

5. Дороницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. — «Усп. мат. наук», 1952, т. VII, вып. 6 (52).
6. Anderson D. L., Lindberg H. E. Dynamic pulse buckling of cylindrical shells under transient lateral pressure. — «AIAAJ.», 1968, vol. 6, N 4. Рус. пер. Динамическое выпучивание цилиндрических оболочек под действием нестационарного бокового давления. — «Ракет. техн. и космонавтика», 1968, т. 6, № 4.
7. Смирнов А. Д. Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций для асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка. М., Изд-во АН СССР, 1955.

УДК 539.374

### ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ АНИЗОТРОПНОГО НЕУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ

В. М. Жигалкин, Г. Л. Линдин

(Новосибирск)

В работах [1, 2] предложен механизм пластического деформирования, дополненный промежуточными площадками скольжения [3]. На основе этого механизма деформирования указываются уравнения упрочнения при нагружении с неподвижными главными направлениями тензора напряжений, при этом достаточно знать закон упрочнения материала при осевом растяжении.

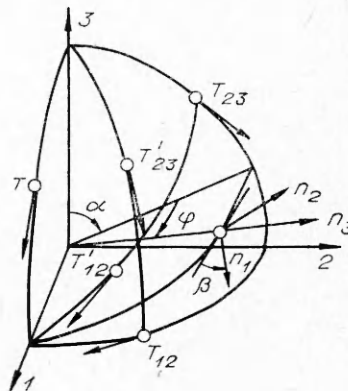
В данной работе приводятся результаты экспериментов, в которых нагружение типа двуосного растяжения создавалось в трубчатых образцах из стали 40X под действием внутреннего давления и осевой силы. При этом главные направления тензора напряжений оставались неподвижными в теле образца, хотя нагружение существенно отличалось от пропорционального.

1. Рассмотрим напряженное состояние элемента с неподвижными главными направлениями тензора напряжений (1, 2, 3) на фиг. 1. Пусть неравенства

$$(1.1) \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

выполнены без перенумерации. Начало вспомогательной системы координат  $(n_1, n_2, n_3)$  из соображений удобства вынесено на поверхность единичной сферы, описанной вокруг рассматриваемого элемента. В дальнейшем площадкой скольжения  $\tau'_{31}$  называется площадка с нормалью  $n_3$  и направлением  $n_1$  на ней. Касательное напряжение  $\tau'_{31}$  на этой площадке скольжения  $(\alpha, \beta, \varphi)$  на фиг. 1 имеет вид

$$\begin{aligned} \tau'_{31} = & \frac{\sigma_1}{2} \cos \beta \cdot \sin 2\varphi + \frac{\sigma_2}{2} (\sin 2\alpha \times \\ & \times \sin \beta \cdot \cos \varphi - \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin 2\varphi) - \\ & - \frac{\sigma_3}{2} (\sin 2\alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \varphi + \cos^2 \alpha \cdot \cos \beta \times \\ & \times \sin 2\varphi). \end{aligned}$$



Ф и г. 1

Отметим наряду с главными площадками скольжения  $T = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ ,  $T_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ ,  $T_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$  промежуточные площадки [3]

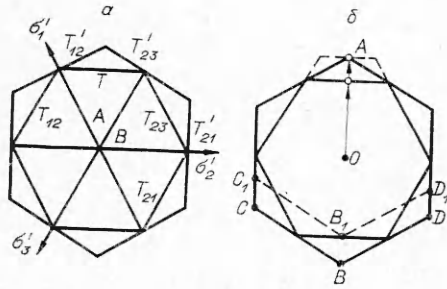
$$(1.2) \quad \beta = 0; \varphi = \pi/4; \alpha = \pm \pi/4, \alpha = \pm 3\pi/4,$$

на которых действует касательное напряжение  $T'_{12} = (T + T_{12})/2$ . Если на фиг. 1 оси 1 и 3 поменять местами, то на площадках скольжения (1.2) будет действовать касательное напряжение  $-T'_{23}$ , где  $2T'_{23} = T + T_{23}$ . Видно, что

$$T_{12} \leq T'_{12}, T_{23} \leq T'_{23}.$$

Если поменять местами оси 1 и 2, то на площадках скольжения (1.2) получим касательное напряжение  $T'_{21} = (T_{23} - T_{12})/2$ .

В [3] предложен механизм деформирования, в котором пластическая деформация представлена в виде последовательности сдвигов на площадках скольжения  $T, T_{12}, T_{23}$  [4, 2] и  $T'_{12}, T'_{23}, T'_{21}$ . На фиг. 2, а стороны



Ф и г. 2

правильных шестиугольников на девиаторной плоскости принадлежат линиям  $T_{ij} \equiv \text{const} = \tau_L$  ( $i < j$ ), где  $\tau_L$  — предел текучести при сдвиге. Условие (1.1) определяет область  $A$ , в которой значение  $\tau_L$  достигается только на площадках скольжения  $T, T_{12}, T_{23}, T'_{12}, T'_{23}$  в реальных нагружениях. В этой области примем допущение I о независимости площадок скольжения  $T, T_{12}, T_{23}, T'_{12}, T'_{23}$ : суммарный пластический сдвиг  $\gamma$  на

площадках скольжения, отвечающих одному касательному напряжению, зависит только от максимального достигнутого им значения

$$(1.3) \quad \gamma_{ij} = F(T_{ij}), \gamma'_{ij} = F(T'_{ij}),$$

где  $F$  — паспортная зависимость материала. Это позволяет просуммировать вклады различных площадок в пластическую деформацию. Действительно, пластическая работа  $A^p$  касательных напряжений  $T, T_{12}, T_{23}, T'_{12}, T'_{23}$  с учетом (1.3) имеет приращение

$$(1.4) \quad \Delta A^p = TF'(T)\Delta T + T_{12}F'(T_{12})\Delta T_{12} + \dots + T'_{23}F'(T'_{23})\Delta T'_{23},$$

где  $F'(T_{ij}) = dF(T_{ij})/dT_{ij}$ . Поскольку переменные  $T_{ij}, T'_{ij}$  являются максимальными достигнутыми (а не текущими) значениями касательных напряжений, они не зависимы. Значение  $\Delta A^p$  в форме (1.4) является полным дифференциалом в этих переменных, а работа  $A^p$  не зависит от пути нагружения из одного деформированного состояния в другое. Для подсчета  $A^p$  был использован в (1.4) ступенчатый путь нагружения с последовательным включением площадок скольжения. Приращения пластических деформаций  $\Delta \epsilon_\alpha^p$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) получаются в виде соответствующих коэффициентов при  $\sigma_\alpha$  в выражении (1.4)

$$(1.5)$$

$$\Delta A^p = \sigma_1 \left[ \frac{F'(T)}{2} \Delta T + \frac{F'(T_{12})}{2} \Delta T_{12} + \frac{F'(T'_{12})}{2} \Delta T'_{12} + \frac{F'(T'_{23})}{4} \Delta T'_{23} \right] +$$

$$+ \sigma_2 \left[ \frac{F'(T_{23})}{2} \Delta T_{23} - \frac{F'(T_{12})}{2} \Delta T_{12} - \frac{F'(T'_{12})}{4} \Delta T'_{12} + \frac{F'(T'_{23})}{4} \Delta T'_{23} \right] - \\ - \sigma_3 \left[ \frac{F'(T)}{2} \Delta T + \frac{F'(T_{23})}{2} \Delta T_{23} + \frac{F'(T'_{12})}{4} \Delta T'_{12} + \frac{F'(T'_{23})}{2} \Delta T'_{23} \right],$$

откуда видно, что вклады площадок скольжения складываются.

Для определения паспортной зависимости  $F(T)$  достаточно знать закон упрочнения при осевом растяжении  $\varepsilon_1^p(\sigma_1)$ . Действительно, в этом нагружении  $T = T_{12} \equiv T'_{12}$ ,  $T'_{23} \leq \tau_L$ ,  $T_{23} = 0$ . Поэтому, согласно (1.5), получим выражение

$$\Delta \varepsilon_1^p(T) = \frac{3\Delta T}{2} F'(T),$$

откуда находится функция  $F(T)$

$$(1.6) \quad F(T) = \frac{2}{3} \varepsilon_1^p(T).$$

Рассмотрим нагружение с неподвижными главными направлениями тензора напряжений, но без ограничений (1.1). Тогда пластический сдвиг может осуществляться на шести площадках скольжения (на фиг. 2, а 12 площадок с учетом знака касательного напряжения). В этом случае принимается допущение II о зависимости площадок скольжения: площадки скольжения  $\pm T_{ij}$  не зависимы в смысле (1.3), а упрочнение на одной такой площадке скольжения вызывает равное разупрочнение на площадках скольжения  $T'_{qp}$ , связанных с двумя сторонами внешнего шестиугольника, расположенными против рассмотренной стороны. На фиг. 2, б приведена проекция поверхности нагружения на девиаторной плоскости для пути нагружения  $OA$ . Упрочнение на площадке скольжения  $T$  вызывает разупрочнение на площадках, связанных со сторонами  $BC$ ,  $BD$ . Новые стороны  $B_1C_1$ ,  $B_1D_1$  соответствуют значению касательного напряжения  $\tau_{L1}$

$$(1.7) \quad \tau_{L1} = \tau_L - (T^0 - \tau_L),$$

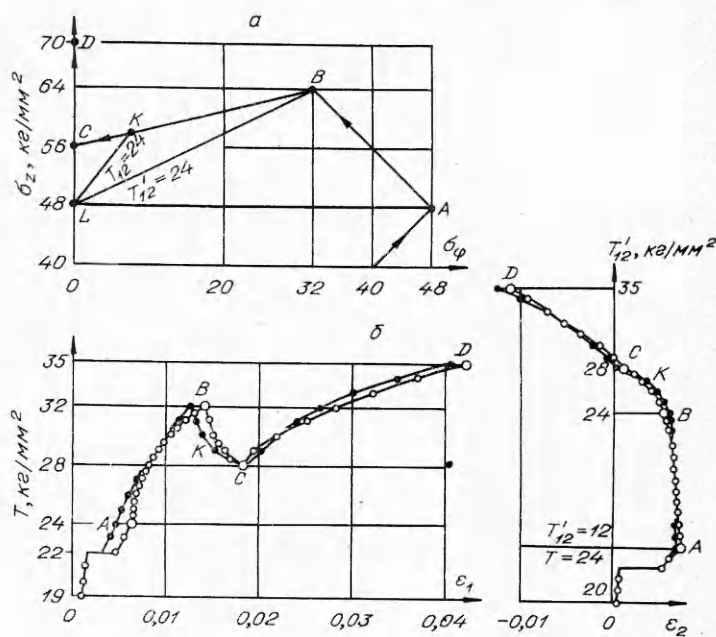
где  $T^0$  — максимальное достигнутое значение касательного напряжения  $T$ .

Допущение II (подобно допущению I) позволяет просуммировать вклады различных площадок скольжения в пластическую деформацию.

Рассмотрим зависимость площадок скольжения в случае перехода траектории нагружения из области  $A$  в область  $B$  на фиг. 2, а. В последней  $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3$ , поэтому подключаются площадки скольжения  $T_{21} = (\sigma_2 - \sigma_1)/2$ ,  $T'_{21} = (T_{23} + T_{21})/2$ . Если в области  $A$   $T_{12} > \tau_L$ , то, согласно (1.7), получим дополнительные вклады в приращение пластической деформации

$$(1.8) \quad \Delta \varepsilon_1^p: - \frac{F'(T_{21})}{2} \Delta T_{21} - \frac{F'(T'_{21} + T_{12} - \tau_L)}{4} \Delta T'_{21}, \\ \Delta \varepsilon_2^p: \frac{F'(T_{21})}{2} \Delta T_{21} + \frac{F'(T'_{21} + T_{12} - \tau_L)}{2} \Delta T'_{21}, \\ \Delta \varepsilon_3^p: - \frac{F'(T'_{21} + T_{12} - \tau_L)}{4} \Delta T'_{21}.$$

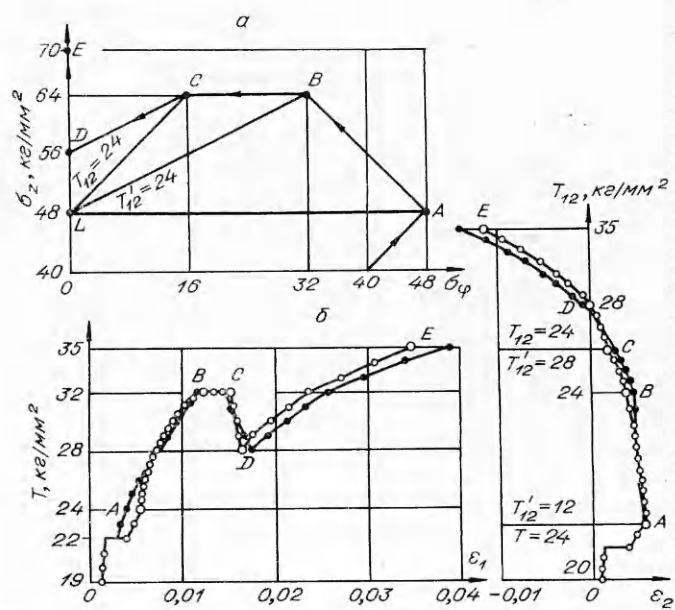
Если в области  $B$   $T_{21} > \tau_L$ , то при возвращении в область  $A$  необходимо заменить в (1.5)  $F'(T'_{12})$  на  $F'(T'_{12} + T_{21} - \tau_L)$ , где  $T_{21}$  и  $T_{12}$  в (1.8) —



Ф и г. 3

максимальные достигнутые значения соответствующих касательных напряжений.

Иллюстрация уравнений упрочнения (1.5), (1.8) на фиг. 2, б с помощью поверхности нагружения показывает, что эти уравнения описывают комбинированное упрочнение с взаимозависимым действием плоских поверхностей нагружения [4].



Ф и г. 4

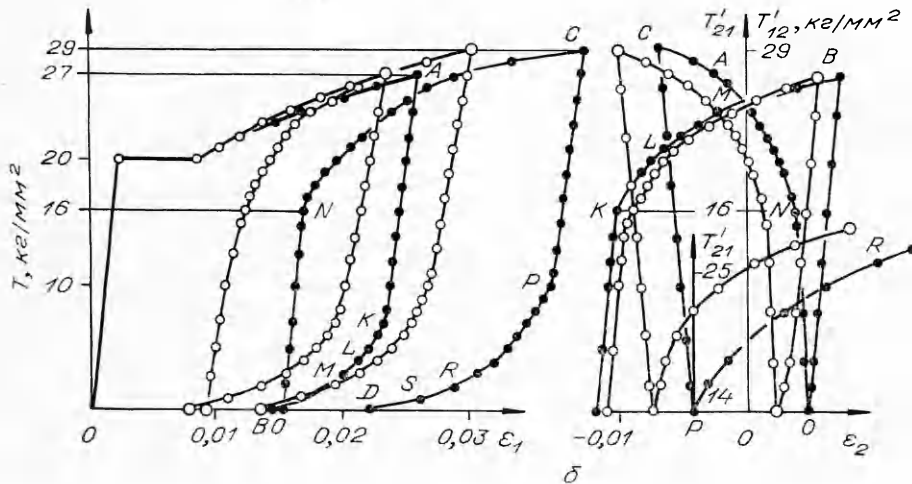
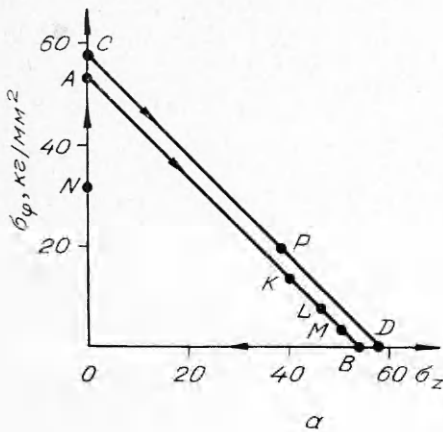
2. Сравним результаты расчетов с данными опытов, в которых нагружение типа двусосного растяжения создавалось в тонкостенных трубчатых образцах из стали 40X под действием внутреннего давления и осевой силы.

В качестве испытательных образцов использованы полые цилиндры, имевшие толщину стенки в рабочей части  $\delta = 1$  мм, а средний радиус  $R = 15$  мм. Разница в толщине стенки не превышала  $\pm 0,01$  мм. Образцы обработаны термически при температуре  $800^\circ\text{C}$  в вакууме  $10^{-4}$  мм рт. ст. с выдержкой в течение 2,5 ч. После термообработки образцы обладали площадкой текучести.

Деформации измерялись тензOMETрами с индикаторами часового типа: продольные — на базе 100 мм индикаторами с ценой деления 0,01 мм, поперечные — микронным индикатором. Радиальная деформация определялась с помощью изменения объема, вычисляемого по закону Гука. Радиальное напряжение принималось равным нулю. Для исключения влияния ползучести измерения деформаций проводились после пятиминутной выдержки на каждой ступени нагружения.

На фиг. 3—5 данные опытов (светлые кружки) сравниваются с результатами расчетов (темные кружки). Использованные в этих опытах образцы обладали исходной анизотропией: при осевом растяжении  $\sigma_z \neq 0$ ,  $\tau_{L1} = 23$  кг/мм<sup>2</sup>; при кольцевом растяжении  $\sigma_\varphi \neq 0$ ,  $\tau_{L2} = 20$  кг/мм<sup>2</sup>; при равномерном двусосном растяжении  $\sigma_z \equiv \sigma_\varphi \neq 0$ ,  $\tau_{L3} = 22$  кг/мм<sup>2</sup>. Из этих соображений в расчетах, приведенных на фиг. 3, б и 4, б, принималось  $\tau_L = 23$  кг/мм<sup>2</sup> на площадках скольжения  $T$ ,  $T_{12}$ ,  $T'_{12}$ ,  $T'_{23}$  и  $\tau_L = 20$  кг/мм<sup>2</sup> на площадках скольжения  $T_{23}$ ,  $T_{21}$ ,  $T'_{21}$  (в расчете, приведенном на фиг. 5, б, значения  $\tau_L$  на площадках скольжения менялись местами).

Паспортная зависимость  $F(T)$ , определенная, согласно (1.6), из



Ф и г. 5

$T$ , кг/мм <sup>2</sup>	$F(T) \cdot 10^3$	$T$ , кг/мм <sup>2</sup>	$F(T) \cdot 10^3$	$T$ , кг/мм <sup>2</sup>	$F(T) \cdot 10^3$
23	0	29	2,31	35	6,95
24	0,25	30	2,81	36	8,34
25	0,58	31	3,34	37	9,94
26	0,96	32	3,98	38	11,74
27	1,38	33	4,77	—	—
28	1,83	34	5,76	—	—

эксперимента на осевое растяжение, для целых значений  $T$  приведена в таблице.

Расчеты проводились следующим образом. На каждой ступени нагружения, начиная с площадки текучести образца, вычислялись значения  $T'_{ij}$ ,

$T'_{ij}$ , которые сравнивались с  $\tau_L$  и  $\tau_{L1}$  в форме (1.7). В случае включения площадки скольжения вычислялись приращения пластических деформаций, согласно уравнениям упрочнения (1.5), (1.8), где слагаемое  $F'(T_{ij})\Delta T_{ij}$  заменялось на  $F(T_{ij} + \Delta T_{ij}) - F(T_{ij})$ , а значения  $F$  для нецелых значений  $T_{ij}$  определялись по соседним целым значениям из таблицы путем интерполяции (в таком виде расчет удобно проводить с помощью ЭВМ).

На фиг. 3, а и 4, а приведены траектории нагружения  $ABCD$ ,  $ABCDE$ , принадлежащие области  $A$ : до точки  $A$  осуществлялось равномерное двусосное растяжение; на участке  $AB$  одна площадка скольжения  $T$  включена, т. е.  $T > \tau_L$  и  $\Delta T > 0$ . Поэтому, согласно (1.5), наблюдается упругое изменение компоненты  $\varepsilon_2$ , т. е.  $\Delta \varepsilon_2^p = 0$ .

Следует заметить, что в точке  $A$  компонента девиатора напряжений  $\sigma'_2 = \sigma'_1 > 0$ . Поэтому, согласно теории течения Мизеса, осуществляется пластическое изменение компоненты  $\varepsilon_2$  (причем  $\Delta \varepsilon_2^p > 0$ ), что противоречит данным опытов.

На фиг. 5, а приведена траектория нагружения  $OABOCD$ , выходящая из области  $A$  в область  $B$  и обратно. Для изучения разупрочнения площадок скольжения  $T'_{21}$ ,  $T'_{12}$  на правом графике (фиг. 5, б) на оси ординат откладывается значение  $T'_{21}$  (для участков нагружения  $ABO$ ,  $PD$ ) и значение  $T'_{12}$  (для участка нагружения  $OCP$ ) в зависимости от того, какая площадка скольжения включается (в момент включения указанных площадок прекращается упругое изменение компонент  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ). Согласно (1.5), (1.8), площадка скольжения  $T'_{21}$  включается при 16 кг/мм<sup>2</sup> (точка  $K$ ) на первом цикле и при 14 кг/мм<sup>2</sup> (точка  $P$ ) — на втором. Аналогично площадка скольжения  $T'_{12}$  включается при 16 кг/мм<sup>2</sup> (точка  $N$ ).

Таким образом, анализ фиг. 3—5 показал вполне удовлетворительное согласование расчетных зависимостей с экспериментальными при нагружении с неподвижными главными направлениями тензора напряжений.

Авторы выражают благодарность Е. И. Шемякину за ряд полезных замечаний.

Поступила 22 III 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шемякин Е. И. Анизотропия пластического состояния. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 4. Изд. ВЦ СО АН СССР, 1973, № 4.
2. Христианович С. А. Деформация упрочняющегося пластического материала. — «Изв. АН СССР. МТТ», 1974, № 2.
3. Линдин Г. Л. Об упрочнении упругопластического тела. — ПМТФ, 1976, № 3.
4. Кнест И. В. Основные современные направления в математической теории пластичности. Рига, «Зинатне», 1971, 39.