

ОБ ОДНОМЕРНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Б. Н. Баранов, И. П. Павлоцкий

(Москва)

Изучаются свойства одномерных статистических систем. Проводится последовательное сравнение значений бинарной коррелятивной функции, полученной из конфигурационного интеграла и из уравнений цепочек Боголюбова в различных приближениях. Кратко обсуждаются полученные результаты.

Существующие методы изучения поведения реальных статистических систем основываются обычно на теории возмущений, предполагающей наличие малых параметров, характеризующих близость системы к идеальной. Системы с интенсивным взаимодействием не позволяют выделить малые параметры, и поэтому в настоящее время не существует эффективных методов их изучения. В связи с этим представляет интерес обращение к одномерным системам, позволяющим продвинуть исследование значительно дальше и, в частности, рассмотреть случай интенсивного взаимодействия. Сравнение точных результатов с приближенными, полученными методами расщепления цепочек рекуррентных уравнений для корреляционных функций [1], может рассматриваться как качественный критерий верности последних.

Впервые конфигурационные интегралы для одномерных статистических систем были получены в работе [2]. В последнее время появились работы, где одномерные модели изучаются методами теории стохастических процессов [3-6].

1. Рассматривается одномерная равновесная изотермическая система, состоящая из  $N$  частиц, расположенных на отрезке оси  $Ox$  длины  $L$ . Статистические свойства системы могут быть изучены методом Гиббса. Пусть  $(p, q)$  — совокупность  $N$  импульсов и  $N$  координат частиц системы. Как известно, функция, распределения такой системы имеет вид [7]

$$f = Z^{-1} \exp(-H(p, q) / kT)$$

Здесь  $H$  — функция Гамильтона системы,  $k$  — постоянная Больцмана и  $T$  — температура. Константа  $Z$  называется статистическим интегралом системы. Из условия нормировки функции распределения

$$Z = \int \exp\left(-\frac{H(p, q)}{kT}\right) dp dq$$

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае

$$Z = \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{N/2} \frac{Q_N}{N!} = \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{N/2} \frac{1}{N!} \int_0^L \dots \int_0^L \exp\left(-\frac{U_N}{kT}\right) dx_1 \dots dx_N \quad (1.1)$$

Здесь  $m$  — масса частицы,  $\hbar$  — постоянная Планка и  $U_N$  — часть функции  $H$ , зависящая только от координат. Таким образом, получим полную информацию о системе, если сумеем вычислить  $Q_N$  (конфигурационный интеграл).

Если частицы непроницаемы, то

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq L \quad (1.2)$$

В приближении, когда взаимодействуют только ближайшие соседи,

$$U_N = \sum_{(1 \leq i \leq N-1)} \Phi(|x_{i+1} - x_i|) + U_L$$

Здесь  $\Phi$  — потенциал взаимодействия между частицами, а  $U_L$  — энергия взаимодействия со стенкой. Если стенка реализована в виде частиц той же природы, то

$$U_L = \Phi(x_1) + \Phi(L - x_N)$$

Следуя методу работы [2], при помощи преобразования Лапласа, теоремы о свертке и метода наискорейшего спуска получаем выражение для конфигурационного интеграла

$$Q_N = e^{p\beta L} \{\varphi(p\beta)\}^{N+1}, \quad \varphi = \int_0^\infty e^{-\beta[px + \Phi(x)]} dx \quad (1.3)$$

Здесь  $p$  — давление.

Возьмем модель системы, где частицы суть шарики радиуса  $a$ , взаимодействующие между собой по закону, определяемому выбором потенциала

$$\Phi(|x_i - x_j|) = \Phi_{el}(|x_i - x_j|) + K(|x_i - x_j|)$$

Здесь  $\Phi_{el}$  — потенциал электрических сил, который возьмем в виде  $\Phi_{el}(x) = \infty$  ( $x < a$ ),  $\Phi_{el} = \Phi_{el}(a)(a/x) \exp[\gamma(a-x)]$  ( $x \geq a$ )

Потенциал  $K(x)$  возьмем в форме модифицированного потенциала Ленарда — Джонса

$$K(x) = \infty \quad (x < a), \quad K(x) = \delta\omega(\omega_2/\omega_1)^\omega [(a/x)^{\omega_1} - (a/x)^{\omega_2}] \quad (x \geq a)$$

Здесь  $\delta$  — глубина потенциальной ямы и  $\omega = \omega_1/(\omega_2 - \omega_1)$ . Первое слагаемое характеризует отталкивание на близких расстояниях, второе — притяжение на более далеких. Обычно берется  $\omega_1 = 12$  и  $\omega_2 = 6$  [8].

В дальнейшем все величины будем выражать в единицах  $a$  ( $a = 1$ ) и введем для удобства обозначения

$$\mu = \beta\Phi_{el}(1), \quad \chi = \beta\delta, \quad \eta = \chi\omega(\omega_2/\omega_1)^{\omega(\omega_2/\omega_1)}$$

Согласно (1.3),

$$\begin{aligned} \varphi(p\beta) &= \int_1^\infty \exp\{-[\beta px + (\mu/x)e^{-\gamma(x-1)} + \eta(x^{-\omega_1} - x^{-\omega_2})]\} dx = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^{k+n}}{k!n!m!} \mu^k \eta^{m+n} e^{\gamma k} E_{k+\omega_1 n+\omega_2 m}(p\beta + \gamma k) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $E_\nu$  — интегрально-показательная функция  $\nu$ -го порядка. В чисто электростатическом случае ( $K = 0$ )

$$\varphi(p\beta) = (p\beta)^{-1} \exp(-p\beta) + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} e^{\gamma n} \mu^n E_n(p\beta + n\gamma) \quad (1.5)$$

Заметим, что член перед суммой в (1.5) есть результат, получающийся для твердых сфер [9].

Для «реального» газа ( $\Phi_{el} = 0$ )

$$\varphi(p\beta) = (p\beta)^{-1} \exp(-p\beta) + \sum_{m,n=0}^\infty \frac{(-1)^{m+n}}{m!n!} E_{\omega_1 n + \omega_2 m}(p\beta) \quad (1.6)$$

Штрих означает, что в сумме отсутствует член, когда одновременно  $m = 0$  и  $n = 0$ .

2. Рассмотрим вычисление бинарной коррелятивной функции  $g(x)$ , исходя из выражения (1.3) для конфигурационного интеграла. Пусть

$$dW(\xi, m) = \psi_m(\xi) d\xi \quad \left( \int_0^\infty \psi_m(\xi) d\xi = 1 \right) \quad (2.1)$$

— вероятность обнаружить две определенные частицы системы, разделенные  $(m - 1)$  другими. Очевидно,  $\xi = |x_k - x_{k+m}|$ , где  $k$  — номер фиксированной частицы. При  $m = 1$  находим распределение ближайших соседей, при  $m = 2$  — вторых соседей, и т. д. Конфигурационные интегралы подсистем снабдим индексами, указывающими из скольких частиц состоит подсистема. Полагая  $\xi = L - x_{N-m}$ , нетрудно получить

$$\psi_m(\xi) = \frac{Q_{m-1}(\xi) Q(L - \xi)}{Q_N(L)} \quad (2.2)$$

Переход к асимптотике ( $N \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty, L/N \rightarrow l, l$  — константа) дает

$$\psi_m(\xi) = \{\varphi(p\beta)\}^{-m} Q_{m-1}(\xi) \exp(-p\beta\xi) \quad (2.3)$$

$$\psi_1(\xi) = \frac{e^{-\beta(p\xi + \Phi(\xi))}}{\varphi(p\beta)} \quad \text{при } m = 1 \quad (2.4)$$

$$\psi_m(\xi) = \frac{e^{-p\beta\xi}}{\{\varphi(p\beta)\}^m} \frac{1}{2\pi i} \oint \{\varphi(s)\}^m e^{s\xi} ds \quad \text{при } m > 1$$

Путь интегрирования охватывает все полосы подынтегральной функции. При фиксированном положении одной частицы вероятность обнаружить какую-нибудь другую частицу на расстоянии от  $x$  до  $x + dx$  от первой равна

$$dW(x) = L^{-1} g(x) dx \quad (2.5)$$

Здесь  $g(x)$  — одномерный аналог радиальной функции распределения. Из (2.1) и (2.5) следует, что

$$g(x) = l \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(x) = \frac{l e^{-p\beta x}}{2\pi i} \sum_m \{\varphi(p\beta)\}^{-m} \oint e^{sx} [\varphi(s)]^m ds \quad (2.6)$$

Обозначим через  $R(s)$  суммы в (1.4) — (1.6). Как видно из (2.6), для вычисления  $g(x)$  следует сначала найти вычеты во всех полюсах функции

$$e^{sx} \left\{ \frac{e^{-sx}}{s} + R(s) \right\}^m \quad \text{для } m = 1, 2, \dots$$

а затем взять сумму по  $m$ . Используя теорему о вычетах и учитывая лишь особенности, дающие основной вклад в (2.6), окончательно получаем

$$g(x) = 0 \quad (x < 1) \quad (2.7)$$

$$g(x) = \frac{e^{-p\beta x}}{l} \sum_m \frac{1}{[\varphi(p\beta)]^m} \sum_{\lambda=1}^m \frac{C_\lambda^m}{(\lambda-1)!} \sum_{k=0}^{\lambda-1} C_k^{\lambda-1} (x-\lambda)^k [R^{m-\lambda}(0)]^{\lambda-k-1} \quad (x \geq 1)$$

Здесь  $C$  — биномиальные коэффициенты, а  $\{\lambda - k - 1\}$  означает  $(\lambda - k - 1)$ -кратное дифференцирование. Суммирование по  $m$  для фиксированных  $x$  распространяется на значения  $m$ , удовлетворяющие неравенству  $x > m$ . При  $m = \lambda = k + 1$  (твердые невзаимодействующие сферы) получается результат работы [9].

3. Займемся вычислением бинарной коррелятивной функции  $g(x)$ , исходя из уравнений цепочки [1,10], используя приближения работы [11]. Гипотеза Кирквуда позволяет выразить триплетную функцию распределения через суперпозицию бинарных, т. е.  $F_3(123) = g(12)g(23)g(31)$ .

Введем коэффициенты корреляции  $\varepsilon_{ij} = g_{ij} - 1$  и будем для удобства записи иногда обозначать  $\theta = kT = 1/\beta$ .

Тогда для  $\varepsilon_{12}$  можно получить уравнения

$$\begin{aligned} \theta \frac{\partial}{\partial x_1} \ln(1 + \varepsilon_{12}) &= F_{12} + \frac{1}{l} \int (1 + \varepsilon_{13}) \varepsilon_{23} F_{13} dx_3 \\ \theta \frac{\partial}{\partial x_2} \ln(1 + \varepsilon_{12}) &= F_{12} + \frac{1}{l} \int (1 + \varepsilon_{23}) \varepsilon_{13} F_{23} dx_3 \end{aligned} \quad \left( F(x) = - \frac{\partial \Phi(|x|)}{\partial x} \right)$$

Порядок частиц фиксирован, поэтому  $x_{13} = x_{12} + x_{23}$ . Обозначим  $x_{12} = x$ ,  $x_{23} = y$ ,  $x_{13} = x + y$ . Получаем уравнение для определения  $\varepsilon(x)$

$$\theta \frac{d}{dx} \ln[1 + \varepsilon(x)] = F(x) + \frac{1}{l} \int_0^{\infty} F(x+y) \varepsilon(y) (1 + \varepsilon(x+y)) dy \quad (3.1)$$

Сделаем приближение, аналогичное приближению работы [11],

$$\frac{1}{x_{13}} \approx \frac{1}{x_{23}} \left( 1 + \frac{x_{12}}{x_{23}} \right) \quad (x_{23} > x_{12}), \quad \frac{1}{x_{13}} \approx \frac{1}{x_{12}} \left( 1 + \frac{x_{23}}{x_{12}} \right) \quad (x_{23} < x_{12})$$

Проводя линеаризацию (3.1) и дважды дифференцируя результат, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left( \frac{\varepsilon'}{\Phi'} \right)' + \frac{\alpha \beta \varepsilon}{l} = 0 \quad (3.2)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1°. Пусть  $\Phi(x) = 1/x$ . Тогда на основании (3.2)

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{d\varepsilon}{dx} \right) - \frac{\alpha \varepsilon}{l\theta} = 0$$

Отсюда следует

$$g(x) = 1 - \varepsilon(x) = 1 - (\kappa x)^{-\kappa}, \quad \kappa = 1/2 (1 + \sqrt{1 + 4\alpha/l\theta}) \quad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что, в отличие от трехмерного случая, экспоненциальное затухание  $g(x)$  с ростом  $x$  отсутствует. Этот факт связан с более дальнедействующим характером сил в одномерном случае.

2°. Рассмотрим  $\Phi(x) \sim \pm x^{-\omega}$ . Уравнение (3.2) принимает вид

$$- \frac{1}{\omega} \left( x^{\omega+1} \frac{d\varepsilon}{dx} \right)' \pm v\varepsilon = 0, \quad \pm v\varepsilon (1)^{\frac{\omega-1}{\omega}} \equiv K_1, \quad v = \frac{\beta}{l\theta} \quad (3.4)$$

Знаки «плюс» и «минус» относятся к притяжению и отталкиванию соответственно.

В случае отталкивания

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \varepsilon(1) + C \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n e^{-X(x)} + \frac{\vartheta+1}{\vartheta-1} (-1)^k b_k e^{X(x)} \right\} \frac{X}{k!} + \\ &+ \frac{K_1}{\vartheta-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k e^{X(x)} \frac{X^k(x)}{k!} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\vartheta = \frac{\omega-1}{2\omega}, \quad X = \frac{1}{\vartheta} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{\omega}} x^{-1/(\omega+1)}, \quad \binom{a_0}{b_0} = 1 \pm \vartheta, \quad \binom{a_k}{b_k} = \prod_{j=1}^k \frac{(2j-1)\vartheta+1}{k\vartheta-1}$$

Константы  $C$  и  $\varepsilon$  (1) определяются, если подставить  $x = 1$  в (3.5) и (3.5) в (3.1) и рассматривать получившиеся выражения совместно. Выражения, получающиеся для  $C$  и  $\varepsilon$  (1), весьма громоздки.

В случае, когда учитывается лишь притяжение между частицами, решение уравнения (3.4) имеет вид

$$\varepsilon(x) = \frac{K_1}{\nu} + \frac{x^{-\omega/2}}{\nu} \left\{ C J_\sigma(Xx) - K_1 \sin(\pi\sigma) \Gamma\left(\frac{2\omega-1}{\omega-1}\right) \left(\sigma \sqrt{\frac{\nu}{\omega}}\right)^\sigma Y_\sigma(Xx) \right\} \quad (3.6)$$

( $\sigma = 1/2\theta$ )

Здесь  $J$  — цилиндрическая функция 1-го рода, а  $Y$  — цилиндрическая функция 2-го рода. Константа  $C$  определяется тем же способом, что и для (3.5), и тоже имеет весьма громоздкий вид.

3°. Пусть  $\Phi(x) = (a/x) \exp(-\gamma x)$ . Решение линеаризованного уравнения, представленное в виде ряда Неймана, запишется

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) = \beta \left\{ -\alpha \frac{e^{-\gamma x}}{x} + \frac{1}{l} [E_1\{\gamma(1+x)\} - E_1(\gamma x)] - \right. & (3.7) \\ \left. - \alpha \sum_{m=1}^{\infty} \left(-\frac{\beta}{l}\right)^m \int_1^{\infty} K_m(x, s) \frac{e^{-\gamma s}}{s} ds \right\} \\ K_0 = \frac{e^{-\gamma(x+s)}}{x+s}, \quad K_m = \int_1^{\infty} K_{m-1}(x, t) K_0 dt \end{aligned}$$

Ввиду быстрой сходимости ряда в (3.7), выражение для  $\varepsilon(x)$  с хорошей точностью можно представить в виде

$$\begin{aligned} -\varepsilon(x) = \frac{1+x}{\theta l} \{E_1(\gamma x) - E_1[\gamma(1+x)]\} + & (3.8) \\ + \frac{\alpha}{\theta} \frac{e^{-\gamma x}}{x} \left\{ 1 - \frac{(1+x)}{\theta l} x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{k+1}(2\gamma)}{(x+1)^{k+1}} + A(x) \right\} \end{aligned}$$

Здесь

$$A(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\gamma s}}{x+s} \{E_1[\gamma(1+s)] - E_1(\gamma s)\} ds$$

— быстроходящийся интеграл, который может быть легко подсчитан приближенно. Как и раньше,  $g(x) = 0$  ( $x < 1$ ) и  $g(x) = 1 + \varepsilon(x)$  ( $x \geq 1$ )

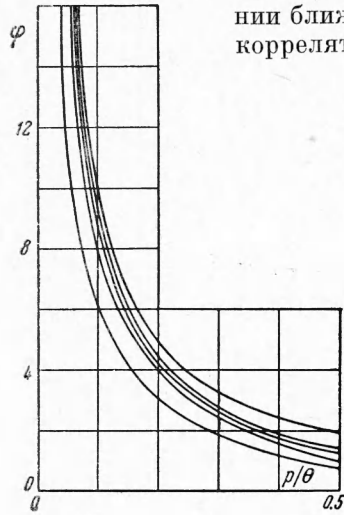
4°. В заключение рассмотрим нелинеаризованное уравнение для  $g(x)$  в приближении Кирквуда. Возвращаясь от  $\varepsilon(x)$  к  $g(x)$ , перепишем (3.1) в форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln g(x) = \xi F(x) + \zeta \int_0^{\infty} g(x+s) [g(s) - 1] F(x+s) ds & (3.9) \\ \left( F(x) = \left(\gamma + \frac{1}{x}\right) \frac{e^{-\gamma x}}{x} + \frac{\omega_2}{x^{\omega_2+1}} - \frac{\omega_1}{x^{\omega_1+1}} \right) \end{aligned}$$

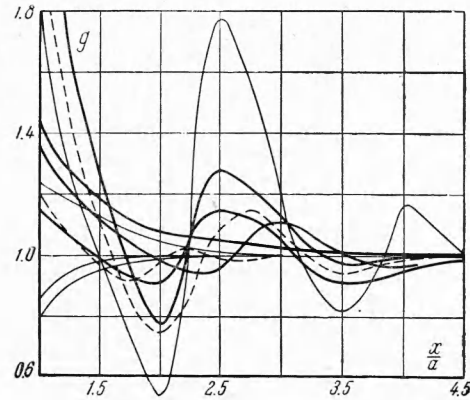
Уравнение решалось методом последовательных приближений при помощи вычислительной машины. Рассматривались те же варианты, что и в линеаризованном случае. Исследовалась сходимость решения по принципу неподвижной точки. Исследование показало, что существует область значений параметров  $\xi, \zeta$ , где последовательные приближения сходятся. Отметим, что в силу фиксированности порядка частиц значение интеграла

в уравнении (3.9) меньше, чем в соответствующем трехмерном уравнении. Последнее приводит к отсутствию ярко выраженного ближнего порядка в структуре системы (отсутствие осцилляций), т. е. нелинейность уравнения сказывается слабо.

4. В настоящей работе проведено последовательное сравнение бинарной коррелятивной функции одномерной системы, вычисленной при помощи конфигурационного интеграла в приближении ближайшего соседа и из цепочек уравнений для коррелятивных функций.



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1. Сверху — вниз: а) идеальный газ, б)  $\omega_2 = 6$  — притяжение, в) твердые сферы, г)  $\omega_1 = 12$  — отталкивание, д)  $\omega_1 = 1$

Фиг. 2. Сверху — вниз: а)  $\omega_1 = 12$ ,  $l = 2$ , б) твердые сферы  $l = 2$ , в)  $\omega_2 = 6$ ,  $l = 2$ , г)  $\omega_2 = 6$ ,  $l = 2$  — уравнение линеаризовано, д)  $\omega_1 = 12$ ,  $l = 8$ , е)  $\omega_2 = 6$ ,  $l = 8$  — уравнение линеаризовано, ж) твердые сферы,  $l = 8$ , з)  $\omega_2 = 6$ ,  $l = 8$ , и)  $\omega_1 = 12$ ,  $l = 8$  — уравнение линеаризовано, к)  $\omega_1 = 12$ ,  $l = 2$  — уравнение линеаризовано

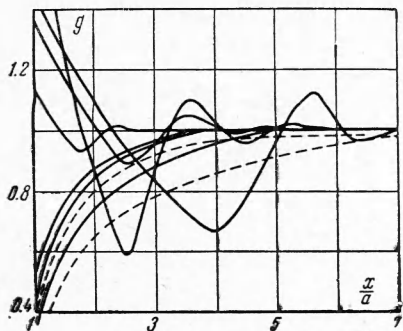
На фиг. 1 приведены кривые  $\varphi(p, T)$ , определенные в § 1. Кривая 1 относится к идеальному газу, 2 — соответствует  $\omega_2 = 6$  (притяжение), 3 — твердые сферы, 4 — соответствует  $\omega_1 = 12$  (отталкивание), 5 — относится к  $\omega_1 = 1$ . Различные потенциалы с  $\gamma \neq 0$  дают кривые между 2 и 3. Из фиг. 1 видно, что максимальное относительное расхождение графиков для наибольших  $p/\theta$  достигает примерно 200%.

На фиг. 2 приведены значения  $g(x/a)$  для потенциалов ленард-джонсовского типа и твердых сфер. Видны затухающие осцилляции коррелятивных функций, вычисленных при помощи конфигурационного интеграла, что свидетельствует о ярко выраженном ближнем порядке. В отличие от трехмерной модели, в одномерном случае радиус области ближнего упорядочения значительно больше. С ростом плотности и с уменьшением температуры амплитуды осцилляций растут, и область осцилляций занимает большую площадь.

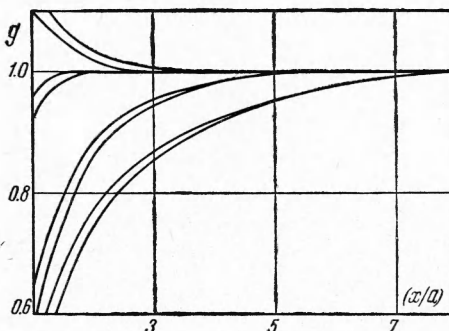
Из кривых, приведенных на фиг. 3, видно, что  $g(x/a)$ , вычисленная в суперпозиционном приближении, асимптотически правильно описывает свойства системы, существенно отличаясь от точного значения вблизи границы частицы. Линеаризованное суперпозиционное приближение дает еще большее расхождение с точным решением при малых  $x/a$  и хорошо описывает асимптотические свойства. Отметим, что острота первого пика связана с разрывным характером потенциала. Пунктиром для сравне-

ния приведены  $g(x/a)$  для твердых сфер, вычисленные при помощи конфигурационного интеграла.

На фиг. 4 изображены графики  $g(x/a)$  в случае чисто электрического взаимодействия. Проведены аналогичные сравнения. Относительно общего характера поведения функций можно сделать те же заключения, что и в предыдущем случае. Дополнительно приведены  $g(x/a)$  для потенциала, трехмерным аналогом которых являются коррелятивные функции, вычисленные в приближении Дебая — Хюккеля.



Фиг. 3



Фиг. 4

Фиг. 3. Сверху — вниз: а)  $\omega_2 = 6, l = 8, \alpha\beta = 0.25$ , б)  $\omega_2 = 6, l = 8, \alpha\beta = 1$ , в)  $\omega_2 = 6, 12, l = 2, \alpha\beta = 1$ , г)  $\omega_2 = 6$  и  $12, l = 16, \alpha\beta = 0.25$ , д)  $\omega_1 = 12, l = 2, \alpha\beta = 1$ , е)  $\omega_1 = 12, l = 8, \alpha\beta = 1$ , ж)  $\gamma = 0.5, l = 8, \alpha\beta = 0.5$ , з)  $\gamma = 0.5, l = 16, \alpha\beta = 1$ , и)  $\gamma = 0.1, l = 8, \alpha\beta = 1$

Фиг. 4. (1) —  $\gamma = 0.5, l = 2$ ; (2) —  $\gamma = 0.1, l = 2$ ; (3) —  $\gamma = 0.5, l = 4$ ; (4) — твердые сферы,  $l = 8$ ; (5) —  $\gamma = 0.5, l = 8$ ; (6) —  $\gamma = 0.1, l = 8$ ; (7) —  $\Phi 1/x, l = 8$ ; (8) —  $\gamma = 0.5, l = 16$

В заключение благодарим И. Г. Крутикову за большую помощь при разработке метода приближенных вычислений и при составлении программы численного решения уравнения (3.9). Авторы также благодарят Е. С. Кузнецова, С. В. Тябликова и В. Т. Хозяинова за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 9 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике, гл. I, Гостехиздат, 1957.
2. G ü r s e y F. Statistikal Mechanics of rectilineary system, Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 96, p. 182, 1950.
3. L e n a r d A. Exact statistical mechanics of a one-dimensional system with Coulomb forces, J. Math. Phys., vol. 2, p. 682, 1961.
4. P r a g e r S. Advances in Chemical Physics, edited by I. Prigogine, New York, 1964.
5. К а с М. Proc. of the Second Berkeley Symposium on Probability and Statistics. University of California Press, Berkeley, California, 1951.
6. E d w a r d s S. F. and L e n a r d A. Exact Statistical mechanics of a one-dimensional system with Coulomb forces, 2-nd. The method of functional integration, J. Math. Phys., vol 13, 4, 1962.
7. Х и л л Т. Статистическая механика. Изд. иностр. лит., 1960.
8. Ф и ш е р И. З. Статистическая теория жидкостей, Физматгиз, 1961.
9. Ф р е н к е л ь Я. И. Кинетическая теория жидкостей. Изд. АН СССР, 1945.
10. Y v o n J. Cours de Mechanique statistique, Dunod, Paris, 1959.
11. D e l c r o i x J. L. Theorie microscopique des gaz neutres et ionises, Dunod, Paris, 1960.