+1/2} + \frac{\tau}{\rho h} (\mathbf{P}_{j+1} - \mathbf{P}_j), \quad \mathbf{P}^{j+1/2} = \mathbf{P}_{j+1/2} + \frac{\tau}{\rho h} D (\mathbf{W}_{j+1} - \mathbf{W}_j), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{j+1/2} &= \mathbf{W} \Big|_{\eta=-1}, & \mathbf{W}^{j+1/2} &= \mathbf{W} \Big|_{\eta=1}, & \mathbf{W}_{j+1} &= \mathbf{W}' \Big|_{\xi=1}, & \mathbf{W}_j &= \mathbf{W}' \Big|_{\xi=-1}, \\ \mathbf{P}_{j+1/2} &= \mathbf{P} \Big|_{\eta=-1}, & \mathbf{P}^{j+1/2} &= \mathbf{P} \Big|_{\eta=1}, & \mathbf{P}_{j+1} &= \mathbf{P}' \Big|_{\xi=1}, & \mathbf{P}_j &= \mathbf{P}' \Big|_{\xi=-1}. \end{aligned}$$

Дополнительные уравнения для определения величин с целочисленными индексами строятся на основе справедливого для всех полиномов (10), удовлетворяющих (11), энергетического тождества

$$\iint_{\Omega} \rho \mathbf{W}_0 \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} d\Omega + \iint_{\Omega} \mathbf{P}_0 \frac{\partial \mathbf{W}'}{\partial z} d\Omega + \iint_{\Omega} Q d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{W}' \mathbf{P}'}{\partial z} d\Omega,$$

где  $Q$  — мощность искусственной диссипации энергии, которую с учетом (10), (11) можно записать в виде

$$Q = \left( \mathbf{W}'_0 - \mathbf{W}_{j+1/2} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial z} \right) \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial z} + \left( \mathbf{P}'_0 - \mathbf{P}_{j+1/2} - \frac{\tau}{2} \tilde{D} \frac{\partial \mathbf{W}'}{\partial z} \right) \frac{\partial \mathbf{W}'}{\partial z}. \quad (13)$$

Матрицу  $D$  представим в виде

$$D = T \tilde{D} T^{-1}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & 0 \\ 0 & \varkappa_2 \end{pmatrix}, \quad \varkappa_1 = \rho c_+^2, \quad \varkappa_2 = \rho c_-^2,$$

где  $\tilde{D}$  — диагональная матрица, а  $T$  составляется из нормированных собственных векторов матрицы  $D$ , отвечающих собственным числам  $\varkappa_1$  и  $\varkappa_2$ :

$$T = \begin{pmatrix} -\theta & 1 \\ 1 & \theta \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = -\frac{1}{1+\theta^2} \begin{pmatrix} \theta & -1 \\ -1 & -\theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{B}{\varkappa_2 - \varkappa_1}.$$

Дополнительные уравнения сформулируем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{W}'_0 - \mathbf{W}_{j+1/2} - \frac{1}{2} T \begin{pmatrix} (\tau + \omega_1)/\rho & 0 \\ 0 & (\tau + \omega_2)/\rho \end{pmatrix} T^{-1} \frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial z} &= 0, \\ \mathbf{P}'_0 - \mathbf{P}_{j+1/2} - \frac{1}{2} T \begin{pmatrix} (\tau + \gamma_1)\varkappa_1 & 0 \\ 0 & (\tau + \gamma_2)\varkappa_2 \end{pmatrix} T^{-1} \frac{\partial \mathbf{W}'}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Система уравнений для определения целочисленных величин после этого может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_{j+1} + \mathbf{W}_j \\ \mathbf{P}_{j+1} + \mathbf{P}_j \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{j+1} - \mathbf{W}_j \\ \mathbf{P}_{j+1} - \mathbf{P}_j \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{j+1/2} \\ \mathbf{P}_{j+1/2} \end{pmatrix},$$

где  $M$  — матрица  $4 \times 4$ , элементы которой зависят от констант диссипации  $\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2$ . В [4] показано, что условие неотрицательности констант диссипации обеспечивает устойчивость и сходимость приближенного решения к точному, а формулы вычисления  $\mathbf{W}_j, \mathbf{P}_j$  будут явными, если собственные числа матрицы  $M$  равны либо 1, либо  $-1$ .

Для вычисления величин с целочисленными индексами используются явные формулы

$$\begin{aligned} \left( \theta d_- u - d_- v + \frac{\theta}{d_-} \sigma_z - \frac{1}{d_-} \tau_{zx} \right)_j &= \left( \theta d_- u - d_- v + \frac{\theta}{d_-} \sigma_z - \frac{1}{d_-} \tau_{zx} \right)_{j+1/2}, \\ \left( -d_+ u - \theta d_+ v - \frac{1}{d_+} \sigma_z - \frac{\theta}{d_+} \tau_{zx} \right)_j &= \left( -d_+ u - \theta d_+ v - \frac{1}{d_+} \sigma_z - \frac{\theta}{d_+} \tau_{zx} \right)_{j+1/2}, \end{aligned}$$

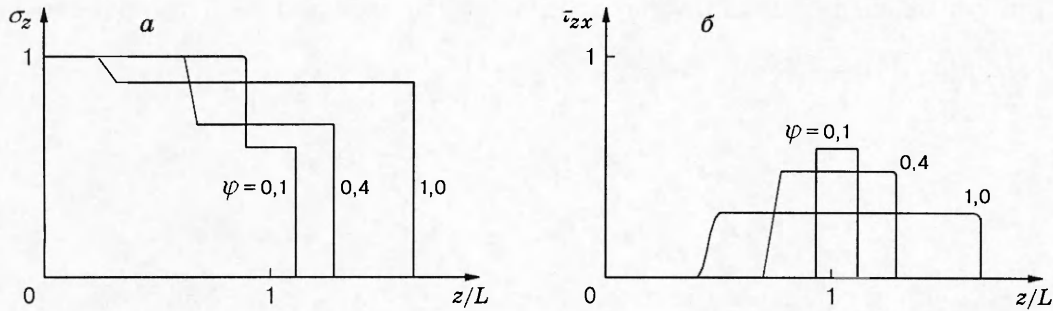


Рис. 2

$$\left( -\theta d_- u + d_- v + \frac{\theta}{d_-} \sigma_z - \frac{1}{d_-} \tau_{zx} \right)_{j+1} = \left( -\theta d_- u + d_- v + \frac{\theta}{d_-} \sigma_z - \frac{1}{d_-} \tau_{zx} \right)_{j+1/2},$$

$$\left( d_+ u + \theta d_+ v - \frac{1}{d_+} \sigma_z - \frac{\theta}{d_+} \tau_{zx} \right)_{j+1} = \left( d_+ u + \theta d_+ v - \frac{1}{d_+} \sigma_z - \frac{\theta}{d_+} \tau_{zx} \right)_{j+1/2}$$

( $d_- = \sqrt{\rho c_-}$ ,  $d_+ = \sqrt{\rho c_+}$ ), условия непрерывности величин  $u_j$ ,  $v_j$ ,  $(\sigma_z)_j$ ,  $(\tau_{zx})_j$  на общих границах между двумя соседними ячейками и краевые условия (7). Схема устойчива, если выполнено ограничение на шаг по времени  $\tau$ :

$$c_+ \tau \leq h. \tag{14}$$

Следует сказать, что даже в случае равенства в (14) схема обладает положительной искусственной диссипацией, пропорциональной величине  $(c_+/c_- - 1)$ , и во всех случаях, когда  $c_- < c_+$ , на фронте волны, движущейся со скоростью  $c_-$ , будет наблюдаться размазывание разрыва.

На рис. 2 приведены результаты тестового расчета сформулированной задачи для одного слоя, когда  $E_1 = E_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $\mu_1 = 0$ ,  $\nu_2 E_2 / (1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2) = \mu_2$ . В этом случае  $A = \mu_2(1 + \sin^2 2\varphi)$ ,  $C = \mu_2 \cos^2 2\varphi$ ,  $B = \mu_2 \cos 2\varphi \sin 2\varphi$ . Графики нормального  $\sigma_z$  и касательного  $\tau_{zx}$  напряжений приведены для трех значений угла  $\varphi = 0,1; 0,4; 1$ . На рис. 2 представлены результаты, полученные на 200-м шаге по времени. Начальные условия приняты нулевыми, к поверхности  $z = 0$  приложено нормальное ударное воздействие:  $\sigma_z = 1$ . Заметим, что в отличие от случая изотропного материала даже только при нормальном ударе оба графика содержат два разрыва.

**Итерационная процедура решения задачи.** Описанный выше алгоритм решения сводится к приведению исходной системы уравнений в каждом из слоев к каноническому виду. Для случая матрицы большой размерности такая процедура сопряжена со значительными техническими трудностями. Например, отказ от предположения о плоскопараллельном движении частиц привел бы к системе перевязанных между собой шести уравнений. В двумерном случае задача становится еще более сложной.

В [4] предлагается итерационная процедура решения двумерных задач динамической теории упругости, основанная на двухэтапном решении одномерных задач, на которые расщепляется двумерная. Суть ее состоит в учете «мешающих» членов уравнений только на втором этапе в виде «поправочных» слагаемых. Этот же вычислительный прием используем при решении системы (5).

Процедура численного решения системы (9) остается той же вплоть до формулировки дополнительных уравнений. Разбив счетную область на элементарные прямоугольники  $\Omega$  и выбрав в качестве приближенного решения в  $\Omega$  линейные полиномы (10), получим

формулы для вычисления приближенного решения на верхнем слое по времени

$$\begin{aligned}
 u^{j+1/2} &= u_{j+1/2} + \frac{\tau}{\rho h} [(\sigma_z)_{j+1} - (\sigma_z)_j], & v^{j+1/2} &= v_{j+1/2} + \frac{\tau}{\rho h} [(\tau_{zx})_{j+1} - (\tau_{zx})_j], \\
 \sigma_z^{j+1/2} &= (\sigma_z)_{j+1/2} + \frac{\tau}{h} A(u_{j+1} - u_j) + \frac{\tau}{h} B(v_{j+1} - v_j), \\
 \tau_{zx}^{j+1/2} &= (\tau_{zx})_{j+1/2} + \frac{\tau}{h} B(u_{j+1} - u_j) + \frac{\tau}{h} C(v_{j+1} - v_j).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Запишем мощность искусственной диссипации  $Q$  (13) в развернутой форме

$$\begin{aligned}
 Q &= \left( u'_0 - u_{j+1/2} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right) \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \left( (\sigma'_z)_0 - (\sigma_z)_{j+1/2} - \frac{\tau}{2} A \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\tau}{2} B \frac{\partial v'}{\partial z} \right) \frac{\partial u'}{\partial z} + \\
 &+ \left( v'_0 - v_{j+1/2} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z} \right) \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z} + \left( (\tau_{zx})'_0 - (\tau_{zx})_{j+1/2} - \frac{\tau}{2} C \frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\tau}{2} B \frac{\partial u'}{\partial z} \right) \frac{\partial v'}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

Дополнительные уравнения формулируем в виде

$$u'_0 - u_{j+1/2} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} = \frac{\gamma}{2\rho} \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z}, \quad (\sigma'_z)_0 - (\sigma_z)_{j+1/2} - \frac{\tau}{2} A \frac{\partial u'}{\partial z} = \frac{\gamma}{2} A \frac{\partial u'}{\partial z} + \alpha \tau B \left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^*; \tag{16}$$

$$v'_0 - v_{j+1/2} - \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z} = \frac{\omega}{2\rho} \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z}, \quad (\tau_{zx})'_0 - (\tau_{zx})_{j+1/2} - \frac{\tau}{2} C \frac{\partial v'}{\partial z} = \frac{\omega}{2} C \frac{\partial v'}{\partial z} + \beta \tau B \left( \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^*, \tag{17}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \omega$  — константы диссипации. Решения одномерных задач (16), (17) вычисляются в два этапа. На первом этапе полагаем  $\alpha$  и  $\beta$  равными нулю и решаем две независимые задачи вида (8) (для изотропной среды), полученные в результате производные обозначаем  $(\partial u'/\partial z)^*$  и  $(\partial v'/\partial z)^*$ . На втором этапе вновь решаем две независимые задачи вида (8), где  $\alpha$  и  $\beta$  полагаем равными  $1/2$  (см. [4]). Мощность искусственной диссипации при этом имеет вид

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\gamma}{2\rho} \left( \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{\omega}{2\rho} \left( \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z} \right)^2 + \frac{\gamma}{2} A \left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^2 - \\
 &- \tau B \left[ \frac{\partial u'}{\partial z} \frac{\partial v'}{\partial z} - \alpha \frac{\partial u'}{\partial z} \left( \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^* - \beta \left( \frac{\partial u'}{\partial z} \right)^* \frac{\partial v'}{\partial z} \right] + \frac{\omega}{2} C \left( \frac{\partial v'}{\partial z} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Решения одномерных задач (16), (17) вычисляются по явной схеме, если  $\gamma = h/\sqrt{A/\rho} - \tau$ ,  $\omega = h/\sqrt{C/\rho} - \tau$ .

Можно показать, что приближенное решение сходится к точному, если выполнены неравенства  $\gamma \geq 0, \omega \geq 0$ , из которых следует ограничение на шаг по времени

$$\tau \leq h/\sqrt{\max(A, C)/\rho}. \tag{18}$$

Таким образом, описанный алгоритм решения полной задачи исключает процедуру приведения матрицы к диагональному виду и сводится к решению необходимого набора гиперболических систем двух уравнений (систем уравнений акустики).

Следует отметить, что использование в схеме максимально допустимого по условию (18) шага по времени, как и в описанном выше алгоритме, не позволяет получать точное решение задачи, так как одномерные задачи (16), (17), описывающие распространение возмущений с различными скоростями, решаются хотя и независимо, но на одной и той же сетке, в силу чего мощность искусственной диссипации  $Q$  не обращается в нуль, а пропорциональна множителю  $\sqrt{\max(A, C)/\min(A, C)} - 1$ .

В результате тестовых расчетов по схеме (15)–(17) на 200-м шаге по времени получены графики напряжений  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$  и скоростей, совпадающие с приведенными на рис. 2.

В качестве другого примера рассмотрим задачу о прохождении волны через многослойную упругую преграду. Известно [5], что с помощью слоистости можно существенно улучшить экранирующие свойства конструкции. Рассмотрим слоистый материал, представляющий собой пакет из двадцати расположенных перпендикулярно оси  $z$  пластин одинаковой толщины  $H$ , вырезанных из одного и того же трансверсально-упругого материала таким образом, что кристаллографическая ось  $z'$  в каждом слое либо совпадает с осью  $z$  ( $\varphi = 0$ ), либо перпендикулярна ей ( $\varphi = \pi/2$ ). Слои чередуются; скорость продольных волн в каждом четном слое в два раза больше, чем в нечетном.

Пусть на пакет из полупространства  $z < 0$  под прямым углом падает плоская продольная монохроматическая волна. Граничные условия при  $z = 0$  в этом случае имеют вид

$$(\sigma_z - \rho c_p u) \Big|_{z=0} = \sin(2\pi k c_p t / H), \quad \tau_{zx} \Big|_{z=0} = 0,$$

где  $k$  — число волн, укладываемых в слое толщины  $H$ . На правом конце формулируются неотражающие условия [4]

$$(\sigma_z + \rho c_p u) \Big|_{z=L} = 0, \quad (\tau_{zx} + \rho c_s v) \Big|_{z=L} = 0$$

( $c_p$ ,  $c_s$  — скорости продольных и поперечных волн соответственно).

При достаточно длительном счете устанавливается некоторый квазистационарный режим. В [5] сформулирована задача: спроектировать из заданного набора материалов конструкцию, максимально гасящую поток волновой энергии, прошедшей в полупространство  $z > L$ . Рассмотрим более простую задачу: определить число  $k$  (т. е. частоту падающей волны), при котором поток волновой энергии, характеризуемый квадратом отношения амплитуд прошедшей и падающей волн, будет минимальным. Для рассмотренной слоистой конструкции численный эксперимент дает значение  $k \approx 0,7$ . На рис. 3, а приведен график  $\sigma_z$  на 2000-м шаге по времени (за это время волна пробегает по пакету примерно 6,5 раз). Эту же задачу для пакета из такого же количества слоев рассмотрим в случае, когда нечетные слои имеют нулевой наклон оси  $z'$  к оси  $z$ , а четные —  $\pi/6$ . Примем следующие значения параметров слоев:  $\nu_1 E_1 / (1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1) = 2\mu_1$ ,  $\mu_2 = 2\mu_1$ , тогда в нечетных слоях  $A = 4\mu_1$ ,  $C = 2\mu_1$ ,  $B = 0$ , в четных  $A = 19\mu_1/4$ ,  $C = 5\mu_1/4$ ,  $B = \sqrt{3}\mu_1/4$ . Считаем, что

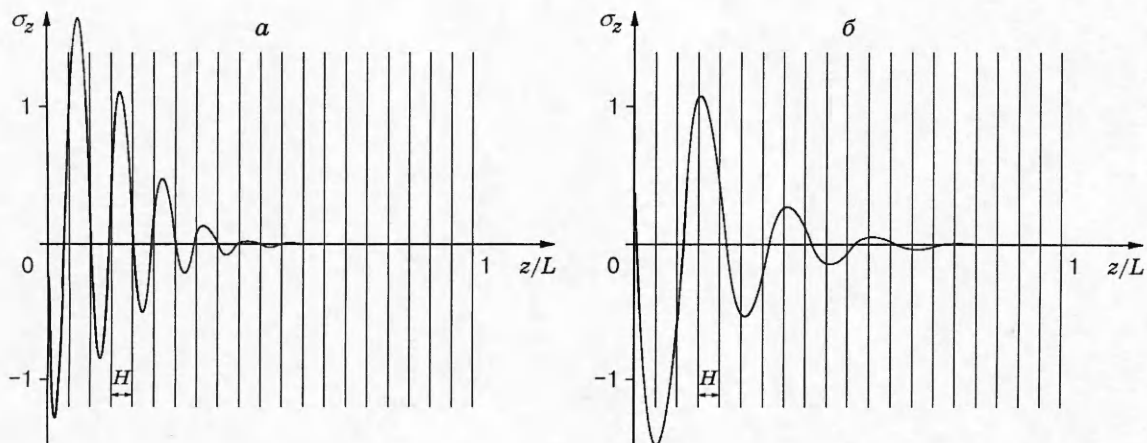


Рис. 3

монохроматическая волна той же интенсивности, что и в предыдущей задаче, падает из полупространства  $z < 0$  под углом  $\pi/4$  к пакету. На рис. 3,б приведен график нормального напряжения  $\sigma_z$  на 1700-м шаге по времени. В результате вычислений  $k \approx 0,35$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00434).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
2. Анисимов С. А., Богоульский И. О. Алгоритм независимой аппроксимации недифференциальных членов при численном решении краевых задач для систем гиперболических уравнений // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1994. Вып. 109. С. 34–48.
3. Шермергор Т. Д. Теория упругости микрооднородных сред. М.: Наука, 1977.
4. Анисимов С. А., Богоульский И. О. Численное решение задач динамики упругих тел. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1995.
5. Каниболотский М. А., Уржумцев Ю. С. Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989.

*Поступила в редакцию 26/V 1997 г.*

---