

О СУЩЕСТВОВАНИИ РАЗРЫВА В ПРОФИЛЕ МЕДЛЕННОЙ
УДАРНОЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

О. И. Дементий, С. В. Дементий

(Харьков)

Проведен анализ структуры профиля медленной ударной магнитогиродинамической волны произвольной интенсивности в невязкой среде. Показано, что условие возникновения разрывного профиля совпадает с условием возникновения изотермического скачка в обычной газодинамике.

1. Система уравнений, описывающая стационарный профиль плоской ударной волны в системе отсчета, в которой волна покоится, имеет вид

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k a_{ik}(u) \frac{du_k}{dx} = B_i(u) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (1.1)$$

$$B_i(u) = 0 \quad (i = m + 1, \dots, n) \quad (1.2)$$

Здесь $u = \{u\}_1^n$ — совокупность параметров, описывающих состояние среды, $a_{ik}(u)$ и $B_i(u)$ — известные ограниченные дифференцируемые функции своих аргументов, α_k — диссипативные коэффициенты, причем не нарушая общности, можно положить $\alpha_k \neq 0$ ($k = 1, \dots, m$), $\alpha_k = 0$ ($k = m + 1, \dots, n$). Граничные условия состоят в том, что при $x \rightarrow \pm \infty$ параметры $u_k(x)$ стремятся к определенным значениям u_k^\pm . Эти значения должны, разумеется, удовлетворять условиям

$$B_i(u^\pm) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Решая уравнения (1.1) относительно производных, получаем

$$\alpha_k \frac{du_k}{dx} = \frac{|D_k|}{|a_{ik}|} \quad (k, i = 1, \dots, m) \quad (1.3)$$

Уравнения (1.1) описывают реальные диссипативные процессы в ударной волне, поэтому определитель $|a_{ik}|$ не может обращаться в нуль на интервале (u^-, u^+) , т. е. производные du_k/dx ($k = 1, \dots, m$) всегда конечны, а сами параметры $u_k(x)$ ($k = 1, \dots, m$) непрерывны.

Дифференцируя уравнения (1.2) по x и решая их относительно производных оставшихся $n - m$ параметров, получаем

$$\frac{du_k}{dx} = \frac{|D_k^*|}{|b_{ik}|}, \quad b_{ik} = \frac{\partial B_i(u)}{\partial u_k} \quad (i, k = m + 1, \dots, n) \quad (1.4)$$

Здесь $|D_k^*|$ — определитель, составленный из элементов матрицы (b_{ik}) , в которой k -столбец заменен столбцом функций $C_i(u)$

$$C_i(u) = - \sum_{j=1}^m b_{ij} \frac{du_j}{dx} \quad (i = m + 1, \dots, n) \quad (1.5)$$

Решение системы (1.1), (1.2) (или системы (1.3), (1.4)), соединяющее граничные особые точки u^- и u^+ , существует, и по крайней мере в случае быстрых и медленных ударных волн единственно [1]. Кроме того, если на интервале (u^-, u^+) определитель $|b_{ik}|$ не обращается в нуль, все функции $u_k(x)$ также и непрерывны [2].

Обращение определителя $|b_{ik}|$ в нуль на интервале (u^-, u^+) соответствует переходу внутри профиля волны через фазовую скорость высшей системы (идеальной системы, получающейся из системы (1.1), (1.2) при обращении всех диссипативных коэффициентов α_k в бесконечность) [2,3].

Как видно из (1.4), при переходе через n -мерную поверхность $|b_{ik}| = 0$ в $(n+1)$ -мерном пространстве величин x, u_1, \dots, u_n производные du_k/dx ($k = m+1, \dots, n$) меняют знак, проходя через бесконечность, что соответствует либо неограниченному возрастанию, либо неоднозначности $n - m$ функций $u_k(x)$ ($k = m+1, \dots, n$) и свидетельствует об отсутствии непрерывного по x решения.

Исключения составляют особые точки u^c , в которых одновременно с определителем $|b_{ik}|$ в нуль обращаются все определители $|D_k^*|$, что, как легко видеть, имеет место при выполнении условия

$$C_{m+1}\lambda_{m+1} + C_{m+2}\lambda_{m+2} + \dots + C_n\lambda_n = 0$$

где λ_i — корни однородной системы

$$b_{m+1,k}\lambda_{m+1} + b_{m+2,k}\lambda_{m+2} + \dots + b_{nk}\lambda_n = 0 \quad (k = m+1, \dots, n)$$

Таким образом, профиль ударной волны содержит разрыв, если при переходе через фазовую скорость высшей системы (в дальнейшем для краткости будем называть ее критической) система уравнений (1.1), (1.2) не содержит особой точки внутри интервала (u^-, u^+) (например, [3] при $m = 1$), или особая точка существует, но решение не проходит через нее [4]. Если же при переходе через критическую скорость решение проходит через особую точку, то вопрос о разрывности решения должен рассматриваться особо: в этом случае решение может быть как непрерывным [5], так и (как будет показано ниже) разрывным.

2. Рассмотрим плоскую ударную магнитогазодинамическую волну в идеальном газе. В магнитогазодинамическом приближении система уравнений, описывающая профиль стационарной ударной волны, имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{dH_\tau}{dx} &= v_n H_\tau - v_\tau H_n - C_1 & (H_n = \text{const}) & \quad (2.1) \\ \eta \frac{dv_\tau}{dx} &= jv_\tau - \frac{H_n}{4\pi} H_\tau - C_2 & (\sigma v_n \equiv j = \text{const}) & \\ \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) \frac{dv_n}{dx} &= jv_n + p + \frac{H^2}{8\pi} - C_3, & p = t\rho & \quad \left(t \equiv \frac{RT}{\mu}\right) \\ \kappa \frac{\mu}{R} \frac{dt}{dx} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} jt - j \frac{v^2}{2} + \frac{H_n H_\tau}{4\pi} v_\tau - \frac{H^2}{8\pi} v_n - pv_n + \\ &+ \frac{C_1}{4\pi} H_\tau + C_2 v_\tau + C_3 v_n - C_4 \end{aligned}$$

Здесь H_τ, v_τ и H_n, v_n — тангенциальные и нормальные к фронту волны компоненты магнитного поля и скорости потока газа; p, ρ, t — давление, плотность и внутренняя энергия 1 г газа; η, ζ — первая и вторая вязкость; σ, κ — электро- и теплопроводность газа; C_1, C_2, C_3, C_4 — константы, определяемые из граничных условий.

При помощи несложных вычислений легко убедиться в том, что критическая скорость, переход через которую возможен внутри профиля эволюционной магнитогидродинамической ударной волны, существует только в том случае, когда диссипацией, связанной с вязкостью среды можно пренебречь. При $\eta = \zeta = 0$ система (2.1) сводится к системе двух дифференциальных уравнений [2,4]

$$\beta \frac{dh}{dx} = \varphi(u, h), \quad \chi \frac{du}{dx} = \frac{f(u, h)}{\psi(u, h)} \quad (2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u &= \frac{v_n(x) - v_n^-}{v_n^-}, \quad h = \frac{H_\tau(x) - H_\tau^-}{H_\tau^-}, \quad \beta = \frac{c^2}{4\pi\sigma v_n^-}, \quad \chi = \frac{\mu(\gamma-1)}{jR} \\ \varphi(u, h) &= u + (1 - A_n^{-2})h + uh \\ \psi(u, h) &= \frac{1}{\gamma M^2} - 1 - 2u - A_\tau^{-2} \left(1 - \frac{h}{2}\right) h \equiv \frac{t_u'}{(v_n^-)^2} \\ f(u, h) &= (M^{-2} - 1)u - A_\tau^{-2}h - \frac{1}{2}(\gamma + 1)u^2 - \frac{1}{2}A_\tau^{-2} \times \\ &\times [A_n^{-2} + \gamma(1 - A_n^{-2})]h^2 - \gamma A_\tau^{-2}uh \left(1 + \frac{h}{2}\right) + \frac{\chi}{\beta} A_\tau^{-2}(1 + u) \times \\ &\times (1 + h)\varphi(u, h) \equiv f_0(u, h) - \frac{\chi}{\beta} \frac{t_h'}{(v_n^-)^2} \varphi(u, h) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь M — число Маха, A_n — нормальное и A_τ — тангенциальное числа Альфвена в невозмущенной среде перед волной. Для медленных ударных волн $A_n < 1$.

Граничные особые точки O ($u^- = 0, h^- = 0$) и A (u^+, h^+) определяются из уравнений $\varphi(u, h) = 0, f(u, h) = 0$. Переходу через критическую скорость (в данном случае критической является изотермическая скорость звука) соответствует выполнение неравенств

$$\psi(O) < 0 \quad (\gamma M^2 > 1), \quad \psi(A) > 0 \quad (2.4)$$

При этом граничные особые точки O и A будут седловыми. Интегральная кривая [5] выходит из точки O под направлением $z_2(O)$ и входит в точку A под направлением $z_1(A)$ (ограничиваемся случаем $\chi/\beta \ll 1$)

$$z_2(O) = \frac{\chi}{\beta} \frac{\psi(O) \varphi_u'(O)}{f_u'(O)} + O\left(\frac{\chi^2}{\beta^2}\right) > 0 \quad (2.5)$$

$$z_1(A) = -\frac{f_u'(A)}{f_h'(A)} + \frac{\chi}{\beta} \frac{\psi(A) \left(f_u'(A) \varphi_h'(A) - f_h'(A) \varphi_u'(A)\right)}{f_u'(A) f_h'(A)} + O\left(\frac{\chi^2}{\beta^2}\right) > 0$$

При выполнении условий (2.4) система (2.2) имеет еще одну особую точку C (u^c, h^c), координаты которой определяются из уравнений

$$\varphi(u, h) = 0, \quad f(u, h) = 0$$

Точка C представляет собой узел с собственными направлениями

$$\begin{aligned} z_1(C) &= -\frac{f_u'(C)}{f_h'(C)} + \frac{\chi}{\beta} \varphi(C) \frac{f_u'(C) \psi_h'(C) - f_h'(C) \psi_u'(C)}{f_u'(C) f_h'(C)} + O\left(\frac{\chi^2}{\beta^2}\right) > 0 \\ z_2(C) &= \frac{\chi}{\beta} \frac{\varphi(C) \psi_u'(C)}{f_u'(C)} + O\left(\frac{\chi^2}{\beta^2}\right) > 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

причем под направлением $z_2(C)$ в узел входит единственная интегральная кривая, которую в дальнейшем будем называть сепаратрисой узла.

3. Предварительно рассмотрим более простой случай нетеплопроводной среды. Система уравнений, описывающая профиль ударной волны, приобретает при этом вид

$$\beta \frac{dh}{dx} = \varphi(u, h), \quad f_0(u, h) = 0 \quad (3.1)$$

Согласно п. 1 эта система не содержит особой точки внутри интервала (OA) и при переходе через критическую скорость ($f_{0u}(u, h) = 0$), которой в данном случае является скорость звука, все параметры среды, за исключением магнитного поля, терпят разрыв. Действительно, функция $u(x)$, являющаяся решением системы уравнений

$$\beta \frac{du}{dx} = -\varphi(u, h) \frac{f_{0h}'(u, h)}{f_{0u}'(u, h)}, \quad f_0(u, h) = 0$$

как легко видеть, при $M > 1$ содержит нефизический участок $du/dx > 0$ (волна разрежения). Отсюда непосредственно следует, что, поскольку

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{h^-} > 0 \quad \text{при } M > 1 \quad \left(\left. \frac{du}{dx} \right|_{h^+} < 0 \right)$$

профиль скорости сверхзвуковой медленной ударной волны начинается скачком, величина которого определяется из условия

$$f_0(u, 0) = 0 \quad (3.2)$$

Подтверждение справедливости сделанного вывода можно получить из выражения (2.5), правая часть которого стремится к нулю при $\chi \rightarrow 0$, что указывает на существование участка волны, в котором происходит быстрое изменение скорости без изменения магнитного поля.

Нетрудно убедиться в том, что уравнение (3.2) дает значение скачка скорости, в точности совпадающее со скачком в газодинамической ударной волне [7]. То же можно сказать и о скачках давления, плотности и температуры. Таким образом, медленная сверхзвуковая ударная магнитогидродинамическая волна в вязкой нетеплопроводной среде начинается обычной газодинамической ударной волной (см. также [1, 8]).

4. Вернемся к системе (2.2). Исключая x , сведем систему двух уравнений к одному уравнению относительно dh/du

$$\frac{dh}{du} = \frac{\chi}{\beta} \frac{\varphi(u, h) \psi(u, h)}{f(u, h)} \quad (4.1)$$

Изоклины

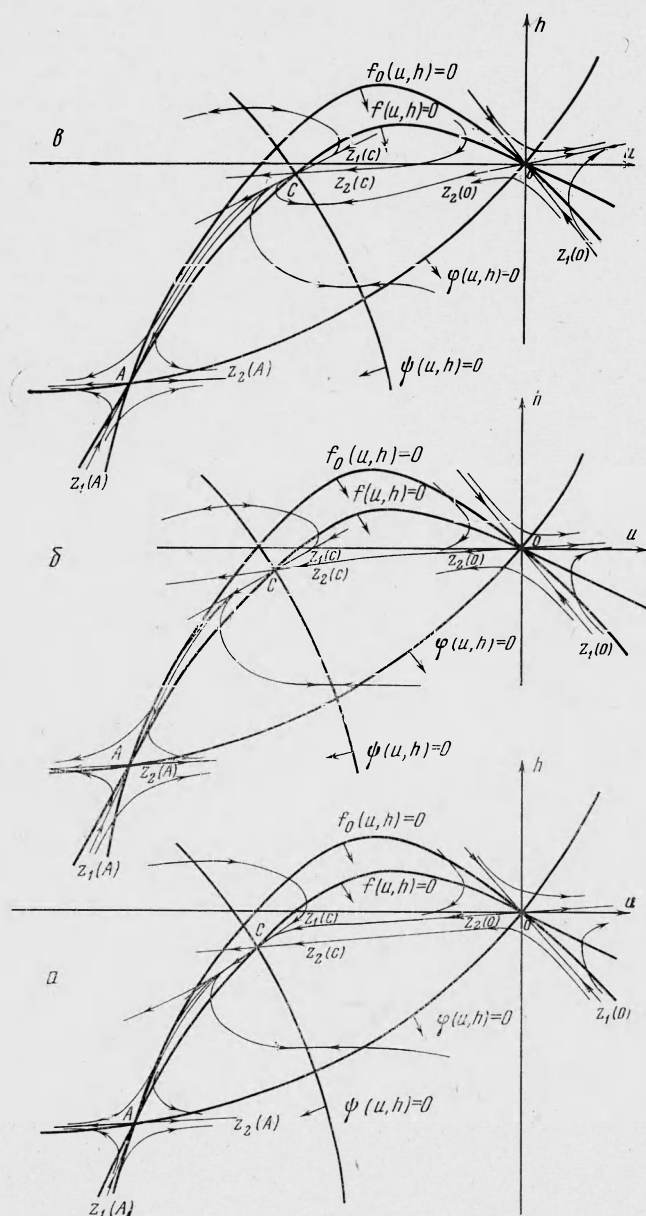
$$\varphi(u, h) = 0, \quad \psi(u, h) = 0 \quad \left(\frac{dh}{du} = 0 \right); \quad f(u, h) = 0 \quad \left(\frac{dh}{du} = \infty \right)$$

а также известный характер особых точек (см. п. 2) позволяют качественно представить ход интегральных кривых $h(u)$ (или $u(h)$), удовлетворяющих этому уравнению (см. фигуру).

Стрелками, отходящими от кривых $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, на фигуре указаны области положительных значений перечисленных функций. Стрелки на интегральных кривых показывают направление движения точки (u, h) вдоль интегральной кривой при возрастании x (см. (2.2)).

Легко видеть, что интегральная кривая, соединяющая точки O и A обязательно проходит через точку C , при этом ее ветвь CA имеет только одну общую точку с кривой $\psi(u, h) = 0$. Чтобы показать справедливость последнего утверждения, проведем в плоскости uh кривую $f_0(u, h) = 0$. В силу того что по крайней мере на интервале OA выполняется неравенство $f_{0h}'t_u' - f_{0u}'t_h' > 0$, наклон интегральных кривых в каждой точке на $f_0(u, h) = 0$ меньше наклона касательной к кривой $f_0(u, h) = 0$ в той же точке.

С другой стороны на изоклине $f(u, h) = 0$ наклон интегральных кривых всегда больше наклона касательной к этой изоклине. Отсюда



следует, что на интервале CA интегральная кривая целиком уместится в малой области, ограниченной кривыми $f(u, h) = 0$ и $f_0(u, h) = 0$.

В этом случае решение уравнения (4.1) имеет вид [5]

$$u(h) = u_f(h) - \int_{h^+}^h \exp \left[\int_s^h F(\alpha) d\alpha \right] \frac{du_f(s)}{ds} ds \quad (h^+ < h < h^c) \quad (4.2)$$

где $u_f(h)$ — непрерывная функция, определяемая соотношением $f(u, h) = 0$, а

$$F(h) = \frac{\beta}{\chi} \frac{f_u'(u_f(h), h)}{\psi(u_f(h), h) \varphi(u_f(h), h)} \quad (4.3)$$

Заметим, что функция $F(h)$ обращается в бесконечность в точках $h = h^+$ и $h = h^c$ и внутри интервала (h^c, h^+) отрицательна, а производная du_f/dh на этом интервале конечна и положительна. Поэтому интеграл в правой части (4.2) не меняет знака и обращается в нуль при $h \rightarrow h^+$ и $h \rightarrow h^c$. Откуда следует, что интегральная кривая на участке CA не может иметь никакой другой общей точки с кривой $\psi(u, h) = 0$, кроме точки C , и выходит из точки C под направлением $z_1(C)$.

Таким образом, вопрос о разрывности решения определяется поведением ветви интегральной кривой, соединяющей точки O и C . Здесь возможны следующие случаи: интегральная кривая пересекает изоклину $\psi(u, h) = 0$ только в точке C и входит в нее под направлением $z_1(C)$ (фигура, а), интегральная кривая пересекает изоклину $\psi(u, h) = 0$ только в точке C , но входит в нее под направлением $z_2(C)$ (фигура, б), и, наконец, прежде чем попасть в точку C , интегральная кривая пересекает изоклину $\psi(u, h) = 0$ еще в одной точке (фигура, в).

В первом случае $h(u)$ — гладкая непрерывная функция, и все параметры среды $u_h(x)$ и их производные $du_h(x)/dx$ являются непрерывными функциями x .

Во втором случае функция $h(u)$ имеет в точке C излом, и при этом все $u_h(x)$ также непрерывны, но терпят разрыв все производные du_h/dx , за исключением производных магнитного поля и температуры (слабый разрыв).

В третьем случае, как видно из фигуры, б, при переходе через $\psi(u, h) = 0$ направление движения точки (u, h) вдоль интегральной кривой, соответствующее росту x , меняется на противоположное. Линия $\psi(u, h) = 0$ является особой в том смысле, что из точек этой линии, расположенных выше точки C , интегральные кривые расходятся, а в точках, расположенных ниже C , сходятся из примыкающих к ним областей. Следовательно, непрерывный переход из точки O в точку C при монотонном возрастании x невозможен. Иными словами, внутри ударного слоя терпят разрыв все производные du_h/dx , а также сами функции $u_h(x)$, за исключением магнитного поля и температуры, которые остаются непрерывными (изотермический изомагнитный скачок).

Как было показано в п. 3, в отсутствие теплопроводности медленная ударная магнитогазодинамическая волна начинается обычной газодинамической ударной волной. Очевидно, что при отличной от нуля, но исчезающе малой теплопроводности условие возникновения изотермического скачка внутри профиля медленной ударной волны совпадает с условием возникновения изотермического скачка в обычной газодинамике [7]

$$M^2 > \frac{3\gamma - 1}{\gamma(3 - \gamma)} \quad (4.4)$$

В случае конечной теплопроводности выяснение критерия возникновения скачка в аналитическом виде встречает значительные трудности, этот критерий был оценен численным методом.

Наиболее удобным способом решения данного вопроса оказалось определение поведения сепаратрисы узла C вблизи точки O . Во-первых, решение уравнения (4.1) для сепаратрисы обладает устойчивостью в области $-1 < u < 0$, $-1 < h < 0$, так как это единственная кривая, выходящая из точки C под направлением $z(C)$, и, во-вторых, позволяет легко отделить непрерывные решения от разрывных. Интегрирование уравнения (4.1) было проведено на ЭВМ стандартным методом от точки C в направлении возрастания u до пересечения сепаратрисы с одной из координатных осей, причем обеспечивалась относительная точность в последней рассчитанной точке не хуже 10^{-5} .

В результате расчета было обнаружено, что при

$$M^2 \leq \frac{3\gamma - 1}{\gamma(3 - \gamma)} - 0.01$$

независимо от конкретных значений остальных исходных параметров, изменявшихся в широких пределах ($0.2 \leq A_n \leq 0.95$, $0.3 \leq A_z \leq 5$, $\chi/\beta = 0.01, 0.1$) сепаратриса пересекает ось h ниже точки O .

При этом выходящая из точки O интегральная кривая, как ясно из фигуры, a , не может пересечь особую кривую $\psi(u, h) = 0$ ни в какой другой точке, кроме точки C , что соответствует непрерывному профилю ударной волны.

При

$$M^2 \geq \frac{3\gamma - 1}{\gamma(3 - \gamma)} + 0.01$$

(также независимо от значений остальных параметров, см. выше) сепаратриса пересекает ось u левее точки O . Из фигуры, b видно, что в этом случае искомая интегральная кривая, прежде чем попасть в узел C , пересекает кривую $\psi(u, h) = 0$ еще в одной точке, т. е. профиль ударной волны содержит изотермический скачок. Таким образом, в пределах разрешения проведенного расчета условие возникновения изотермического изомагнитного скачка внутри профиля медленной ударной магнитогидродинамической волны совпадает с условием возникновения изотермического скачка в обычной газодинамике.

В заключение отметим, что существует предельный случай, в котором профиль медленной ударной магнитогидродинамической волны, а следовательно, и условия возникновения скачка могут быть найдены в аналитическом виде. Действительно, в отсутствие перед волной тангенциальной составляющей магнитного поля ($H_\tau^- = 0$) система (2.2) приобретает вид

$$\begin{aligned} \beta \frac{dH_\tau}{dx} &= (1 - A_n^{-2} + u) H_\tau & (4.5) \\ \chi \frac{du}{dx} &= \left(\frac{f}{\gamma M^2} - 1 - 2u - \frac{H_\tau^2}{8\pi\rho^-(v_n^-)^2} \right)^{-1} \left\{ (M^{-2} - 1)u - \frac{\gamma + 1}{2} u^2 - \right. \\ &\left. - \frac{H_\tau^2}{8\pi\rho^-(v_n^-)^2} \left[A_n^{-2} + \gamma(1 - A_n^{-2}) + \gamma u - 2 \frac{\chi}{\beta} (1 + u)(1 - A_n^{-2} + u) \right] \right\} \end{aligned}$$

Легко видеть, что удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{dH_\tau}{dx} = \frac{du}{dx} = 0 \quad (x = \pm \infty)$$

решение возможно только при $H_\tau(x) \equiv 0$, и система (4.5) сводится к одному уравнению

$$\chi \frac{du}{dx} = \left(\frac{1}{\gamma M^2} - 1 - 2u \right)^{-1} \left\{ (M^{-2} - 1)u - \frac{\gamma + 1}{2} u^2 \right\}$$

Это уравнение описывает профиль обычной ударной волны в невязком газе.

Отсюда непосредственно следует, что при $H_\tau^- = 0$ медленная магнитогидродинамическая волна может существовать только как обычная газодинамическая ударная волна с условием возникновения изотермического скачка (4.4).

Авторы благодарят Г. Я. Любарского за полезные советы и обсуждения затронутых в работе вопросов.

Поступила 1 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Э. Ударные волны в магнитной гидродинамике. М., Атомиздат, 1968, гл. 6.
2. Любарский Г. Я. О структуре ударных волн. ПММ, 1961, т. 2, вып. 6.
3. Whitham G. V. Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magnetohydrodynamics. Communications Pure and Appl. Math., 1959, vol. 12, No. 1.
4. Дементий О. И., Дементий С. В. О структуре быстрых магнитогидродинамических ударных волн. Магнитная гидродинамика, 1968, № 3.
5. Дементий О. И., Любарский Г. Я. К теории ударных волн малой интенсивности. Магнитная гидродинамика, 1967, № 3.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954, гл. 9, § 85.
8. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962, гл. 7.