

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ СТАЦИОНАРНОЙ  
РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Р. Я. Кучеров, Л. Э. Рикенглаз

(Сухуми)

При исследовании граничных задач разреженной плазмы неоднократно отмечалось появление стационарных периодических решений [1-3]. Так как существование таких решений приводит к конечному изменению одних параметров плазмы при бесконечно малых изменениях других, то область периодических решений рассматривается в ряде работ как область неустойчивости [3, 4]. Однако, насколько авторам известно, в имеющихся работах всегда делались произвольные допущения о распределении заряженных частиц. Например, в статье Бома [3] предлагалась односкоростная модель, в работах Ауэра и Гурвица, Макинтайра и др. [1, 2] произвольно задавалось распределение захваченных частиц.

Поэтому представляет интерес провести строгое исследование вопроса о существовании пространственной периодичности в стационарной разреженной плазме.

В настоящей работе найдены критерии появления пространственно периодических решений самосогласованной задачи в нулевом приближении по  $L/l$  ( $L$  — характерный размер системы,  $l$  — средняя длина свободного пробега частиц плазмы).

Для простоты вычислений ограничимся одномерной граничной задачей о разреженном газе (состоящем из электронов, ионов и нейтральных частиц), который заполняет пространство между двумя бесконечными параллельными пластинами. Влиянием магнитного поля будем пренебрегать. Распределение потенциала описывается уравнением Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi e (\rho_e - \rho_i) \quad \left( \rho_{e,i} = \int f_{e,i} dv \right) \quad (1)$$

Здесь  $x$  — координата, отсчитываемая от одного из электродов,  $\rho_{e,i}$  — электронная или ионная плотность соответственно,  $f_{e,i}$  — функции распределения электронов и ионов соответственно. Функции распределения электронов и ионов удовлетворяют кинетическим уравнениям

$$v_x \frac{\partial f_{e,i}}{\partial x} \pm \frac{e}{m_{e,i}} \frac{d\varphi}{dx} \frac{\partial f_{e,i}}{\partial v} = J_{e,i} \quad (2)$$

Здесь  $m_{e,i}$  — массы электрона либо иона соответственно,  $J_{e,i}$  — интегралы столкновений для электронов или ионов. В качестве граничных условий будем задавать потенциалы электродов ( $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(L) = \varphi_L$ ,  $L$  — межэлектродное расстояние) и уравнения, описывающие функции распределения частиц на электродах.

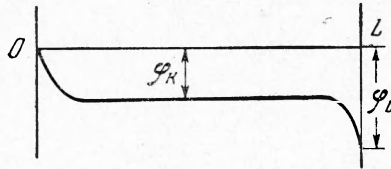
В работе [5] было показано, что в нулевом приближении по  $L/l$  при заданной разности потенциалов электродов монотонное распределение потенциала в межэлектродном пространстве, заполненном разреженным газом заряженных частиц, возможно лишь в том случае, если при некотором значении потенциала  $\varphi_k$  ( $0 \leq \varphi_k < \varphi_L$ ) выполняются условия

$$\rho \equiv \rho_e - \rho_i = 0, \quad d\varphi/dx = 0, \quad 0 < d\rho/d\varphi < \infty \quad \text{при } \varphi = \varphi_k \quad (3)$$

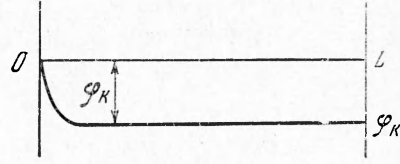
При этом распределение потенциала имеет вид, изображенный на фиг. 1: потенциал почти во всем пространстве практически постоянен и равен  $\varphi_k$ , за исключением узких приэлектродных слоев шириной порядка радиуса Дебая — Хюккеля  $\lambda_D$ , в которых происходит резкое изменение

потенциала от 0 до  $\varphi_k$  — вблизи одного и от  $\varphi_k$  до  $\varphi_L$  — вблизи другого электрода (для определенности здесь и ниже рассмотрим случай  $\varphi_L < 0$ ).

При параметрах газа, для которых  $\varphi_k = \varphi_L$ , производная  $d\rho/d\varphi$  обращается в бесконечность и последнее условие в неравенстве (3) не выполняется. Распределение потенциала в этом предельном монотонном режиме изображено на фиг. 2: за исключением узкого пограничного слоя вблизи начала



Фиг. 1



Фиг. 2

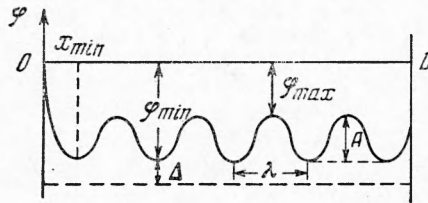
координат, потенциал строго постоянен и равен  $\varphi_k$ . Дальнейшее изменение параметров газа приводит к немонотонному распределению потенциала. Ниже найдены условия, при которых оно будет периодическим.

Для этого необходимо провести исследование уравнения Пуассона (1).

Предположим, что вблизи предельного монотонного режима плазма имеет периодическую структуру (фиг. 3). В этом случае необходимо различать частицы — захваченные и незахваченные в потенциальных ямах.

Интегралы движения  $\epsilon_e$  для электронов и  $\epsilon_i$  для ионов удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \epsilon_e &\geq -e\varphi_{\min}, & -e\varphi_{\min} &\geq \epsilon_e \geq -e\varphi_{\max} \\ (\epsilon_e &= \frac{1}{2}m_e v_x^2 - e\varphi(x)) \\ \epsilon_i &\geq e\varphi_{\max}, & e\varphi_{\min} &\leq \epsilon_i \leq e\varphi_{\max} \\ (\epsilon_i &= \frac{1}{2}m_i v^2 + e\varphi(x)) \end{aligned}$$



Фиг. 3

Здесь первые неравенства соответствуют незахваченным, а вторые — захваченным частицам;  $\varphi_{\min}$  и  $\varphi_{\max}$  — минимальные и максимальные значения потенциала в межэлектродном пространстве. В рассматриваемом нулевом приближении по  $L/l$  функции распределения зависят только от интегралов движения  $\epsilon_e$  или  $\epsilon_i$ .

Снабжая функции распределения незахваченных частиц индексом  $s$ , а захваченных — индексом  $w$ , можно записать выражения для электронной и ионной плотности при  $x \geq x_{\min}$  в виде

$$\begin{aligned} \rho_e(x) &= \frac{1}{\sqrt{2m_e}} \left[ \int_{-e\varphi_{\min}}^{\infty} [f_{ec}^+(\epsilon) + f_{ec}^-(\epsilon)] \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon + e\varphi}} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-e\varphi}^{-e\varphi_{\min}} [f_{ew}^+(\epsilon) + f_{ew}^-(\epsilon)] \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon + e\varphi}} \right] \\ \rho_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{2m_i}} \left[ \int_{e\varphi_{\max}}^{\infty} [f_{ic}^+(\epsilon) + f_{ic}^-(\epsilon)] \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - e\varphi}} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{e\varphi}^{e\varphi_{\max}} [f_{iw}^+(\epsilon) + f_{iw}^-(\epsilon)] \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - e\varphi}} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $f_{e,i}^-(\varepsilon)$  и  $f_{e,i}^+(\varepsilon)$  — соответственно функции распределения частиц с  $v_x > 0$  и  $v_x < 0$  в нулевом приближении по  $L/l$ ; они предполагаются проинтегрированными по  $v_y$  и  $v_z$ . Обозначая

$$\begin{aligned} f_{ec}^+(\varepsilon) + f_{ec}^-(\varepsilon) &= f_{ec}(\varepsilon), & f_{ic}^+(\varepsilon) + f_{ic}^-(\varepsilon) &= f_{ic}(\varepsilon) \\ f_{ew}^+(\varepsilon) + f_{ew}^-(\varepsilon) &= f_{ew}(\varepsilon), & f_{iw}^+(\varepsilon) + f_{iw}^-(\varepsilon) &= f_{iw}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (5)$$

и аналитически продолжив  $f_{ec}$  и  $f_{ic}$  в область интегралов движения  $\varepsilon_e, \varepsilon_i$ , соответствующую захваченным частицам, запишем формулы (4) в виде

$$\begin{aligned} \rho_e &= \frac{1}{\sqrt{2m_e}} \left\{ \int_{-e\varphi}^{\infty} f_{ec}(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon + e\varphi}} + \int_{-e\varphi}^{-e\varphi_{\min}} [f_{ew}(\varepsilon) - f_{ec}(\varepsilon)] \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon + e\varphi}} \right\} \\ \rho_i &= \frac{1}{\sqrt{2m_i}} \left\{ \int_{e\varphi}^{\infty} f_{ic}(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - e\varphi}} + \int_{e\varphi}^{e\varphi_{\max}} [f_{iw}(\varepsilon) - f_{ic}(\varepsilon)] \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - e\varphi}} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

Для дальнейших преобразований удобно перейти в формулах (6) соответственно к переменным  $t^2 = \varepsilon_{e,i} \pm e\varphi$ . Тогда

$$\begin{aligned} \rho_e &= \frac{1}{\sqrt{m_e}} \left\{ \int_0^{\infty} f_{ec}(t^2 - e\varphi) dt + \int_0^{\tau_-} F_e(t^2 - e\varphi) dt \right\} \quad (\tau_- = \sqrt{e(\varphi - \varphi_{\min})}) \\ \rho_i &= \frac{1}{\sqrt{m_i}} \left\{ \int_0^{\infty} f_{ic}(t^2 + e\varphi) dt + \int_0^{\tau_+} F_i(t^2 + e\varphi) dt \right\} \quad (\tau_+ = \sqrt{e(\varphi_{\max} - \varphi)}) \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$F_{e,i} = f_{e,i,w} - f_{e,i,c} \quad (8)$$

Предполагая, что вблизи предельного монотонного режима амплитуда  $\varphi_{\max} - \varphi_{\min}$  мала, можем разложить формулы (7) в ряд по степеням  $(\varphi_{\max} - \varphi_{\min})^{1/2}$ . С точностью до полуполных степеней  $\varphi_{\min} - \varphi$  имеем

$$\begin{aligned} \rho_e &= \frac{1}{\sqrt{m_e}} \left\{ \int_0^{\infty} f_{ec}(t^2 - e\varphi_{\min}) dt + \sqrt{e(\varphi - \varphi_{\min})} F_e(-e\varphi_{\min}) \right\} \\ \rho_i &= \frac{1}{\sqrt{m_i}} \left\{ \int_0^{\infty} f_{ic}(t^2 + e\varphi_{\min}) dt + \sqrt{e(\varphi_{\max} - \varphi)} F_i(e\varphi_{\max}) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

Так как, кроме того, мала разность  $\varphi - \varphi_k$ , где  $\varphi_k$  — постоянный потенциал предельного монотонного режима, разложим  $\rho_e, \rho_i$  и по степеням  $\varphi_{\min} - \varphi_k$ , предполагая функции распределения аналитически продолженными до значений  $\varepsilon_e = -e\varphi_k$  и  $\varepsilon_i = e\varphi_k$ . С точностью до линейных членов получим

$$\begin{aligned} \rho_e &= \frac{1}{\sqrt{m_e}} \left\{ \int_0^{\infty} f_{ec}(t^2 - e\varphi_k) dt + e(\varphi_k - \varphi_{\min}) \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial f_{e,c}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon_1} dt + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{e(\varphi - \varphi_{\min})} F_e(-e\varphi_k) \right\} \quad (\varepsilon_1 = t^2 - e\varphi_k) \\ \rho_i &= \frac{1}{\sqrt{m_i}} \left\{ \int_0^{\infty} f_{ic}(t^2 + e\varphi_k) dt + e(\varphi_{\min} - \varphi_k) \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial f_{i,c}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon_2} dt + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{e(\varphi_{\max} - \varphi)} F_i(e\varphi_k) \right\} \quad (\varepsilon_2 = t^2 + e\varphi_k) \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что  $F_e$  и  $F_i$  представляют соответственно разность значений функций распределения захваченных и незахваченных частиц на краю потенциальной ямы. Уравнение Пуассона (1) после подстановки в него  $\rho_e$  и  $\rho_i$  из формул (10) принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = a(\varphi_{\min} - \varphi_k) + b(\varphi - \varphi_{\min})^{1/2} + c(\varphi_{\max} - \varphi)^{1/2} \quad (11)$$

Здесь

$$a = 4\pi e^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{m_e}} \int_0^{\infty} \left[ \frac{df_{ec}}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon_1} dt - \frac{1}{\sqrt{m_i}} \int_0^{\infty} \left[ \frac{df_{ic}}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon_2} dt \right\} \quad (12)$$

$$b = \frac{4\pi e^{3/2}}{\sqrt{m_e}} F_e(-e\varphi_k), \quad c = -\frac{4\pi e^{3/2}}{\sqrt{m_i}} F_i(e\varphi_k) \quad (13)$$

Так как первые слагаемые в формулах (10) равны  $\rho_e(\varphi_k)$  и  $\rho_i(\varphi_k)$ , то при подстановке в уравнение Пуассона, согласно первому условию (3), они сократились. Интегрируя уравнение (11) от  $\varphi_{\min}$  до  $\varphi$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi'^2 = a\Delta(\varphi - \varphi_{\min}) + \frac{2}{3} [b(\varphi - \varphi_{\min})^{3/2} - c(\varphi_{\max} - \varphi)^{3/2} + \\ + c(\varphi_{\max} - \varphi_{\min})^{3/2}] \quad (\Delta = \varphi_{\min} - \varphi_k) \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда, полагая  $\varphi = \varphi_{\max}$ , для амплитуды  $A = \varphi_{\max} - \varphi_{\min}$  находим

$$A^{1/2} = A_0^{1/2} \Delta, \quad A_0^{1/2} = -\frac{3}{2} \frac{a}{b+c} (b+c \neq 0, \text{sign } a = -\text{sign}(b+c)) \quad (15)$$

Амплитуда пропорциональна квадрату  $\Delta$ , что подтверждает справедливость предположения о малости амплитуды при малых отклонениях от предельного монотонного режима и справедливость сделанного выше разложения по малым параметрам. Интегрируя (14) от  $\varphi_{\min}$  до  $\varphi_{\max}$ , получим следующее выражение для длины волны  $\lambda$ :

$$\lambda = \lambda_0 \Delta^{1/2}, \quad \lambda_0 = \sqrt{2A_0} \int_0^1 \left\{ ay + \frac{2}{3} A_0^{1/2} [by^{3/2} + c[1 - (1-y)^{3/2}]] \right\}^{-1/2} dy \quad (16)$$

Таким образом, длина волны пропорциональна корню из  $\Delta$ . Для существования периодических решений необходимыми условиями будут

$$\varphi''|_{\varphi=\varphi_{\min}} > 0, \quad \varphi''|_{\varphi=\varphi_{\max}} < 0$$

Кроме того, между минимумом и максимумом должно лежать нечетное число точек перегиба, т. е. уравнение  $\rho(\varphi) = 0$  должно иметь нечетное число корней. Первые два условия приводят к неравенствам

$$a\Delta + cA^{1/2} > 0, \quad a\Delta + bA^{1/2} < 0 \quad \text{или} \quad c > 2b, \quad c > \frac{1}{2}b \quad (17)$$

Здесь использовано значение амплитуды  $A$  из формулы (15). При  $b < 0$ , очевидно, более сильным будет условие  $c > \frac{1}{2}b$ , при  $b > 0$  — условие  $c > 2b$ .

Для исследования корней уравнения  $\rho(\varphi) = 0$  удобно при помощи (15) записать его в виде

$$1 - \frac{3(1-\gamma)u}{2} = \frac{3\gamma(1-u^2)^{1/2}}{2} \quad \left( u = \left( \frac{\varphi - \varphi_{\min}}{A} \right)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{c}{b+c} \right) \quad (18)$$

<sup>1</sup> Все полученные результаты непосредственно переносятся на случай, когда потенциал плазмы положителен. Для этого достаточно считать  $\Delta = \varphi_k - \varphi_{\max}$  и заменить знак коэффициента  $a$  в формуле (12) на обратный. Критерий периодичности, выражаемый формулами  $c > 2b$  и  $c > \frac{1}{2}b$ , остается в силе.

корни  $u_0$  этого уравнения должны удовлетворять требованиям

$$0 < u_0 < 1, \quad \gamma [1 - \frac{3}{2}(1 - \gamma)u_0] > 0$$

Проведенное исследование показало, что при выполнении условий  $c > 2b$  и  $c > \frac{1}{2}b$  всегда имеется только один корень этого уравнения; поэтому упомянутые условия в нулевом приближении по  $L/l$  определяют границы области периодических решений. На фиг. 4 эта область заштрихована ( $b=1$ ). Заметим, что положение границы определяется только соотношением между скачками электронных и ионных функций распределения на краю потенциальных ям и не зависит от  $\Delta$ .

Выясним поведение амплитуды и длины волны вблизи этих границ. Как видно из формулы (15), вблизи границы амплитуда  $A$  по-прежнему остается малой величиной порядка  $\Delta^{1/2}$ . Однако длина волны при приближении к границе области начинает возрастать. Простые оценки показывают, что

$$\lambda_0 \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} - \gamma}} \quad \text{при } c \rightarrow \frac{b}{2} \quad (\gamma \rightarrow \frac{2}{3})$$

$$\lambda_0 \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} - \gamma}} \quad \text{при } c \rightarrow 2b \quad (\gamma \rightarrow \frac{1}{3})$$

Возрастание длины волны может облегчить экспериментальное обнаружение периодики.

Проведенные вычисления были ограничены учетом членов порядка полуполных степеней амплитуды. В случае, если коэффициенты  $b$  и  $c$  равны нулю (например, если функции распределения захваченных частиц непрерывно переходят в функции распределения захваченных частиц), становится необходимым учесть линейные члены, и уравнение Пуассона принимает вид

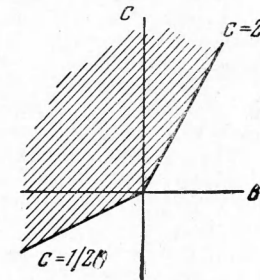
$$\varphi'' = a(\varphi - \varphi_k) \quad (19)$$

где  $a$  определяется формулой (12). Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi - \varphi_m = \Delta (\text{sh} \sqrt{ax} - 1) \quad (20)$$

при  $a < 0$  решение описывает монохроматическую периодику с амплитудой  $A \sim \Delta$  и длиной волны, не зависящей от  $\Delta$ .

Итак периодические решения появляются только при определенных соотношениях между функциями распределения нулевого приближения захваченных и захваченных частиц. Для проверки выполнения этих условий в конкретных задачах необходимо при помощи граничных условий найти функции распределения захваченных частиц и при помощи приближенного кинетического уравнения [3] найти распределение захваченных частиц. Остаются открытыми вопросы об устойчивости этих решений и о влиянии столкновений в стационарном случае.



Фиг. 4

Поступила 5 I 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Auer P. L., Hurwitz H. Space Charge Neutralization by Positive Ions in Diodes, J. Appl. Phys., 1959, 30, vol. 2, p. 161.
2. McIntyre P. O. Proc. Inst. Electric Ing., 1963, vol. 51.
3. Bohm D. In the Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields. Mc Graw Hill Book Company Inc. New York, 1949, Chap. LII.
4. Eichenbaum A. L., Hervevist K. G. Space Charge Instabilities in Synthesized Plasmas J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No. 1, 16.
5. Каганов М. И., Кучеров Р. Я., Рикенглаз Л. Э. К кинетической теории плазменного термоэлемента низкого движения, Ж. техн. физ., 1961, т. 31, № 5, стр. 588.