

максимальное значение которого при $t \rightarrow \infty$

$$(3.4) \quad \Delta \varepsilon_{\max}^H = R\sigma_1/k.$$

Найденных результатов достаточно для определения постоянных R и k . Полагая ε_1^H , $\Delta \varepsilon_{\max}^H$ и t_1 известными из эксперимента, из (3.4) имеем $R/k = \Delta \varepsilon_{\max}^H / \sigma_1$. Подставляя это значение в (3.3), получаем уравнение для нахождения коэффициента k :

$$\frac{\sigma \Delta \varepsilon_{\max}^H t_1 - \varepsilon_1^H \sigma_1}{\sigma \Delta \varepsilon_{\max}^H} k + \exp(-kt_1) = 1.$$

Итак, разработанная на основании термодинамических представлений о неравновесности состояния в процессе неупругой деформации твердого тела теория неравновесной деформации не противоречит физическим законам. Она представляет неупругую деформацию как результат перехода системы из неравновесного в равновесное состояние, стирая тем самым границу между пластической и вязкой деформациями, возведенную искусственно только для удобства теоретических расчетов и не имеющую места в физических процессах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1973.— Т. 2.
2. Вакуленко А. А. К вопросу о возможности необратимых квазистатических процессов в макросистеме // ПММ.— 1984.— Т. 48, вып. 4.
3. Руенко К. Н., Блинов Э. И. Аналитическое описание термоупругопластического деформирования твердого тела // ПМ.— 1981.— Т. 11, вып. 17.
4. Блинов Э. И. О возможном пути построения кинетической теории деформации // Изв. АН СССР. МТТ.— 1989.— № 5.
5. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика.— М.: Наука, 1983.
6. Обратимый процесс // Физический энциклопедический словарь.— М.: Сов. энциклопедия, 1983.
7. Сивухин В. Д. Примечания редактора/Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика.— М.: Наука, 1983.
8. Руенко К. Н. Теория пластичности и неустановившейся ползучести.— Львов: Вища шк., 1981.
9. Руенко К. Н. Особенности неупругой деформации твердых тел.— Львов: Вища шк., 1986.

г. Львов

Поступила 16/VII 1990 г.

УДК 539.375

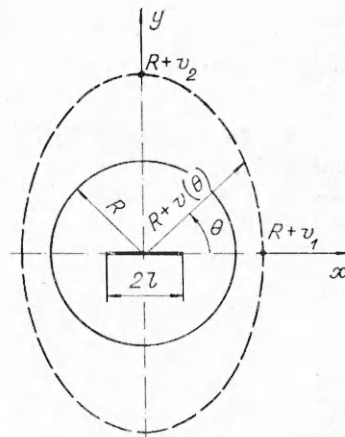
А. В. Бойко

НЕКОТОРЫЕ ЭФФЕКТЫ ДВУХОСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ

Рассматривается упругое равновесие круговой пластины с центральной трещиной при заданных на границе пластины радиальных перемещениях, распределенных по эллиптическому закону. Задача сведена к сингулярному интегральному уравнению. Получены численные и приближенные аналитические решения, которые сравниваются между собой. Выявлена зависимость коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины от параметра двухосности нагружения, в качестве которого принято отношение перемещений по главным осям деформирования пластины. Установлена возможность устойчивого роста трещины. Отмечены практические приложения полученных результатов.

1. **Постановка задачи** обусловлена прежде всего необходимостью создания математической модели для интерпретации экспериментальных результатов, получаемых на специальном оборудовании, позволяющем реализовать двухосное растяжение образца в виде круговой пластины заданными радиальными перемещениями. Такой подход является пер-

спективным с точки зрения практических со-
 образований. Действительно, если в конструк-
 ции образовалась трещина, то почти всегда
 имеется возможность измерить перемещения
 на границе некоторой окружающей трещину
 сравнительно небольшой по размерам обла-
 сти. В связи с вышеизложенным представ-
 лает интерес рассмотреть задачу теории упру-
 гости для круговой пластины радиуса R с
 центральной трещиной длиной $2l$ при задан-
 ных на границе пластины — окружности
 L_0 — радиальных перемещений v_ρ (рис. 1).



Р и с. 1

2. Интегральное уравнение задачи. Сфор-
 мулированная задача на основании [1] сво-
 дится к решению сингулярного интеграль-
 ного уравнения относительно неизвестной
 функции $g(t)$, пропорциональной производ-
 ной от разрыва перемещений на берегах трещины:

$$(2.1) \quad \frac{1}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{g(t)}{t - t_0} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l S(t_0, t) g(t) dt = F(t_0), \quad -l < t_0 < l$$

при условии

$$\int_{-l}^l g(t) dt = 0,$$

где

$$S(t_0, t) = \frac{4t}{\kappa(\kappa-1)R^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{(\kappa^2+7)t - 6t_0}{R^2 - tt_0} - \frac{2}{\kappa} \frac{t(t-t_0)(2t-3t_0)}{(R^2 - tt_0)^2} - \frac{2}{\kappa} \frac{t^2 t_0 (t-t_0)}{(R^2 - tt_0)^3}$$

$$(2.2) \quad F(t_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \left\{ f(t) \left[\frac{1}{\kappa(\kappa-1)} \frac{\kappa t - t_0}{t(t-t_0)} + \frac{t}{R^2 - tt_0} \right] + \overline{f(t)} \left[\frac{1}{\kappa(\kappa-1)} \frac{\kappa R^2 - tt_0}{t(R^2 - tt_0)} - \frac{R^2}{\kappa} \frac{t-t_0}{(R^2 - tt_0)^2} \right] \right\} dt;$$

$$(2.3) \quad f(t) = \frac{2\mu}{R} \left(v_\rho - t \frac{dv_\rho}{d\theta} \right).$$

Здесь μ — модуль сдвига; $\kappa = 3-4\nu$ для плоской деформации и $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ для обобщенного плоского напряженного состояния; ν — коэффициент Пуассона.

Закон распределения радиальных перемещений на границе круга выберем в форме

$$(2.4) \quad v_\rho(\theta) = v_1 \cos^2 \theta + v_2 \sin^2 \theta$$

(v_1 и v_2 — радиальные перемещения соответственно вдоль оси абсцисс и ординат (см. рис. 1)). Указанный выбор перемещений приводит к тому, что деформированный контур пластины при малых v_1 и v_2 приобретает форму, близкую к эллиптической.

С учетом (2.4) функция (2.3) принимает вид

$$(2.5) \quad f(\theta) = \frac{2\mu}{R} \frac{v_1 + v_2}{2} (1 + b \cos 2\theta + 2ib \sin 2\theta),$$

где $b = (v_1 - v_2)/(v_1 + v_2)$ или $b = (b_1 - 1)/(b_1 + 1)$; $b_1 = v_1/v_2$. Под-

ставляя (2.5) в (2.2) и выполнив интегрирование, находим

$$(2.6) \quad F(t_0) = -\frac{2\mu}{R} \frac{v_1 + v_2}{2} \left(\frac{2}{\kappa - 1} - \frac{b}{2} - \frac{3b}{2\kappa} + \frac{6b}{\kappa R^2} t_0^2 \right).$$

3. Численное решение. Решение сингулярного интегрального уравнения (2.1) получим численным методом, предложенным в [2]. Учитывая, что в силу симметрии задачи $g(t) = -g(-t)$, запишем уравнение (2.1) для интервала интегрирования $[0, l]$ как

$$(3.1) \quad \frac{1}{\pi i} \int_0^l \frac{2t}{t^2 - t_0^2} g(t) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_0^l [S(t_0, t) - S(t_0, -t)] g(t) dt = F(t_0),$$

$$0 < t_0 < l.$$

Произведя в (3.1) замену переменных $t = l\tau$, $t_0 = lt_0$, $0 < \tau$, $\tau_0 < 1$, имеем

$$(3.2) \quad \int_0^1 \left\{ \frac{2\tau}{\tau^2 - \tau_0^2} + \frac{1}{2} [M(\tau_0, \tau) - M(\tau_0, -\tau)] \right\} g(\tau) d\tau = \pi i L(\tau_0),$$

$$M(\tau_0, \tau) =$$

$$= \frac{\lambda^2}{\kappa} \left[\frac{4\tau}{\kappa - 1} + \frac{(\kappa^2 + 7)\tau - 6\tau_0}{1 - \lambda^2 \tau \tau_0} - 2\lambda^2 \frac{\tau(\tau - \tau_0)(2\tau - 3\tau_0)}{(1 - \lambda^2 \tau \tau_0)^2} - 2\lambda^4 \frac{\tau^2 \tau_0 (\tau - \tau_0)^2}{(1 - \lambda^2 \tau \tau_0)^3} \right],$$

$$L(\tau_0) = -\frac{2\mu}{R} \frac{v_1 + v_2}{2} \left[\frac{2}{\kappa - 1} - \frac{b}{2\kappa} (\kappa + 3 - 12\lambda^2 \tau_0^2) \right], \quad \lambda = \frac{l}{R}.$$

В уравнении (3.2) значению $\tau = 1$ соответствует положение вершины трещины, а $\tau = 0$ — центр трещины. Нетрудно показать, что для данной задачи неизвестная функция $g(t)$ является чисто мнимой. Представим ее в виде

$$(3.3) \quad g(t) = -\frac{2\mu}{(\kappa - 1)R} i \sqrt{\frac{\tau}{1 - \tau}} u(\tau)$$

($u(\tau)$ — новая неизвестная функция). Подставляя (3.3) в (3.2) и следуя изложенному в [2] методу, сингулярное интегральное уравнение (3.2) аппроксимируем системой линейных алгебраических уравнений относительно $u_m \approx u(\tau_m)$:

$$(3.4) \quad \sum_{m=1}^n A_{km} u_m \left\{ \frac{2\tau_m}{\tau_m^2 - \tau_{0k}^2} + \frac{1}{2} [M(\tau_{0k}, \tau_m) - M(\tau_{0k}, -\tau_m)] \right\} =$$

$$= \pi \left[1 - b \frac{\kappa - 1}{4\kappa} (\kappa + 3 - 12\lambda^2 \tau_{0k}^2) \right], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь $\tau_m = \sin^2 \frac{m\pi}{2n}$, $m = 1, 2, \dots, n$; $\tau_{0k} = \sin^2 \frac{2k-1}{4n} \pi$, $k = 1, 2, \dots, n$;

$$A_m = \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{m\pi}{2n}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1; \quad A_n = \frac{\pi}{2n}.$$

На основании полученной в [3] формулы, связывающей функцию $g(t)$ и коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины k_1 , находим

$$(3.5) \quad \frac{k_1 \sqrt{R} (\kappa - 1)}{2\mu (v_1 + v_2)} = \sqrt{2\pi \lambda \mu} (1).$$

Значение $u(1) \approx u_n$, входящее в формулу (3.5), определяется непосредственно из решения системы (3.4), что является одним из преимуществ примененного численного метода.

4. Приближенное аналитическое решение. Наряду с численным получим приближенное аналитическое решение уравнения (2.1) при малых

значениях $\lambda = l/R$ (отношение полудлины трещины к радиусу круга). В разложении ядра уравнения по степеням λ удержим члены, порядок которых не превышает λ^2 , и отнесем в (2.1) длины к l . Тогда получим приближенное уравнение

$$(4.1) \quad \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{t-t_0} dt + \frac{\lambda^2}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left(4\eta t - \frac{6t_0}{\kappa}\right) g(t) dt = F(t_0), \quad -1 < t_0 < 1$$

при условии

$$(4.2) \quad \int_{-1}^1 g(t) dt = 0,$$

где $F(t_0)$ определяется формулой (2.6); $\eta = (\kappa^3 - \kappa^2 + 7\kappa - 3)/[4\kappa(\kappa - 1)]$. Введем обозначение

$$(4.3) \quad \int_{-1}^1 t g(t) dt = A - \text{const.}$$

Тогда уравнение (4.1) с учетом (4.2) преобразуется к виду

$$(4.4) \quad \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{t-t_0} dt = \pi i F(t_0) - 2\eta \lambda^2 A.$$

Неизвестную функцию $g(t)$ будем разыскивать в классе неограниченных на концах интервала интегрирования функций. Решение уравнения (4.4) при условии (4.2) записывается как [4]

$$(4.5) \quad g(t_0) = -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} [\pi i F(t) - 2\eta \lambda^2 A]}{t-t_0} dt.$$

Выполнив интегрирование в (4.5), имеем

$$(4.6) \quad g(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \left[i\alpha \left(\frac{\gamma}{2} - c - \gamma t^2 \right) - \frac{2\eta \lambda^2}{\pi} A \right].$$

Здесь $\alpha = \frac{2\mu}{R} \frac{v_1 + v_2}{2}$, $c = \frac{2}{\kappa - 1} - \frac{b}{2} - \frac{3b}{2\kappa}$; $\gamma = \frac{6b\lambda^3}{\kappa}$. Подставляя (4.6) в (4.3), приходим к уравнению относительно неизвестной A :

$$(4.7) \quad \int_{-1}^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \left[i\alpha \left(\frac{\gamma}{2} - c + \gamma t^2 \right) - \frac{2\eta \lambda^2}{\pi} A \right] dt = A.$$

Решая (4.7), имеем $A = -\alpha \pi i (c + \gamma/4)/[2(1 + \eta \lambda^2)]$, а используя (4.6), получаем

$$(4.8) \quad g(t) = \frac{it}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\alpha}{2(1 + \eta \lambda^2)} [\gamma(1 - 2t^2) - 2c]$$

(в квадратной скобке сохранены слагаемые, порядок которых не превышает λ^2).

На основании полученной в [3] формулы, связывающей функцию $g(t)$ и коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины k_1 , находим

$$(4.9) \quad \frac{k_1 \sqrt{R} (\kappa - 1)}{2\mu (v_1 + v_2)} = \frac{\sqrt{\pi \lambda}}{1 + \eta \lambda^2} \left[1 - b \frac{\kappa - 1}{4\kappa} (\kappa + 3 - 6\lambda^2) \right].$$

5. Числовые результаты. Расчеты велись по алгоритму, описанному в п. 3, для $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, $\nu = 0,3$. Погрешность вычислений, во всех случаях не превышающая 0,1 %, контролировалась путем сравне-

Таблица 1

n	$k_1 \sqrt{R(\kappa-1)} / [2\mu(v_1+v_2)]$
3	1,023
5	1,023
7	1,023
9	1,023

Таблица 3

λ	$k_1 \sqrt{R(\kappa-1)} / [2\mu(v_1+v_2)]$
0,1	0,670
0,2	0,894
0,3	0,999
0,4	1,02
0,5	0,996
0,6	0,936

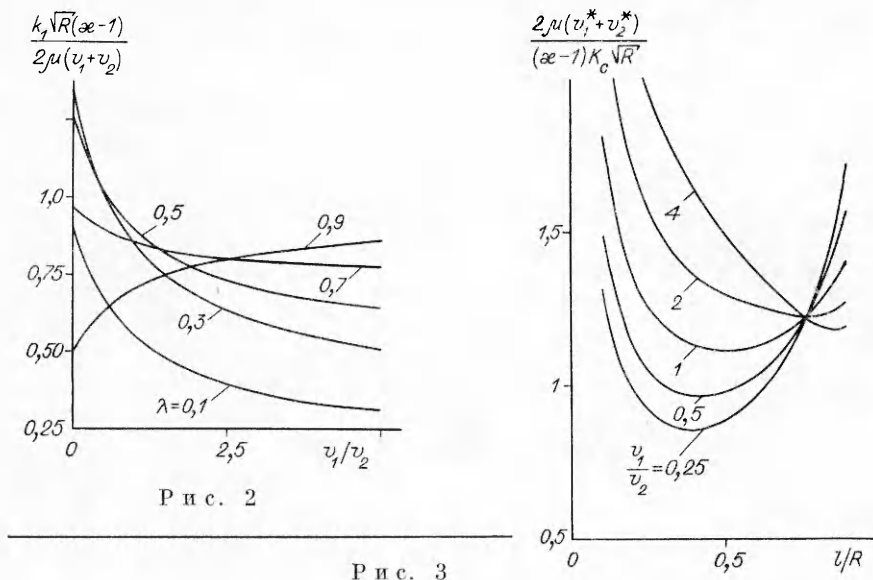
Таблица 2

b_1	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	$k_1 \sqrt{R(\kappa-1)} / [2\mu(v_1+v_2)]$								
0	0,909	1,20	1,33	1,34	1,28	1,15	0,974	0,755	0,490
0,1	0,844	1,12	1,24	1,26	1,21	1,10	0,952	0,764	0,530
0,2	0,789	1,05	1,17	1,19	1,15	1,06	0,934	0,771	0,564
0,25	0,765	1,02	1,13	1,16	1,12	1,04	0,926	0,774	0,578
0,3	0,743	0,990	1,10	1,13	1,10	1,03	0,918	0,777	0,592
1/3	0,730	0,972	1,09	1,11	1,09	1,02	0,914	0,779	0,600
0,4	0,704	0,939	1,05	1,08	1,06	0,997	0,905	0,782	0,616
0,5	0,670	0,895	1,00	1,04	1,02	0,972	0,893	0,787	0,637
0,6	0,640	0,856	0,963	1,00	0,991	0,950	0,883	0,791	0,655
2/3	0,622	0,833	0,939	0,977	0,972	0,936	0,877	0,793	0,666
0,7	0,614	0,822	0,927	0,967	0,963	0,930	0,874	0,794	0,672
0,8	0,590	0,792	0,895	0,937	0,938	0,913	0,866	0,797	0,686
0,9	0,569	0,765	0,867	0,910	0,916	0,897	0,859	0,800	0,699
1	0,551	0,740	0,841	0,886	0,896	0,883	0,853	0,803	0,711
1,5	0,479	0,648	0,743	0,794	0,820	0,830	0,829	0,812	0,755
2	0,431	0,586	0,677	0,733	0,769	0,794	0,813	0,819	0,784
3	0,372	0,509	0,596	0,657	0,705	0,750	0,792	0,826	0,821
4	0,336	0,462	0,547	0,611	0,667	0,723	0,780	0,831	0,843
5	0,312	0,431	0,514	0,580	0,642	0,706	0,772	0,834	0,857
6	0,295	0,409	0,491	0,559	0,624	0,693	0,766	0,837	0,868
7	0,282	0,393	0,473	0,542	0,610	0,683	0,762	0,838	0,876
8	0,272	0,380	0,460	0,530	0,600	0,676	0,759	0,840	0,882
9	0,264	0,370	0,449	0,519	0,591	0,670	0,756	0,841	0,887
10	0,258	0,361	0,440	0,511	0,584	0,665	0,754	0,842	0,891
∞	0,193	0,277	0,351	0,428	0,515	0,617	0,732	0,850	0,931

ния результатов расчетов, полученных при различной точности алгебраической аппроксимации интегрального уравнения, которая определяется порядком n соответствующей системы (3.4). Например, для $b_1 = v_1/v_2 = 0,5$, $\lambda = l/R = 0,5$ данные приведены в табл. 1. Таким образом, применение указанного численного метода обеспечивает весьма быструю сходимость результатов.

На рис. 2 и в табл. 2 представлена зависимость безразмерного коэффициента интенсивности напряжений от параметра двухосности нагружения $b_1 = v_1/v_2$ для различных относительных размеров трещины. Следует отметить, что минимальная зависимость безразмерного коэффициента интенсивности напряжений от параметра b_1 имеет место для $\lambda = l/R = 0,77$. В этом случае при изменении b_1 от 0 до ∞ величина $k_1 \sqrt{R(\kappa-1)} / [2\mu(v_1+v_2)]$ изменяется от 0,825 до 0,816.

На рис. 3 показана зависимость предельных перемещений от относительного размера трещины для различных значений b_1 . Здесь v_1^* , v_2^* и K_c — критические значения соответственно v_1 , v_2 и k_1 . Как видно, с увеличением b_1 тенденция к устойчивому росту трещины уменьшается. В табл. 3 приведены результаты расчета по формуле (4.9) для $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$, $\nu = 0,3$ и $b_1 = 0,5$. Сопоставление этих данных с ре-



зультатами численного расчета, приведенными в табл. 2, свидетельствует о том, что формула (4.9) обеспечивает достаточно высокую точность вычислений при $\lambda < 0,5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпенко Л. Н., Бойко А. В. Плоская задача теории упругости для произвольной системы трещин в круге при заданных на его границе смещениях // Пробл. прочности. — 1983. — № 10.
2. Boiko A. V., Karpenko L. N. On some numerical methods for the solution of the plane elasticity problem for bodies with cracks by means of singular integral equations // Int. J. Fracture. — 1981. — V. 17, N 4.
3. Бойко А. В., Карпенко Л. Н. Предельное состояние круглой пластины с трещиной сложной формы // Пробл. прочности. — 1983. — № 12.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.

г. Киев

Поступила 12/II 1990 г.,
в окончательном варианте — 19/VI 1990 г.

УДК 539.4

В. В. Твардовский

ПСЕВДОМАКРОТРЕЩИНА С «КВАЗИПЛАСТИЧЕСКИМ» ЗАКОНОМ СВЯЗИ НАГРУЗКА — РАСКРЫТИЕ БЕРЕГОВ

1. Введение. В данной работе рассматривается псевдомакротрещина, представляющая обычную трещину в композите или неоднородном теле, берега которой стянуты неразрушенными элементами структуры. Классическим примером объекта такого рода является макротрещина в композите с хрупкой керамической матрицей и неразрушенными вязкими волокнами, стягивающими ее берега и препятствующими ее раскрытию [1, 2]. В [3] в наиболее общем виде рассмотрена одиночная псевдомакротрещина в упругом линейно-анизотропном теле в условиях плоской деформации. При этом связь между усилиями, передаваемыми с берега на берег, σ_{ni} и раскрытием берегов $w = [v_y(x)]$ предполагалась линейной:

$$(1.1) \quad \sigma_y(x) = kw(x).$$

Был введен параметр связи

$$(1.2) \quad \lambda = 2k \frac{1 - \nu_{yz}\nu_{zy}}{E_y} \operatorname{Re} \left(i \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1\mu_2} \right),$$