

**СТОХАСТИЧЕСКИЙ ФЛАТТЕР
ЦЕПОЧКИ ПЛАСТИН В ТУРБУЛЕНТНОМ
ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НЕСЖИМАЕМОГО ТЕЧЕНИЯ**

УДК 537.86.187; 530.182; 533.6.013.42

В. П. Реутов, Г. В. Рыбушкина

Институт прикладной физики РАН, 603600 Нижний Новгород

В данной работе изучается нелинейная динамика длинной цепочки прямоугольных пластин, обтекаемых турбулентным пограничным слоем несжимаемого течения. Цепочка вытянута вдоль течения, а края пластин состыкованы вплотную и не связаны механически друг с другом. Анализ основывается на результатах работ [1–3], в которых был определен отклик среднего течения в турбулентном пограничном слое на прогиб отдельной пластины и пары смежных пластин.

Уравнения движения цепочки выводятся в тех же приближениях, которые использовались в [3] при исследовании нелинейного флаттера пары смежных пластин (учитывается геометрическая нелинейность прогиба при «линейном» отклике течения). Рассматривается случай обтекания цепочки тяжелой жидкостью (присоединенная масса сравнима с массой пластин либо превышает ее), что позволяет ограничиться приближением однодогового прогиба пластин.

В [4] изучалось возникновение хаотических автоколебаний при обтекании отдельной панели потенциальным сверхзвуковым потоком. В [5] рассматривались периодические автоколебания цепочки пластин, обтекаемой сверхзвуковым потенциальным потоком. При строго потенциальном обтекании пластин несжимаемым (существенно дозвуковым) потоком автоколебания не возникают [3]. Однако их установление возможно в результате необратимой передачи энергии к пластинам от среднего течения в пограничном слое, который в реальных условиях всегда появляется вблизи обтекаемой поверхности. Значительный практический интерес представляет случай турбулентного пограничного слоя. В [3] показано, что при таком механизме генерации возможен переход от периодических к хаотическим автоколебаниям (стохастическому флаттеру) в системе двух смежных пластин. Цель данной работы — исследование особенностей возникновения динамического хаоса в длинной цепочке пластин, моделирующей большую панельную поверхность.

1. Приближение ближнего взаимодействия пластин в длинной цепочке. Рассмотрим цепочку одинаковых прямоугольных пластин, расположенных на одном уровне с жесткой поверхностью $y = 0$. Размеры пластин вдоль и поперек цепочки обозначены соответственно L_1 и L_2 . Состыкованные края пластин закреплены шарнирно. Предполагается, что пластины имеют большую жесткость в поперечном направлении и возможен только их изгиб вдоль цепочки. Со стороны полупространства $y > 0$ цепочка обтекается в продольном направлении x турбулентным пограничным слоем несжимаемого течения, а в области $y < 0$ находится неподвижная среда с пренебрежимо малой плотностью. Толщина пограничного слоя δ предполагается постоянной вдоль всей цепочки.

Ограничимся изучением колебаний цепочки в приближении ближнего взаимодействия, когда учитывается связь через поток только между смежными пластинами. Для решения этой задачи можно использовать уравнения однодоговых колебаний пары смежных

пластин, полученные в [3]. Сохраняя введенные в [3] безразмерные переменные, запишем уравнения движения цепочки в лагранжевой форме (см., например, [6]):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial A_k} = Q_k. \quad (1.1)$$

Здесь A_k — амплитуда первой галеркинской моды прогиба k -й пластины (отнесенная к толщине пластин h); L — лагранжиан системы; Q_k — обобщенные неконсервативные силы. Лагранжиан цепочки с ближним взаимодействием пластин имеет вид (суммирование производится по номерам всех пластин)

$$L = \sum_j \left[\frac{1}{2} M_0 \dot{A}_j^2 + M_1 \dot{A}_j \dot{A}_{j-1} + M_2 \dot{A}_j \dot{A}_{j-2} - \frac{1}{2} B_1 (A_j \dot{A}_{j-1} - \dot{A}_j A_{j-1}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} D_0 A_j^2 + D_1 A_j A_{j-1} - \frac{3}{4} \varkappa A_j^4 \right], \quad (1.2)$$

где коэффициенты M_0 , M_1 , B_1 , D_0 , D_1 выражаются через параметры, определенные в [3]: $M_0 = m_0 \equiv \alpha + \alpha_1 a_0$, $M_1 = \alpha_1 a_1$, $B_1 = \alpha_1 V b_1$, $D_0 = d_0 \equiv \alpha_1 d_0 V^2 - 1$, $D_1 = \alpha_1 V^2 d_1$; $\varkappa > 0$. При этом $\alpha = \gamma / (\gamma + \gamma_0)$ (γ и γ_0 — масса пластины на единицу площади и характерная присоединенная масса жидкости соответственно, $\alpha_1 = 1 - \alpha$). В дальнейшем рассматривается обтекание цепочки тяжелой жидкостью ($\gamma / \gamma_0 < 1$), а все расчеты, как и в [3], производятся при $\alpha = 0,2$. Безразмерная скорость течения $V = u_\infty k_0 / \omega_0$ (u_∞ — скорость свободного течения за пределами пограничного слоя, $k_0 = \pi / L_1$ — волновое число прогиба, ω_0 — характерная частота колебаний пластин с учетом присоединенной массы жидкости (через ω_0 нормировано также время в (1.1) и (1.2))). Значения коэффициентов a_0 , a_1 , b_1 , d_0 и d_1 , слабо зависящих от числа Рейнольдса, вычислены в [2, 3] * для $k_0 \delta = 1$. При этом теория строилась для квазидвумерного прогиба пластин ($L_2 \gg L_1$), а численные значения получены при $L_2 / L_1 = 3$.

Неконсервативные силы Q_k учитывают потери в материале пластин и частотно-зависимый обмен энергией между вибрирующей поверхностью и средним течением в пограничном слое:

$$Q_k = -2\bar{r} \dot{A}_k - \alpha_1 \beta (V^2 \xi_k + V g_0 \dot{A}_k) + \alpha_1 \beta_1 V^2 \eta_{k-1}, \quad (1.3)$$

$$\ddot{\xi}_k + \sigma_0 V \dot{\xi}_k + V^2 c_0^2 \xi_k = q_0 V \dot{A}_k - s_0 V^2 A_k, \quad \ddot{\eta}_k + \sigma_1 V \dot{\eta}_k + V^2 c_1^2 \eta_k = q_1 V \dot{A}_k - s_1 V^2 A_k.$$

Значения коэффициентов g_0 , β , β_1 , $\sigma_{0,1}$, $c_{0,1}$, $q_{0,1}$ даны в [3]; ξ_k и η_k — вспомогательные переменные, описывающие вклад в Q_k пластины с номером k и смежной с ней пластины, расположенной вверх по течению. Нормированный коэффициент потерь \bar{r} можно выразить через добротность Q_f собственных колебаний пластины в вакууме [1]: $\bar{r} = (1/2Q_f) \sqrt{\alpha}$. Заметим, что неконсервативные силы дают малый вклад в (1.1), так как β , β_1 , $\bar{r} \ll 1$. Коэффициент M_0 в (1.2) характеризует собственную массу отдельной пластины с присоединенной массой жидкости, а M_1 — взаимодействие ближайших пластин через ускорение их поверхности (эффекты типа взаимной присоединенной массы). Коэффициент M_2 , учитывающий связь через ускорение между пластинами с номерами, отличающимися на 2, будет определен ниже. Отметим, что коэффициент B_1 характеризует «инерционно-сносовую» связь между пластинами (обусловленную движением их поверхности и наличием течения над ней), а коэффициенты D_0 и D_1 ответственны за собственную и взаимную упругость пластин в

* Коэффициенты b_1 и d_1 указаны в [3] с опечатками. Их правильные значения следующие: $b_1 = -0,43$, $d_1 = -0,10$.

присутствии течения. Лагранжиан (1.2) в отсутствие Q_k описывает «квазипотенциальное» обтекание пластин [1-3].

Система (1.1)–(1.3) легко обобщается для цепочки пластин, расположенных на распределенном пружинном основании с коэффициентом упругости на единицу площади K_E . (Модель упругой поверхности с пружинным основанием рассматривалась в [7].) Для этого необходимо задать ω_0 и \varkappa в виде $\omega_0 = [(Dk_0^4 - Nk_0^2 + K_E)/\gamma_0]^{1/2}$, $\varkappa = 1/(1 - N/k_0^2 D + K_E/k_0^4 D)$ (обозначения см. в [3]). Кроме того, эта же система будет описывать симметричное двухстороннее обтекание цепочки, если сделать в (1.1)–(1.3) формальную замену $\alpha_1 \rightarrow 2\alpha_1$, сохраняя определения α и α_1 .

2. Переход к гамильтоновскому описанию и обоснование приближения ближнего взаимодействия. Как видно из (1.1)–(1.3), при наличии связи пластин через ускорение ($M_{1,2} \neq 0$) вторые производные \ddot{A}_k не выражаются явно через \dot{A}_k и A_k , что не позволяет записать эту систему в виде уравнений первого порядка. Явные выражения для \ddot{A}_k находятся после решения линейной системы алгебраических уравнений, порядок которой равен числу пластин в цепочке, и содержат скорости \dot{A}_k и прогибы A_k всех пластин. В то же время ясно, что при убывании вкладов высших связей по ускорению нет необходимости учитывать влияние на \ddot{A}_k прогиба всех пластин. Последовательная реализация приближения ближнего взаимодействия для связей через ускорение возможна при переходе к гамильтоновскому описанию движения цепочки.

Введем гамильтониан H и обобщенные импульсы p_k с помощью известных выражений [6]:

$$H = \sum_j \dot{A}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_j} - L, \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_k}. \quad (2.1)$$

Здесь индексы j, k пробегают номера всех пластин. Подстановка (1.2) во второе соотношение (2.1) дает

$$p_k = M_0 \dot{A}_k + M_1 (\dot{A}_{k+1} + \dot{A}_{k-1}) + M_2 (\dot{A}_{k+2} + \dot{A}_{k-2}) - \frac{1}{2} B_1 (A_{k+1} - A_{k-1}). \quad (2.2)$$

Явное выражение для скоростей прогиба \dot{A}_k через p_k будем искать в виде ряда теории возмущений по связям между пластинами. Ограничиваясь членами нулевого и первого порядка, имеем

$$\dot{A}_k = \frac{1}{M_0} \left[p_k - \frac{M_1}{M_0} (p_{k+1} + p_{k-1}) - \frac{M_2}{M_0} (p_{k+2} + p_{k-2}) + \frac{1}{2} B_1 (A_{k+1} - A_{k-1}) \right]. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (1.2), (2.1) и пренебрегая членами второго порядка по связям, получим гамильтониан цепочки в приближении ближнего взаимодействия:

$$H = \sum_j \left[\frac{1}{2M_0} \dot{p}_j^2 - \frac{M_1}{M_0^2} p_{j-1} p_j - \frac{M_2}{M_0^2} p_{j-2} p_j + \right. \\ \left. + \frac{B_1}{2M_0} (p_{j-1} A_j - p_j A_{j-1}) - \frac{1}{2} D_0 A_j^2 - D_1 A_{j-1} A_j + \frac{3}{4} \varkappa A_j^4 \right]. \quad (2.4)$$

Канонические уравнения, порождаемые гамильтонианом (2.4), включают систему (2.3) и уравнения импульсов:

$$\dot{p}_k = D_0 A_k + D_1 (A_{k+1} + A_{k-1}) + \frac{B_1}{2M_0} (p_{k+1} - p_{k-1}) - 3\varkappa A_k^3 + Q_k. \quad (2.5)$$

Полная система уравнений движения цепочки (2.3), (2.5) и (1.3) удобна для решения на ЭВМ, так как легко приводится к системе уравнений первого порядка. Для цепочки конечной длины следует занулить в этих уравнениях переменные A_{\pm} и d_{\pm} со значениями индексов, выходящими за пределы совокупности номеров пластин.

Рассмотрим устойчивость нулевого стационарного прогиба бесконечной цепочки по отношению к волновым возмущениям вида

$$A_n = \frac{1}{2} A e^{in\vartheta - i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (2.6)$$

где A — комплексная амплитуда волны; ω — ее частота; ϑ — сдвиг фазы на одном звене (волновое число бегущей волны). Для консервативной модели ($\dot{Q}_k \rightarrow 0$) из линеаризованной системы (2.3), (2.5) получим дисперсионное уравнение

$$M \left(\omega + \frac{B_1}{M_0} \sin \vartheta \right)^2 + D_s = 0 \quad (2.7)$$

($M = M_0^2 / (M_0 - 2M_1 \cos \vartheta - 2M_2 \cos 2\vartheta)$, $D_s = D_0 + 2D_1 \cos \vartheta$). Его решения имеют вид

$$\omega_{1,2} = -\frac{B_1}{M_0} \sin \vartheta \pm \sqrt{-\frac{D_s}{M}}. \quad (2.8)$$

Учитывая зависимость D_s и M от V , нетрудно показать, что при $V > V_c = 1/\sqrt{\alpha_1 d_0 + 2\alpha_1 d_1 \cos \vartheta}$ корни становятся комплексно-сопряженными (появляется «реактивная» неустойчивость прогиба). Минимальную критическую скорость V_c имеет квазистатическая неустойчивость (дивергенция) возмущений с противофазным прогибом смежных пластин $\vartheta = \pi$. Для приведенных в [3] числовых значений коэффициентов $V_c \simeq 1,38$.

С целью выяснения роли дальних связей между пластинами изучались колебания цепочки при ее потенциальном обтекании однородным потоком. Ограничимся кратким описанием результатов этого анализа, поясняющим существо вопроса. В относительно простой модели с потенциальным течением удастся вывести полную систему уравнений движения цепочки, учитывающую как наличие бесконечного набора галеркинских мод прогиба, так и всю совокупность связей между модами на различных пластинах. Если ограничиться учетом конечного числа мод, нетрудно получить дисперсионное уравнение для малых колебаний (2.6) в виде полинома по ω (степень которого равна удвоенному числу мод). Коэффициенты этого уравнения представляют собой бесконечные суммы по длине связи j между пластинами ($j = 0, 1, 2 \dots$). Зависимость членов этих сумм от j находится явно, что позволяет решить вопрос об их сходимости.

В одномодовой модели прогиба пластин суммирование по «инерционно-сносовым» и упругим связям высшего порядка дает конечный результат при любом ϑ , причем вклад связей с номерами $j \geq 2$ в эти суммы незначителен. В то же время суммирование вкладов дальних связей через ускорение приводит к логарифмической особенности при $\vartheta = 0$, которая соответствует бесконечной присоединенной массе (в расчете на одну пластину) при синхронных колебаниях всех пластин бесконечной цепочки. Такая расходимость присоединенной массы аналогична обсуждавшейся в [2] для двумерного прогиба одной бесконечной пластины.

Расчеты показали, что увеличение числа суммируемых связей по ускорению приводит к резкому увеличению суммы в относительно небольшом интервале значений $|\vartheta|$ вблизи $\vartheta = 0$. За пределами этого интервала с приемлемой точностью можно ограничиться учетом ближнего взаимодействия между пластинами. Анализируя выражение для M в (2.7),

нетрудно видеть, что эффект возрастания присоединенной массы для прогибов с $\vartheta \rightarrow 0$ можно учесть феноменологически в рамках приближенной системы (2.3), (2.5). Именно для этой цели в (1.1) была выведена связь через ускорение между пластинами, разность номеров которых равна двум (член $\sim M_2$). Эффект резкого увеличения присоединенной массы для малых ϑ (при относительно небольшом изменении M в основной области значений ϑ) достигается, если выбрать M_2 из условия $M|_{\vartheta=0} \gg M_0$. Такая коррекция необходима, если в силу каких-либо причин в приближении ближнего взаимодействия возникают значительные синхронные прогибы пластин. Поскольку рост присоединенной массы при $\vartheta \rightarrow 0$ приводит к подавлению синхронных колебаний пластин, естественно предположить, что динамика цепочки в большей степени зависит от самого факта подавления, чем от способа его реализации. Далее при расчетах коэффициент M_2 определяется из условия $M_0 - 2M_1 - 2M_2 = 0,2M_0$.

В рамках полной системы уравнений рассмотрены также двухмодовые колебания пластин со знакопеременным периодическим прогибом в бесконечной цепочке ($\vartheta = \pi$). Расчеты для обтекания тяжелой жидкостью показали, что при $V \leq 1,5V_c$ учет второй моды незначительно влияет на поведение корней (2.8). Только при дальнейшем увеличении V начинается отклонение от (2.8) и уменьшается частота собственных колебаний, связанных с присутствием второй моды. Корректность приближения ближнего взаимодействия для диссипативной связи была подтверждена в работе [2, формулы (5.3) и (5.4)].

Таким образом, приближение ближнего взаимодействия для одномодовых колебаний бесконечной цепочки пластин, дополненное феноменологическим учетом эффекта возрастания присоединенной массы при синхронном прогибе пластин, может быть использовано для описания реальной цепочки при скоростях потока, которые не слишком велики по сравнению с критической скоростью дивергенции.

3. Уравнение Гинзбурга — Ландау для волновых возмущений вблизи порога устойчивости. Учет в (2.5) неконсервативных сил реакции течения на прогиб цепочки приводит к резистивной неустойчивости, которая исследовалась в [1] для знакопеременного прогиба ($\vartheta = \pi$). Она является докритической по отношению к дивергенции, так как имеет критическую скорость $V_c' < V_c$.

Чтобы изучить эту неустойчивость при произвольном ϑ , определим диссипативную часть отклика течения на прогиб поверхности (2.6) как $Y(\omega, \vartheta) = \dot{Q}/A$ (\dot{Q} — комплексная амплитуда гармоники $\exp(in\vartheta - i\omega t)$ распределения Q_n). Используя (1.3), можно записать выражение для Y в виде

$$Y = 2i\bar{r}\omega - \alpha_1\beta V^2 \left[\varphi\left(\frac{\omega}{V}\right) - ig_0 \frac{\omega}{V} \right] + \alpha_1\beta_1 V^2 \varphi_1\left(\frac{\omega}{V}\right) e^{-i\vartheta}, \quad (3.1)$$

где φ и φ_1 — рациональные функции, определенные выражениями (1.3) и (1.5) из [3].

Дисперсионное уравнение линейной задачи получается из (2.8) после формальной замены $D_s \rightarrow D_s + Y(\omega, \vartheta)$. Решая его методом возмущений по малому Y , получим инкремент резистивной неустойчивости в докритической области ($V < V_c$):

$$\Gamma = \text{Im} \omega = - \frac{\text{Im} Y}{2M(\omega + (B_1/M_0) \sin \vartheta)} \Big|_{\omega = \Omega(\vartheta)}. \quad (3.2)$$

Здесь $\Omega(\vartheta) = \text{Re} \omega_1 > 0$ — частота волн в консервативной системе (см. (2.8)). Критическая скорость резистивной неустойчивости V_c' зависит от \bar{r} . При значении $\bar{r} = 0,004$, для которого производятся все расчеты в дальнейшем, неустойчивость появляется при $V_c' = 0,73$,

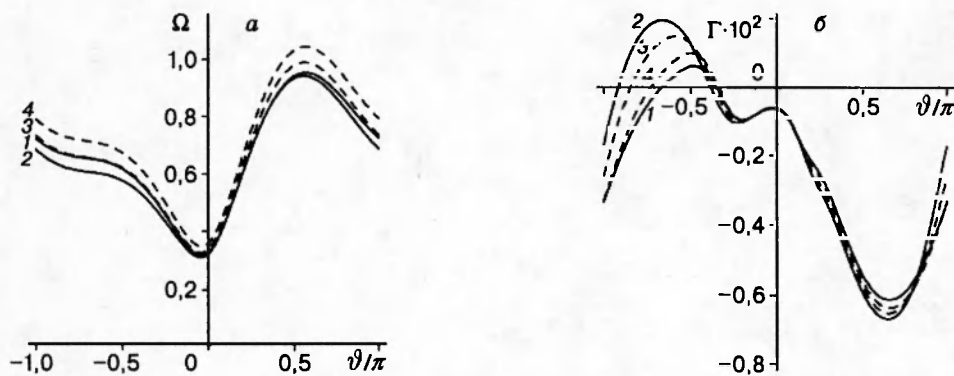


Рис. 1

$\vartheta_c \simeq -0,36\pi$ и $\omega_c \simeq 0,60$.

На рис. 1 показаны дисперсионные характеристики цепочки (а) и инкремент резистивной неустойчивости (б), построенный с помощью (3.1), (3.2) (кривые 1, 2 соответствуют $V = 0,77; 0,8$). Обратим внимание на то, что неустойчивость впервые возникает при $\vartheta \neq \pm\pi$, а фазовая скорость возмущений на пороге потери устойчивости направлена навстречу течению. На первый взгляд последнее находится в противоречии с известными результатами теории устойчивости волн на упругих покрытиях, когда нарастают возмущения, бегущие вдоль течения [7]. Однако следует учесть, что возмущению (2.6) отвечает широкий пространственный спектр прогиба поверхности по координате x , включающий как «прямые», так и «обратные» волны. Ввиду наличия достаточно большой взаимной упругости для смежных пластин (см. [3]) направление энергообмена с течением зависит не только от частоты их колебаний ω , но и от сдвига по фазе ϑ . Дисперсия волн консервативной системы в данном случае навязывает такое фазовое соотношение прогибов, что порог неустойчивости впервые превышает для волн, бегущих навстречу течению.

При малом превышении критической скорости V'_c возбуждается узкий спектр волн по ϑ (кривая 1 на рис. 1). В этом случае можно построить уравнение Гинзбурга — Ландау для слабонелинейных модулированных волн, которое в настоящее время является одной из базовых моделей, используемых для исследования динамического хаоса [8, 9].

Дисперсионное уравнение для слабонелинейных волн получается из (2.7) после замены $D_s \rightarrow D_s - (9/4)\varepsilon|A|^2$. Соответственно частота волн с точностью до поправок второго порядка по амплитуде принимает вид

$$\Omega = \tilde{\Omega}(|A|^2, \vartheta) \equiv \Omega(\vartheta) + \rho|A|^2 \left(\rho = \frac{\partial \varepsilon}{8(\Omega + (B_1/M_0) \sin \vartheta)} \right). \quad (3.3)$$

При вычислении инкремента Γ в (3.2) следует подставлять частоту с нелинейной поправкой (3.3). Рассматривая выражение для Γ до подстановки в него $\omega = \tilde{\Omega}$ как функцию ω , воспользуемся тем, что она переходит через нуль при $\omega = \omega_*(\vartheta)$. (При $\omega = \omega_*$ потери компенсируются поступлением энергии из потока. Очевидно, что $\omega_c = \omega_*(\vartheta_c)$.) Используя линейную аппроксимацию этой функции, можно записать $\Gamma \approx \mu[\omega - \omega_*(\vartheta)]$, где $\mu(\vartheta) = \partial\Gamma/\partial\omega|_{\omega=\omega_*} < 0$. В результате получим выражение для комплексной частоты нелинейных волн с точностью до поправок второго порядка по амплитуде:

$$\tilde{\Omega} = \Omega(\vartheta) + \rho(\vartheta)|A|^2 + i\Gamma(\vartheta) + i\mu(\vartheta)\rho(\vartheta)|A|^2. \quad (3.4)$$

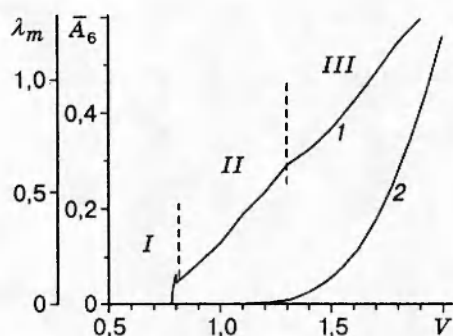


Рис. 2

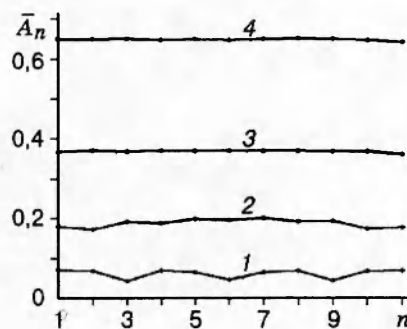


Рис. 3

Главную часть решения слабонелинейной задачи представляем в виде (2.6), где $\vartheta = \vartheta_0$, $\omega = \omega_0$ — значения параметров волны в максимуме инкремента $\Gamma(\vartheta)$ (которые, вообще говоря, отличаются от ϑ_c и ω_c), а комплексная амплитуда A является медленно меняющейся функцией n и t .

Умножая (3.4) на $A(n, t) \exp(in\vartheta - i\omega t)$ и применяя стандартную процедуру преобразования Фурье для узких волновых пакетов [10], получим одномерное уравнение Гинзбурга — Ландау в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{2}(\Gamma_0'' - i\Omega_0'') \frac{\partial^2 A}{\partial n^2} = \varepsilon A - (i + |\mu_0|)\rho_0 |A|^2 A, \quad (3.5)$$

где $\varepsilon = \Gamma(\vartheta_0)$ — надкритичность системы поток — цепочка; $\Gamma_0'' < 0$, Ω_0'' , μ_0 и ρ_0 — значения $\partial^2 \Gamma / \partial \vartheta^2$, $\partial^2 \Omega / \partial \vartheta^2$, μ и ρ при $\vartheta = \vartheta_0$. Уравнение (3.5) записано в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью волны (произведена замена $t_{\text{нов}} = t$, $n_{\text{нов}} = n - (\partial \Omega / \partial \vartheta_0)t$, после чего опущен индекс нов).

Характерной особенностью уравнения Гинзбурга — Ландау (3.5) является его «квазиконсервативная» структура, что выражается в малой величине диссипативных членов: $|\mu_0| \ll 1$, $|\Gamma_0''| \ll |\Omega_0''|$. Однако малая диссипативная нелинейность играет принципиальную роль, так как именно она ограничивает неустойчивость, возникающую при $\varepsilon > 0$. Малый член $\sim \Gamma_0''$ также следует сохранить в (3.5), поскольку он ограничивает спектральную ширину области неустойчивости по ϑ (кривая 1 на рис. 1, б вблизи $\vartheta = \vartheta_0 \sim 0,5\pi$).

Уравнение (3.5) имеет решение в виде стационарной волны

$$A = \sqrt{\varepsilon / |\mu_0| \rho_0} \exp(-i\varepsilon t / |\mu_0|).$$

Известный критерий возникновения модуляционной неустойчивости для нормированного уравнения Гинзбурга — Ландау [9] в записи через коэффициенты (3.5) принимает вид $\Omega_0'' < -|\Gamma_0'' \mu_0|$. Эта неустойчивость не имеет порога по надкритичности. Кроме того, поскольку диссипативные члены малы, указанное условие фактически совпадает с условием Лайтхилла возникновения модуляционной неустойчивости в консервативной задаче [10], которое для (3.5) принимает вид $\Omega_0'' < 0$. Как видно из рис. 1, это условие выполняется для слабонадкритических волн. Таким образом, малая диссипация определяет уровень генерации, а модуляционная неустойчивость остается такой же, как в консервативной системе. В ряде работ показано (см., например, [11–13]), что одномерное уравнение Гинзбурга — Ландау описывает разнообразные режимы динамического хаоса.

4. Результаты численного исследования хаотических автоколебаний. Система уравнений (2.3), (2.5), (1.3) решалась численно для цепочки из 11 пластин. Численная схема включала метод Рунге — Кутты четвертого порядка и алгоритм переменного шага с контролем точности. В начальный момент произвольным образом задавались распределение малых прогибов A_k и нулевые значения $p_k, \zeta_k, \eta_k, \dot{\zeta}_k$ и $\dot{\eta}_k$. В уравнениях (2.5) полагалось $\alpha = 1$, что не ограничивает общности рассмотрения [3]. Усреднение по времени, обозначаемое далее угловыми скобками, производилось путем суммирования значений усредняемой величины через равноотстоящие моменты времени и деления результата на число точек. Среднеквадратичная амплитуда прогиба пластин определялась по формуле $A_n = \sqrt{\langle (A_n - \langle A_n \rangle)^2 \rangle}$.

При достаточно больших потерях в пластинах r автоколебания не возникают. Пренебрегая вкладом в Q_k , обусловленным энергообменом с пограничным слоем ($\beta, \beta_1 \rightarrow 0$), нетрудно получить соотношение

$$\frac{dH}{dt} = -2\bar{r} \sum_j A_j^2 \leq 0. \quad (4.1)$$

Из (4.1) следует, что система стремится к состоянию равновесия, которое совпадает с одним из локальных минимумов гамильтониана H . Отличные от нуля стационарные прогибы возникают при $V > V_c$. В частности, из (2.3), (2.5) легко находится стационарное состояние бесконечной цепочки в виде знакопеременного прогиба $A_n = (-1)^n \sqrt{(D_0 - 2D_1)/3\alpha}$. Численное решение уравнений показало, что цепочка с большими потерями в пластинах демонстрирует свойство мультистабильности (множественности асимптотических состояний), характерное для диссипативных распределенных систем [8, 9]. Каждое из этих состояний представляет собой последовательность отрезков со знакопеременным прогибом. В местах соединения отрезков прогиб соседних пластин одинаков, что может рассматриваться как появление дефектов в периодической «решетке». Возникновение дефектов можно связать с наличием произвола в выборе начала отсчета («фазы») в решении со знакопеременным прогибом.

Автоколебания в цепочке с малыми потерями изучались с помощью численного интегрирования уравнений (2.3), (2.5), (1.3) при $\bar{r} = 0,004$. Основные результаты вычислений представлены на рис. 2–5. Кривая 1 на рис. 2 — зависимость среднеквадратичной амплитуды колебаний прогиба центральной пластины A_6 от скорости потока V , цифрами I–III отмечены области с качественно различными режимами колебаний. Хорошо известно, что одним из основных критериев существования в фазовом пространстве системы хаотического аттрактора является наличие положительных ляпуновских показателей [10, 14]. Наибольший из них λ_m определяет скорость «разбегания» фазовых траекторий на этом аттракторе. Кривая 2 на рис. 2 — поведение главного ляпуновского показателя λ_m .

На рис. 3 показано распределение A_n вдоль цепочки при различных скоростях потока (кривые 1–4 соответствуют $V = 0,8; 1,1; 1,5; 2,0$). Пространственные и временные спектры скорости прогиба A_k представлены на рис. 4, 5 (на рис. 4 сплошные линии отвечают $V = 0,8$, а пунктирные — $V = 1,1$; на рис. 5 сплошные линии — спектры при $V = 1,5$, а пунктирные — при $V = 2$). Пространственный спектр мощности $S(\vartheta)$ вычислялся по формуле $S = \langle |A_\vartheta|^2 \rangle / n_t$, где n_t — число звеньев цепочки, A_ϑ — преобразование Фурье дискретной функции A_n . Временные спектры мощности $I(\omega)$ вычислялись для центральной пластины по схеме, описанной в [3]. На рис. 6 приведен коэффициент пространственной корреляции колебаний прогиба относительно центральной пластины

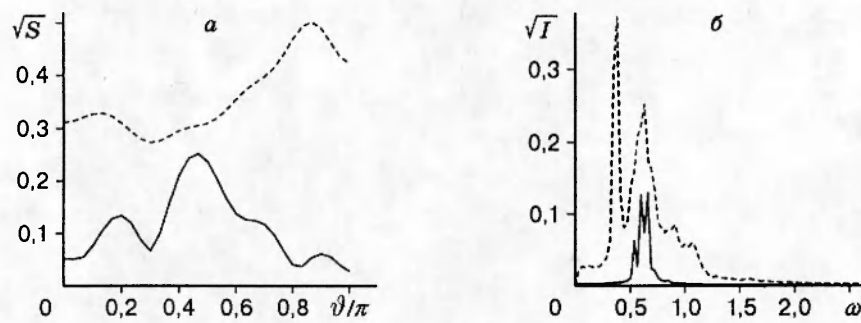


Рис. 4

$$K = \langle (A_6 - \langle A_6 \rangle)(A_n - \langle A_n \rangle) \rangle / \bar{A}_6 \bar{A}_n.$$

Как видно из рис. 3, практически при любой скорости потока распределение интенсивности колебаний вдоль цепочки близко к однородному. Это указывает на незначительную роль волнового переноса мощности вдоль цепочки. Поэтому вполне естественной представляется близость критической скорости возбуждения колебаний (см. рис. 2) к значению V'_c , которое было найдено в п. 3 для одной волны в бесконечной цепочке. В очень узкой области I на рис. 2 наблюдается режим с периодической модуляцией колебаний во времени, несущая частота которых приблизительно соответствует максимуму инкремента линейной теории (рис. 1, б). Эта картина хорошо согласуется с предсказанной в п. 3 на основе уравнения Гинзбурга — Ландау.

В области II на рис. 2 генерируются колебания, для которых характерно существование нескольких разнесенных пиков в пространственном и временном спектрах. Из-за небольшой длины цепочки происходит довольно значительное (на величину $\Delta \vartheta \simeq 2\pi/n_l = 0,2$) размывание дискретных пиков пространственного спектра. Переход к хаотическому режиму происходит в области II вблизи ее границы с областью I. Главный ляпуновский показатель λ_m здесь очень мал, и место изменения его знака не удается установить точно из-за погрешности вычислений. Существование хаотических автоколебаний в основной части области II подтверждается наличием положительного λ_m (см. рис. 2).

Как видно из рис. 4, а, при $V = 0,8$ в пространственном спектре имеются пики с волновыми числами $\vartheta_1/\pi = 0,68$, $\vartheta_2/\pi = 0,47$ и $\vartheta_3/\pi = 0,9$, а также $\vartheta'/\pi = 0,2$. Пики в частотном спектре имеют частоты $\omega_1 = 0,60$, $\omega_2 = 0,54$ и $\omega_3 = 0,66$. Используя дисперсионную кривую 2 на рис. 1, а, нетрудно убедиться, что пары значений (ω_1, ϑ_1) , (ω_2, ϑ_2) и (ω_3, ϑ_3) приблизительно соответствуют волнам линейной задачи, бегущим навстречу течению. Появление пика $\vartheta'/\pi = 0,2$ можно объяснить наличием в цепочке отраженных волн, которые имеют близкие частоты $\omega_{1,2,3}$ (см. дисперсионную ветвь 2 при $\vartheta > 0$). Волна (ω_1, ϑ_1) находится в максимуме инкремента линейной задачи (рис. 1, б). Появление волн (ω_2, ϑ_2) , (ω_3, ϑ_3) можно объяснить тем, что в цепочке возникает четырехволновое резонансное взаимодействие: $2\omega_1 \approx \omega_2 + \omega_3$, $2\vartheta_1 \approx \vartheta_2 + \vartheta_3$. Этот процесс можно рассматривать как результат трансформации модуляционной неустойчивости, описываемой уравнением Гинзбурга — Ландау, поскольку при увеличении V вследствие быстрого расширения области неустойчивости по ϑ волны-спутники удаляются от основной волны.

На соотношение интенсивностей генерируемых волн существенное влияние оказывает их нерезонансное (энергетическое) взаимодействие. Консервативная кубичная нелинейность приводит к нелинейному сдвигу частоты волны, благодаря чему зависимость ин-

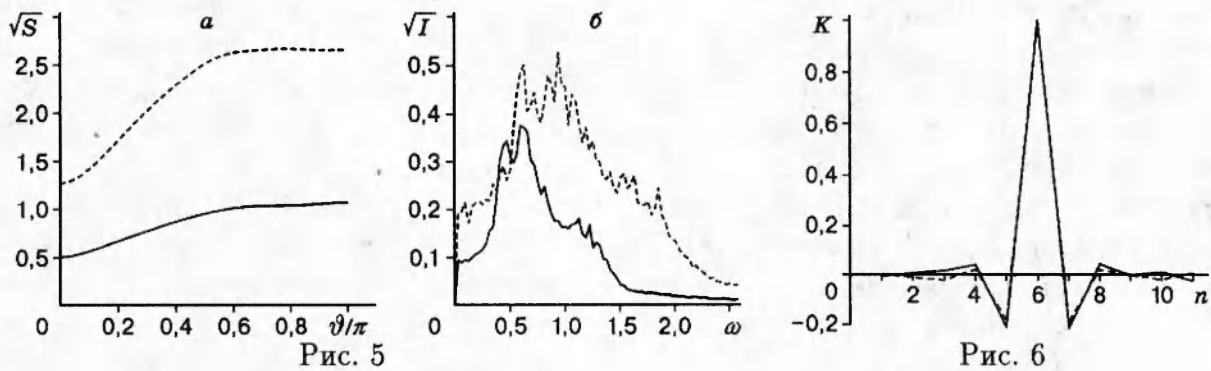


Рис. 5

Рис. 6

кремента от частоты трансформируется в его зависимость от амплитуды. Чтобы проиллюстрировать это свойство, найдем инкремент слабого возмущения с волновым числом ϑ_α и частотой $\omega_\alpha = \Omega(\vartheta_\alpha)$ в присутствии сильного возмущения с волновым числом $\vartheta \neq \vartheta_\alpha$ и амплитудой A . Дисперсионное уравнение для такого «пробного» возмущения получается путем замены в (2.8) $D_s \rightarrow D_s - (9/2)\varepsilon|A|^2, \vartheta \rightarrow \vartheta_\alpha$. Кривые 3 и 4 на рис. 1 показывают поведение инкремента пробной волны при $A_6 = |A|/\sqrt{2} = 0,1$ и $0,15$. Из представленной зависимости следует, в частности, что интенсивное возмущение (ω_2, ϑ_2) , сдвигая максимум инкремента в сторону меньших значений $|\vartheta|$, ослабляет нарастание волны (ω_1, ϑ_1) , находящейся в максимуме инкремента линейной задачи. Таким образом, можно предположить, что динамический хаос в области II возникает в результате резонансного и энергетического взаимодействия нескольких квазигармонических волн.

В области III на рис. 2 наблюдается режим «развитого» хаоса, который характеризуется сплошными пространственными и временными спектрами (см. рис. 5). Пространственные спектры в области III не имеют выраженных пиков, а их максимум находится на π -колебаниях. Концентрация энергии пространственных гармоник на π -колебаниях связана с усилением при больших скоростях тенденции к противофазному прогибу смежных пластин, обусловленной искривлением линий тока потенциального течения [3]. Противофазный характер прогиба и быстрая потеря корреляции хаотических пульсаций вдоль цепочки наглядно иллюстрируются пространственной корреляционной функцией, показанной на рис. 6.

Граница между областями II и III достаточно условна и приблизительно соответствует критической скорости дивергенции V_c (см. п. 1). Развитие сильной стохастичности в области III, характеризующейся большими значениями λ_m , можно объяснить появлением сепаратрисных контуров на фазовом портрете отдельных пластин-осцилляторов. Хаос возникает в результате «фазового перемешивания» под действием консервативных связей между пластинами подобно тому, как это происходит в случае двух связанных пластин [3]. Частотные спектры на рис. 5 также аналогичны полученным в [3].

Расчеты показали, что коррекция присоединенной массы при малых $|\vartheta|$, о которой говорилось в п. 2, оказывает влияние на параметры колебаний только в областях I и II, где в ее отсутствие возможно появление пиков в пространственном спектре при малых $|\vartheta|$. Для «развитого» хаоса она не имеет существенного значения, так как спектр смещается в сторону π -колебаний уже благодаря действию ближних связей.

Таким образом, в данной работе предложена модель ближнего взаимодействия пластин в длинной цепочке, обтекаемой турбулентным пограничным слоем, и на ее основе изучены

хаотические режимы автоколебаний длинной цепочки. Все расчеты проведены для обтекания цепочки «тяжелой» несжимаемой жидкостью. Показано, что закономерности автоколебаний в «докритической» области (по отношению к дивергенции прогиба) могут быть объяснены на волновом языке. Принципиальное отличие автоколебаний в длинной цепочке от колебаний в системе двух связанных пластин состоит в том, что в длинной цепочке стохастизация происходит почти сразу после появления неустойчивости. Кроме того, для длинной цепочки характерны более высокие значения главного ляпуновского показателя и более быстрая потеря «памяти» хаотического движения о внешних воздействиях.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-05-8075) и Международного научного фонда (грант NOV000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Реутов В. П. О неустойчивости периодического прогиба панельной поверхности в турбулентном пограничном слое // ПМТФ. 1992. № 4. С. 74–83.
2. Реутов В. П. О неустойчивости изгибных колебаний пластин в турбулентном пограничном слое // ПМТФ. 1993. № 1. С. 108–115.
3. Реутов В. П. Нелинейный флаттер пластин в турбулентном пограничном слое слабосжимаемого течения // ПМТФ. 1993. № 2. С. 58–66.
4. Dowell E. H. Flutter of a buckled plate as an example of chaotic motion of a deterministic autonomous system // J. Sound and Vibr. 1982. V. 85, N 3. P. 333–344.
5. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972.
6. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960.
7. Carpenter P. W., Garrad A. D. The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Pt 2: Flow induced surface instabilities // J. Fluid Mech. 1986. V. 170. P. 199–231.
8. Рабинович М. И., Сущик М. М. Регулярная и хаотическая динамика структур в течениях жидкости // Успехи физ. наук. 1990. Т. 160, № 1. С. 1–64.
9. Рабинович М. И., Фабрикант А. Л., Цимринг Л. Ш. Конечномерный пространственный беспорядок // Успехи физ. наук. 1992. Т. 162, № 8. С. 1–42.
10. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
11. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
12. Vazhenov M. V., Rabinovich M. I., Fabrikant A. L. The amplitude-phase turbulence transition in Ginzburg — Landau model as a critical phenomenon // Phys. Lett. A. 1992. V. 163. P. 87–94.
13. Popp S., Stiller O., Aranson I., et al. Localized hole solution and spatiotemporal chaos in the 1D complex Ginzburg — Landau equation // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70, N 25. P. 3380–3383.
14. Шустер Г. Г. Динамический хаос: введение. М.: Мир, 1988.

*Поступила в редакцию 21/III 1995 г.,
в окончательном варианте — 27/VII 1995 г.*