

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ПЛАСТИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

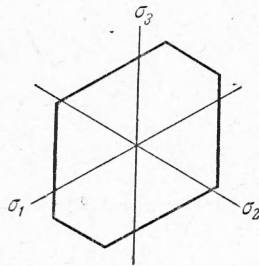
М. С. Саркисян (Ереван)

В работе [1], исходя из соображения, что пределы текучести анизотропных тел при растяжении — сжатии в разных направлениях разные, Д. Д. Ивлев предложил кусочно-линейное условие текучести, обобщающее в некотором смысле условие Треска. В настоящей заметке условие Треска обобщается для анизотропных тел в несколько ином смысле, а именно с учетом того, что предельные значения касательных напряжений, действующие на разных плоскостях тела, разные.

На основании условия текучести более общего вида, относящегося как к плоскому деформированному, так и к плоскому напряженному состоянию, рассматриваются некоторые общие вопросы идеально жестко-пластических тел.

1. Предполагается, что рассматриваемые тела однородные и обладают пластической анизотропией. Тогда пределы текучести этих тел при сдвиге по разным плоскостям будут разные. Очевидно, что параметры, которые определяют отрезки кусочно-линейных условий текучести на девиаторной плоскости при некотором фиксированном положении главных осей напряжений, в общем не являются постоянными. Они зависят от ориентации главных осей напряжений относительно некоторой неподвижной системы координат x, y, z .

Если принять, что пластическое состояние анизотропных тел определяется максимальными касательными напряжениями, то для пластически ортотропных тел условие текучести можно представить в следующем виде (фиг. 1):



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= \pm 2k_1(l_i, m_i, n_i), & \sigma_2 - \sigma_3 &= \pm 2k_2(l_i, m_i, n_i) \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \pm 2k_3(l_i, m_i, n_i) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь l_i, m_i, n_i ($i = 1, 2, 3$) — направляющие косинусы главных напряжений относительно осей x, y, z . Функции $k_j(l_i, m_i, n_i)$, ($j = 1, 2, 3$) в зависимости от ориентации площадок, по которым действует максимальное касательное напряжение, определяют предельные значения этого напряжения. При этих предельных значениях рассматриваемая точка находится в пластическом состоянии. Вид функций $k_j(l_i, m_i, n_i)$ для каждого материала должен быть определен экспериментально. В частном случае, когда направления главных напряжений во всем теле одни и те же, $k_j(l_i, m_i, n_i)$ будут постоянными величинами.

При рассмотрении плоской задачи, когда $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_z = \sigma_3$, $k_j(l_i, m_i, n_i)$ будут зависеть только от угла, отсчитываемого от некоторого фиксированного направления на плоскости x, y . В случае плоской деформации условие текучести (1.1) в предположении, что $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$, можно представить в виде

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k_1(\varphi) \quad (1.2)$$

где φ — угол между направлением наибольшего главного напряжения и осью x .

В случае плоского напряженного состояния условие текучести (1.1) при $\sigma_3 = 0$, $\sigma_1 \geq \sigma_2$ представляется в виде следующих равенств:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 = 2k_1(\varphi) & \text{ при } \sigma_1\sigma_2 \leq 0, & \sigma_2 &= -2k_2(\varphi) & \text{ при } \sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0 \\ \sigma_1 &= 2k_3(\varphi) & \text{ при } \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Выражая главные напряжения через компоненты напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ получим

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k_1^2(\varphi) \quad \text{при } \sigma_x\sigma_y \leq \tau_{xy}^2 \quad (1.4)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = [4k_2(\varphi) + (\sigma_x + \sigma_y)]^2 \quad \text{при } \sigma_x < 0, \sigma_y < 0 \quad (1.5)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = [4k_3(\varphi) - (\sigma_x + \sigma_y)]^2 \quad \text{при } \sigma_x > 0, \sigma_y > 0 \quad (1.6)$$

В случае, когда $\sigma_1\sigma_2 \leq 0$, уравнения для плоского напряженного состояния совпадают с уравнениями для плоской деформации и, следовательно, для него справедливы некоторые результаты работы [2].

2. Рассмотрим уравнения плоской задачи при условии текучести более общего вида, чем (1.4) — (1.6)

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4f^2(\sigma, \varphi) \quad \left(\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \varphi = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (2.1)$$

Отметим, что форма записи условия текучести (2.1) содержит также условие текучести [1] для случая плоской задачи.

Условие (2.1) удовлетворяется подстановкой

$$\sigma = \sigma + f(\sigma, \varphi) \cos 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma - f(\sigma, \varphi) \cos 2\varphi, \quad \tau_{xy} = f(\sigma, \varphi) \sin 2\varphi \quad (2.2)$$

Вводя (2.2) в уравнения равновесия и принимая во внимание (2.1), получим

$$(1 + f'_\sigma \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + f'_\sigma \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial y} - (2f \sin 2\varphi - f'_\varphi \cos 2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\ + (2f \cos 2\varphi + f'_\varphi \sin 2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

$$f'_\sigma \sin 2\varphi \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (1 - f'_\sigma \cos 2\varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + (2f \cos 2\varphi + f'_\varphi \sin 2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \\ + 2f (\sin 2\varphi - f'_\varphi \cos 2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

Здесь f'_σ и f'_φ — частные производные $f(\sigma, \varphi)$ по σ и φ . Система (2.3) — (2.4) нелинейная, дифференциальные уравнения ее характеристик имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2f \sin 2\varphi - f'_\varphi \cos 2\varphi \pm \sqrt{f_\varphi'^2 + 4f^2(1 - f_\sigma'^2)}}{2f \cos 2\varphi + f'_\varphi \sin 2\varphi + 2ff'_\sigma} \quad (2.5)$$

Вдоль характеристик имеют место соотношения

$$(1 - f_\sigma'^2) \frac{d\sigma}{d\varphi} = f'_\sigma f'_\varphi \pm \sqrt{f_\varphi'^2 + 4f^2(1 - f_\sigma'^2)} \quad (2.6)$$

Нетрудно убедиться, что после преобразования

$$\operatorname{tg} 2(\varphi - \psi) = \frac{f'_\varphi}{2f}, \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sqrt{f_\varphi'^2 + 4f^2(1 - f_\sigma'^2)}}{2ff'_\sigma} \quad (2.7)$$

уравнения (2.5) принимают вид

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\psi \pm \theta) \quad (2.8)$$

Смысл углов ψ и θ выясняется при рассмотрении уравнения скоростей.

3. Представим условие текучести (2.1) в виде

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 - 4f^2(\sigma, \varphi) = 0 \quad (3.1)$$

Принимая левую часть в качестве пластического потенциала, получим следующую систему уравнений для скоростей плоской задачи:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} : \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} : \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

Известно [3], что когда условие текучести и пластический потенциал тождественны, то характеристики уравнения напряжений и скоростей совпадают и можно их определить из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} dx^2 + \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} dx dy + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} dy^2 = 0 \quad (3.4)$$

В дальнейшем рассматриваем только случаи гиперболичности и параболичности системы уравнений, когда

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right)^2 - 4 \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \geq 0 \quad (3.5)$$

Нетрудно убедиться, что условие (3.5) выполняется всегда, когда принимается условие текучести наибольшего касательного напряжения (1.4) — (1.6).

Дифференциальные уравнения характеристик напишем в виде

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi_\alpha, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi_\beta \quad (3.6)$$

Здесь φ_α и φ_β — углы наклонов линий характеристик α и β к оси x .

Из уравнения (3.4) следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi_\alpha \operatorname{tg} \varphi_\beta = \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} : \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \quad \operatorname{tg} \varphi_\alpha + \operatorname{tg} \varphi_\beta = - \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} : \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (3.2), получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\sin \varphi_\alpha \sin \varphi_\beta}{\sin(\varphi_\alpha + \varphi_\beta)} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\cos \varphi_\alpha \cos \varphi_\beta}{\sin(\varphi_\alpha + \varphi_\beta)} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.8)$$

Введем обозначения

$$2\psi = \varphi_\alpha + \varphi_\beta, \quad 2\theta = \varphi_\beta - \varphi_\alpha \quad (3.9)$$

Тогда для скоростей система (3.8) примет вид

$$2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \left(\operatorname{ctg} 2\psi - \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\psi} \right) \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0, \quad 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} + \left(\operatorname{ctg} 2\psi + \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\psi} \right) \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\psi} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (3.11)$$

Из (3.9) — (3.10) следует, что ψ — угол между направлением наибольшей главной скорости деформации и осью x , а 2θ — угол между характеристиками α и β в данной точке. Эти углы можно определить при помощи формул

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}}, \quad \operatorname{tg} 2\theta = - \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right)^2 - 4 \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}} \quad (3.12)$$

Дифференциальные соотношения вдоль характеристик системы (3.8) имеют вид

$$dv_x + \operatorname{tg} \varphi_\alpha dv_y = 0, \quad dv_z + \operatorname{tg} \varphi_\beta dv_y = 0 \quad (3.13)$$

Отсюда следует, что характеристики совпадают в каждой точке с направлением нулевой скорости удлинения. Переходя к компонентам скоростей u и v , отнесенным к линиям характеристик α и β , при помощи формул преобразования

$$u = v_x \cos \varphi_\alpha + v_y \sin \varphi_\alpha, \quad v = v_x \cos \varphi_\beta + v_y \sin \varphi_\beta \quad (3.14)$$

приходим к соотношениям вдоль характеристик, полученным в работах [3,4] для изотропных тел

$$\sin 2\theta du + (u \cos 2\theta - v) d(\psi - \theta) = 0 \quad \text{вдоль } \alpha$$

$$\sin 2\theta dv - (v \cos 2\theta - u) d(\psi + \theta) = 0 \quad \text{вдоль } \beta \quad (3.15)$$

Можно рассмотреть и линии разрывов типа шейки, исследованные Хиллом. Нетрудно показать, что вектор разрыва скорости, как и в случае изотропного тела [5], наклонен к шейке под углом

$$\psi_1 = 2\theta - \pi/2 \quad (3.16)$$

Подставляя (3.16) в (3.12), получим формулу, определяющую угол разрыва ψ_1 через производные функции текучести

$$\operatorname{tg} 2\psi_1 = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \right] \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right)^2 - 4 \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

Из (3.11) следует, что, когда $v_z = 0$, характеристики всегда ортогональны и совпадают с линиями скольжения, т. е. линиями наибольших скоростей сдвигов, а линии разрывов типа шейки не образуются; в этом случае из (3.17) вытекает, что $\psi_1 = 0$.

Полученные результаты показывают, что некоторые зависимости для скоростей в случае плоской задачи пластически анизотропных и изотропных тел формально совпадают. Однако необходимо иметь в виду, что угол ψ , характеризующий направления наибольших скоростей сдвигов, вследствие анизотропии в общем случае не совпадает с углом φ , характеризующим направление наибольших касательных напряжений.

Поступила 26 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. И в л е в Д. Д. К теории идеальной пластической анизотропии. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
2. С а р к и с я н М. С. К теории плоской деформации пластически анизотропных тел. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
3. Х и л л Р. Математическая теория пластичности. Гостехиздат, 1956.
4. Г е й р и н г е р Г. Некоторые новые результаты в теории идеально пластического тела. «Проблемы механики», ИИЛ, 1956.
5. К а ч а н о в Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.