

3. Plesset M. S., Mitchell T. P. On the stability of the spherical shape of a vapor cavity in a liquid // Quart. Appl. Math.— 1956.— V. 13, N 4.
4. Hermans W. On the instability of a translating gas bubble under the influence of a pressure step // Philips Res. Rept. Suppl.— 1973.— N 3.
5. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.
6. Шифф Л. Квантовая механика.— М.: ИЛ, 1959.

Поступила 18/VIII 1987 г.

УДК 533.6.011

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК ПРИ УСКОРЕННОМ И ВНЕЗАПНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

В. В. Подлубный, А. С. Фонарев
(Москва)

Наряду с проведением расчетов аэродинамических и прочностных характеристик тел в стационарном режиме движения часто возникает задача оценки нестационарных сил, действующих при резких изменениях скоростного режима и, в частности, при резком разгоне тела из состояния покоя до заданной скорости стационарного полета. Представляет интерес определение дополнительных нагрузок (по сравнению со стационарной фазой движения), возникающих при неустановившемся обтекании. Важные характеристики при этом — максимально возможные давление, сила и характерное время нестационарных переходных процессов.

Ниже рассмотрена задача об ускоренном движении некоторых тел — сферы, цилиндра с плоским срезом, конуса — от состояния покоя до заданной дозвуковой или сверхзвуковой скорости при разных ускорениях, включая и внезапное движение тела с заданной скоростью. С применением численного метода получены нестационарные аэродинамические характеристики тел при разных ускорениях. Предложен аналитический метод расчета распределения давления в начальный момент и максимальных сил при внезапном движении.

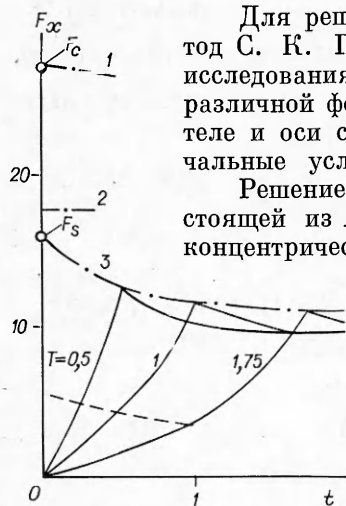
1. Постановка задачи и метод численного решения. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ тело вращения заданной формы начинает движение из состояния покоя и за время T , двигаясь равноускоренно, достигает скорости, соответствующей заданному числу Маха M . Газ считается совершенным, находится в состоянии покоя с постоянным давлением p_0 и плотностью ρ_0 , показателем адиабаты $\gamma = 1,4$.

В системе координат, связанной с телом, течение газа описывается двумерными нестационарными уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u y) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v y) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u y) + \frac{\partial}{\partial z}[(p + \rho u^2) y] + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v y) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v y) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v y) + \frac{\partial}{\partial y}[(p + \rho v^2) y] &= p, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) y \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) y \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) y \right] &= 0 \end{aligned}$$

и уравнением состояния $p = \rho e(\gamma - 1)$. Здесь p — давление; ρ — плотность; u, v — продольная и вертикальная составляющие скорости в декартовой системе координат x, y ; e — удельная энергия единицы массы газа; t — время.

В качестве характерных размерных величин примем: размер тела L , невозмущенные значения давления p_0 и плотности ρ_0 , скорость $u_0 = \sqrt{p_0/\rho_0}$, время $t_0 = L/u_0$, силу $F = p_0 L^2$. Величина L является радиусом сферы, основанием цилиндра или конуса. Все результаты расчета даны в безразмерном виде.



Р и с. 1

Для решения задачи применим конечно-разностный метод С. К. Годунова [1] и модифицированную программу исследования двумерного нестационарного обтекания тел различной формы [2, 3]. В качестве краевых условий на теле и оси симметрии зададим условия непротекания. Начальные условия отвечают состоянию покоя.

Решение задачи проводится на расчетной сетке, состоящей из N лучей, исходящих из начала координат, и K concentric, повторяющих форму тела, линий ($N \times K = 135 \times 51$). Например, для сферы это concentric окружности, приближенно замененные на ломаные линии. Разбиение по углу равномерное, по радиусу неравномерное с увеличением шага по геометрической прогрессии к внешней границе сетки, располагающейся на расстоянии $\sim 10-12$ характерных размеров тела.

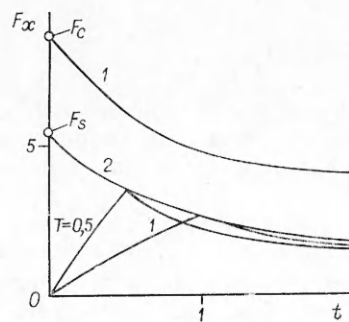
2. Результаты численного расчета. Проведена серия расчетов задачи о разгоне двух тел — сферы и полубесконечного цилиндра, обращенного к потоку торцом, — с

различными ускорениями, соответствующими времени разгона $T = 0,1-1,8$. На рис. 1 приведены зависимости от времени (сплошные кривые) нестационарной суммарной силы для сферы единичного радиуса при разных значениях T и $M = 2$. С увеличением ускорения максимум возрастает, стремясь к предельному F_s (при $T = 0$), отвечающему мгновенному движению с $M = 2$.

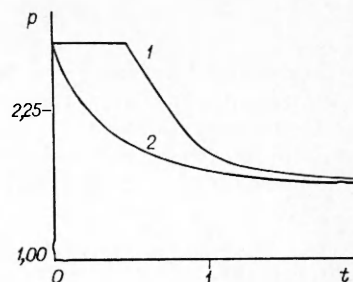
Отметим, что даже при относительно медленных ускорениях ($T = 1-2$; $T \approx 1$ — время распространения возмущений на $\sim 1,2$ радиуса тела) наблюдается заметный «заброс» силы по сравнению со стационарным значением (приблизительно на 20%), при внезапном движении он составляет 80%. Штриховая линия на рис. 1 — момент времени, когда мгновенная скорость тела достигает $M = 1$ (нарастание силы до этого момента носит близкий к линейному характер), линии 1, 3 — максимальные силы на цилиндре и при различных ускорениях сферы; заброс максимальной силы F_c при внезапном движении относительно стационарного значения (линия 2) составляет $\sim 50\%$.

Зависимость нестационарной силы от времени при мгновенном разгоне для этих же тел получена и для $M = 0,8$ (рис. 2, где кривая 1 — торец цилиндра, 2 — сфера).

На рис. 3 ($M = 0,8$) показана зависимость давления от времени в лобовой точке рассматриваемых тел. Для торца полубесконечного цилиндра (кривая 1) давление сначала постоянно, а после прихода возмущений от края спадает до значения, равного давлению торможения в критической точке при стационарном движении тела. Характерное время переходного процесса и действия нестационарной силы для торца



Р и с. 2



Р и с. 3

цилиндра имеет тот же порядок, что и для сферы (линия 2, $\Delta t \approx 1$). Максимальное давление для цилиндра в 1,8 раза больше установившегося, а для сферы — в 1,65 раза. Из проведенного анализа следует, что максимальные нагрузки отвечают мгновенному разгону и возникают в начальный момент времени. Для их нахождения может быть применена более простая, чем численный расчет всей задачи, методика, излагаемая ниже.

3. Метод расчета максимальных нагрузок. Исследуем случай, когда тело заданной формы внезапно переходит из состояния покоя в равномерное движение с заданным числом Маха. Поставим задачу: найти распределение давления на поверхности тела и мгновенную силу в начальный момент времени, которые определяют максимальные нагрузки.

Рассмотрим связанную с телом систему координат x, y, z , плоскость $z = 0$ проведем так, чтобы составляющая внешней нормали по z при $z > 0$ была направлена вверх, а при $z < 0$ — вниз (предполагается, что такая плоскость у рассматриваемых тел есть, хотя это ограничение не существенно, метод распространяется на тела произвольной формы).

Зададим уравнение поверхности тела в виде двух поверхностей, расположенных в верхнем и нижнем полупространстве:

$$(3.1) \quad z \geq 0, \quad z = z_+(x, y); \quad z < 0, \quad z = z_-(x, y).$$

Составляющие вектора внешней нормали \mathbf{n} можно записать в виде

$$(3.2) \quad z \geq 0, \quad n_x = \frac{-\frac{\partial z_+}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_+}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_+}{\partial y}\right)^2}}, \quad n_y = \frac{-\frac{\partial z_+}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_+}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_+}{\partial y}\right)^2}},$$

$$n_z = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_+}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_+}{\partial y}\right)^2}};$$

$$z < 0, \quad n_x = \frac{\frac{\partial z_-}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_-}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_-}{\partial y}\right)^2}},$$

$$n_y = \frac{\frac{\partial z_-}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_-}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_-}{\partial y}\right)^2}}, \quad n_z = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_-}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_-}{\partial y}\right)^2}}.$$

Вектор скорости набегающего потока, образующий угол α с осью x : $\mathbf{V} = \mathbf{i}V_\infty \cos \alpha + \mathbf{k}V_\infty \sin \alpha$. Найдём проекцию скорости на нормаль к телу: $V_n = (\mathbf{V}, \mathbf{n}) = V_\infty n_x \cos \alpha + V_\infty n_z \sin \alpha$. При $V_n > 0$ возникает разрежение на поверхности (обозначим её σ_-), при $V_n < 0$ — сжатие (поверхность σ^+). Условие $V_n = 0$ даёт границу раздела действия сил давления. В соответствии с одномерной теорией распада произвольного разрыва [1, 4], решая задачу о внезапном движении поршня в направлении по нормали к телу и переходя в систему координат, связанную с телом, получим формулы для давления в каждой точке поверхности: при сжатии

$$(3.3) \quad p_+ = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} M_n^2 + \gamma M_n \sqrt{1 + M_n^2 \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2};$$

при разрежении

$$(3.4) \quad p_- = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \tilde{M}_n\right)^{2\gamma/(\gamma-1)}$$

($M_n = |V_n|/a_\infty$, a_∞ — скорость звука в набегающем потоке).

Для произвольного тела при нахождении суммарной силы в направлении оси x необходимо вычислить интегралы по поверхности, заменяя ее малыми плоскими элементами и переходя к пределу:

$$(3.5) \quad F_x = \iint_{\sigma_+} p_+(M_n) \sin(\mathbf{n}, x) d\sigma_+ - \iint_{\sigma_-} p_-(M_n) \sin(\mathbf{n}, x) d\sigma_-.$$

Для сферы единичного радиуса (3.5) имеет вид

$$(3.6) \quad F_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} p_+(M_n) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi - \\ - 2\pi \int_0^{\pi/2} p_-(M_n) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \quad \left(\varphi = (\mathbf{n}, x) - \frac{\pi}{2} \right).$$

Вычисление первого интеграла в (3.6) приводит к выражению

$$(3.7) \quad F_x^+ = 2\pi \left\{ \frac{4}{2} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{16} M^2 + \right. \\ + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} M^2 \left[\frac{1}{4} \sqrt{\left(1 + \frac{16}{(\gamma+1)^2 M^2}\right)^3} - \frac{2}{(\gamma+1)^2 M^2} \sqrt{1 + \frac{16}{(\gamma+1)^2 M^2}} - \right. \\ \left. \left. - \frac{32}{(\gamma+1)^4 M^4} \ln \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16}{(\gamma+1)^2 M^2}}\right) + \frac{32}{(\gamma+1)^4 M^4} \ln \frac{4}{(\gamma+1) M} \right] \right\}.$$

Для второго интеграла в (3.6) имеем

$$(3.8) \quad F_x^- = \frac{8\pi}{(\gamma-1) M^2} \left\{ \frac{1 - \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M\right)^{2\gamma/(\gamma-1)+1}}{3\gamma-1} - \frac{1 - \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M\right)^{2\gamma/(\gamma-1)+2}}{4\gamma-2} \right\}.$$

Результаты расчета сил по (3.7) и (3.8) для различных M ($\gamma = 1,4$) приведены на рис. 4, где линии 1 и 2 — значения F_x^+ и F_x^- , штрихпунктирная — сила $F_x^+ - F_x^-$, штриховая — расчет F_x^+ по приближенной формуле

$$(3.9) \quad F_x^+ = \pi \left(1 + \frac{2}{3} \gamma M + \frac{\gamma(\gamma+1)}{8} M^2 \right),$$

полученной путем разложения соотношения (3.7) при малых M . Как видно из графика, формула (3.9) достаточно точно дает значение силы в диапазоне $M = 0 - 1,5$. При $\gamma = 1,4$ и $M = 2$ $F_x^+ = 16,38$, $F_x^- = 0,5069$, их разность представлена на рис. 4 кружочком F_s .

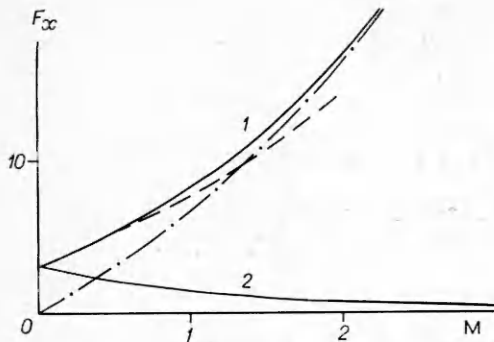
Для тела — цилиндра заданной длины с плоскими торцами под нулевым углом атаки — использование (3.5) дает

$$F_x = \pi \left[1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} M_n^2 + \gamma M_n \sqrt{1 + M_n^2 \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2} \right] - \pi \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_n \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

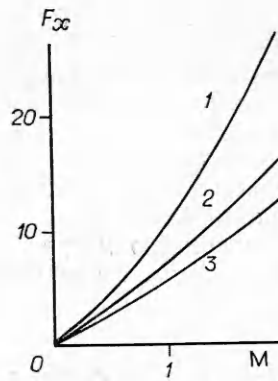
Величина M_n совпадает с M . Для $M = 0,8$ сила, действующая на передний торец, равна 8,72, на заднем торце 0,927. На рис. 2 кружочком F_c нанесено расчетное значение силы на лобовой поверхности.

С использованием соотношений (3.1)—(3.5) и геометрических характеристик тела можно получить формулы для давления и суммарной силы на телах другой формы, включая случаи ненулевого угла атаки.

Рассмотрим в качестве тела круглый конус конечной длины x_0 с радиусом основания l , ось x направим по оси конуса. Тогда его поверхность описывается уравнениями $z \geq 0$, $z_+ = \sqrt{x^2 - y^2}$; $z < 0$, $z_- =$



Р и с. 4



Р и с. 5

$= -\sqrt{x^2 - y^2}$ ($\bar{x} = x/x_0$). Вычисляя производные, определим единичный вектор внешней нормали

$$z > 0, \quad \mathbf{n}_+ = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}}, \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} \frac{y}{x}, \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right\};$$

$$z < 0, \quad \mathbf{n}_- = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{1+x_0^2}}, \frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} \frac{y}{x}, -\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right\}.$$

Заменяя $x_0 = \cos \varphi / \sin \varphi$, окончательно имеем

$$z > 0, \quad \mathbf{n}_+ = \left\{ -\sin \varphi, \frac{y}{x} \cos \varphi, \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cos \varphi \right\};$$

$$z < 0, \quad \mathbf{n}_- = \left\{ -\sin \varphi, \frac{y}{x} \cos \varphi, -\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cos \varphi \right\}.$$

Проекция вектора скорости \mathbf{V} на нормаль \mathbf{n} для $z > 0$ и $z < 0$ примет вид (знак $+$ в первом случае)

$$(3.10) \quad (\mathbf{V}, \mathbf{n}) = V_{\infty} \left[-\cos \alpha \sin \varphi \pm \sin \alpha \cos \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right].$$

Рассмотрим область углов атаки $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. При этом условии на нижней поверхности всегда сжатие. На верхней поверхности граница раздела (сжатие — разрежение) определяется уравнением $\bar{y}/\bar{x} = \pm \sqrt{1 - (\operatorname{tg} \varphi / \operatorname{tg} \alpha)^2}$. Вычислим давление в произвольной точке на конусе в начальный момент движения, используя (3.3), (3.4), (3.10). В области сжатия (знак $-$ отвечает $z < 0$, знак $+$ $z > 0$)

$$(3.11) \quad p_+ = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} M^2 \left[-\cos \alpha \sin \varphi \pm \sin \alpha \cos \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right]^2 +$$

$$+ \gamma M \left| -\cos \alpha \sin \varphi \pm \sin \alpha \cos \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right| \times$$

$$\times \sqrt{1 + M^2 \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 \left[-\cos \alpha \sin \varphi \pm \sin \alpha \cos \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right]^2}.$$

Область разрежения на конусе образуется при $\varphi < \alpha$ и находится из условия $z > 0$, $|\bar{y}/\bar{x}| \leq \sqrt{1 - (\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \varphi)^2}$. В ней давление

$$(3.12) \quad p_- = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M \left| -\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right| \right]^{2\gamma/(\gamma-1)}.$$

Разрежение в донной части конуса вычисляется, как для торца цилиндра. Согласно (3.11) и (3.12), максимальное сжатие и разрежение на боковой поверхности конуса возникают при $y = 0$ соответственно на нижней и верхней поверхности конуса.

На рис. 5 приведены вычисленные максимальные силы, действующие на тела конечных размеров (торец цилиндра, сферу и конус с углом полураствора 30° — линии $I-3$), в зависимости от M внезапного движения при $\alpha = 0$.

Аналогично могут быть определены мгновенные нагрузки на телах другой формы, в том числе и трехмерной конфигурации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976.
2. Фонарев А. С. Расчет дифракции ударной волны на профиле с последующим установлением стационарного сверхзвукового и трансзвукового обтекания // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1971. — № 4.
3. Подлубный В. В., Фонарев А. С. Отражение сферической волны от плоской поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1974. — № 6.
4. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. — М.: Наука, 1981.

Поступила 3/IX 1987 г.,
в окончательном варианте — 22/I 1988 г.

УДК 535.5 : 621.22

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС И АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ ВИБРИРУЮЩИХ КРУГОВЫХ РЕШЕТОК ТОНКИХ ПРОФИЛЕЙ

В. Л. Окулов

(Новосибирск)

При исследовании некоторых вопросов аэроупругости возникает необходимость в определении присоединенных масс и коэффициентов аэродинамического демпфирования для тел, совершающих малые колебания. В решетчатых областях, моделирующих лопасти рабочих колес и направляющих аппаратов турбомашин, данная задача рассматривалась только для колебаний решеток в несжимаемой жидкости. В [1] получены присоединенные массы прямой решетки пластин, а в [2] — кольцевой решетки лопастей, которыми моделируют ступени осевых машин. В этих работах, в частности, исследовано влияние на коэффициенты присоединенных масс взаимодействия между лопатками, которые совершали малые гармонические колебания с постоянным сдвигом фаз.

В сжимаемой жидкости подобные задачи рассматривались только для отдельных тел. Однако при изучении колебаний решеток в газе, помимо вопроса о взаимодействии лопаток, особый интерес представляет исследование окolorезонансных режимов, которые возникают при совпадении вещественной части собственной частоты колебаний газа около решетки с частотой колебаний лопаток.

В данной работе определяются присоединенные массы и коэффициенты демпфирования для неподвижной круговой решетки тонких профилей, совершающих малые гармонические колебания с постоянным сдвигом фазы в идеальной сжимаемой жидкости. Такими решетками обычно моделируются лопаточные диффузоры и направляющие аппараты центробежных турбомашин. Проведенные расчеты показали, что на окolorезонансных режимах наблюдаются явления двух видов: резонанс с резким возрастанием амплитуды комплексных коэффициентов сил, действующих на профили в решетке, и резонанс поглощения, при котором амплитуда этих коэффициентов уменьшается, а фаза меняет знак.

1. Рассмотрим задачу о распространении в идеальном газе малых возмущений, излучаемых неподвижной круговой решеткой, профили которой совершают малые колебания по одинаковому гармоническому закону с постоянным сдвигом фазы $\mu = 2\pi m/N$ ($m = 0, 1, \dots, N - 1$, N — число профилей в решетке). Профили будем считать бесконечно тонкими слабоизогнутыми дугами. Обозначим через R_1 и R_2 внутренний и внешний радиусы решетки (рис. 1). Введем безразмерные полярные координаты $\rho/R_1, \theta$, поместив начало системы отсчета в центр решетки.