

## К ТЕОРИИ СУХОГО ТРЕНИЯ КАУЧУКОПОДОБНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Ю. А. Бувич, А. И. Леонов

(Москва)

Существенная особенность сил трения, возникающих при относительном движении контактирующих твердых тел, состоит в том, что их происхождение тесно связано с наличием сравнительно короткодействующих сил взаимодействия между прилегающими друг к другу поверхностными слоями этих тел. Эти силы в значительной мере определяются конфигурацией и структурой поверхностных слоев, а последние существенно зависят от скорости относительного движения тел. Поэтому построение последовательной модели или теории сил трения по необходимости связано с анализом микроструктуры поверхностных слоев и тонких физических явлений, происходящих вблизи поверхности контакта.

Между тем, большинство существующих теорий трения основано на феноменологических и, по сути дела, макроскопических представлениях о взаимодействии контактирующих тел (библиография и обзор этих теорий содержатся в монографии [1]). Попытка построить количественную теорию трения, исходя из явного рассмотрения микроскопических особенностей поверхностных слоев, была сделана в работе Э. И. Адировича и Д. И. Блохинцева [2]. В этой работе было показано, что при скольжении одного упругого тела по поверхности другого в этих телах возникают упругие волны, уносящие энергию от поверхности контакта. Формально эту потерю энергии можно описать при помощи введения тангенциальной силы сопротивления движению; определенная таким образом сила трения имеет падающую скоростную характеристику.

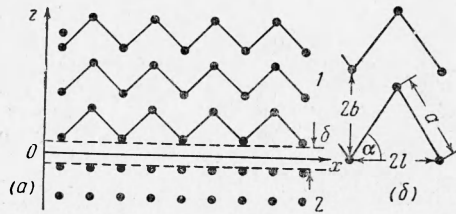
Многие экспериментальные факты свидетельствуют, что в случае, когда одно (или даже оба) контактирующее тело представляет собой высокоэластичный материал (полимеры, каучуки и т. п.), характеристики трения весьма сильно отличаются от таковых для случая скольжения обычных упругих тел [3]. Представляет интерес выяснить, в чем, собственно, состоит причина этих резких и часто наблюдаемых отличий, и построить по возможности простую модель для их описания.

В соответствии с этим в данной работе рассмотрена несколько идеализированная задача о сухом трении при установившемся скольжении каучукоподобного тела по поверхности кристаллического упругого тела и определена зависимость силы трения от скорости скольжения и от физических параметров, характеризующих эти тела. Поверхности обоих тел считаются гладкими и незагрязненными, а сами тела — однородными. Основное внимание уделено принципиальным особенностям явления, поэтому при построении модели и ее исследовании приняты различные упрощающие предположения, которые с качественной точки зрения могут рассматриваться как несущественные.

**§ 1. Физическая модель процесса трения.** Рассматриваем скольжение с постоянной относительной скоростью  $v$  каучукоподобного тела 1, занимающего область  $z > 0$  (фиг. 1, *a*), по поверхности упругого тела 2, занимающего полупространство  $z < 0$ . Взаимодействие между телами опишем при помощи введения дискретных наборов «силовых центров», распределенных по объемам контактирующих тел. Вопрос о конкретной природе постулируемых силовых центров здесь не рассматривается. Ими могут быть как микроскопические неровности на контактирующих поверхностях, так и определенные дефекты внутренней структуры или (в случае очень малого зазора  $\delta$  между телами) отдельные группы цепных молекул. Важно лишь, что взаимодействие между контактирующими поверхностями осуществляется при помощи этого дискретного набора силовых центров. Сформулируем основные допущения, касающиеся микроструктуры поверхностных слоев обоих тел и ее изменения при движении.

1. Тело 2 имеет вполне периодическую структуру. Некие силовые центры, изображенные точками на фиг. 1, *a*, соединены жесткими связями. Возможными колебаниями этих центров относительно равновесных положений и их смещениями под действием возникающих при движении напряжений пренебрегаем. Таким образом, период структуры  $2L$  тела 2 в направлении оси  $x$  можно считать не зависящим от скорости относительного движения.

2. Поверхностный слой тела 1 состоит из упакованных в параллельном направлении «пилообразных» цепей, состоящих из силовых центров, расстояние между которыми равно  $a$ . При этом предполагаем, что под действием возникающих при движении растягивающих напряжений эти цепи могут распрямляться. В целом поверхностный слой тела 1 также обладает периодической структурой с периодами  $2l$  — по оси  $x$  и  $2b$  — по оси  $z$  (фиг. 1). Заметим, что реальные цепи имеют пространственную структуру и их звенья могут ориентироваться в различных



Фиг. 1

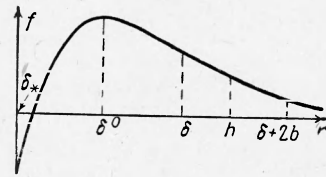
направлениях. В данной модели предполагается для упрощения, что цепи расположены в плоскостях, параллельных  $(x, z)$ . Далее станет ясно, что на приводимых ниже качественных результатах это не отражается.

3. Естественно предположить, что при относительном движении тел в поверхностных слоях появляются растягивающие напряжения, возрастающие с увеличением силы трения  $Q$ . Предполагаем, что под действием этих напряжений цепи распрямляются за счет уменьшения угла  $\alpha$ , причем расстояние  $a$  между силовыми центрами цепи остается неизменным (фиг. 1, *b*). Таким образом, растягивающиеся цепи представляют собой некие аналоги длинных спиральных молекул или волокон каучукоподобного тела, а изменение угла  $\alpha$  обуславливает появление больших высокоэластических деформаций. В этом случае  $l = l(Q)$ , причем

$$dl/dQ > 0, \quad l(0) = l_0 \quad (1.1)$$

Предполагаем также, что существует конечное значение  $l_\infty$  при  $Q \rightarrow \infty$ . Вопросы, связанные с разрушением цепей, в настоящей работе не рассматриваются.

4. Расстояние  $\delta$  между контактирующими поверхностями определяется нормальным давлением верхнего тела на нижнее и специфической силой взаимодействия между поверхностями конденсированных фаз 1 и 2. При достаточно больших  $\delta$  сила взаимодействия, являющаяся силой притяжения, сначала увеличивается с уменьшением зазора, далее, с вступлением в игру короткодействующих сил отталкивания, рост ее замедляется. Она проходит через максимум, соответствующий некоторому значению толщины зазора  $\delta^0$ , а затем убывает, сменяясь при очень малых  $\delta$  силой отталкивания между телами. Типичная зависимость силы взаимодействия  $f(r)$  от расстояния  $r$  между телами приведена на фиг. 2. Величина  $\delta_*$  соответствует минимальному возможному зазору между контактирующими телами. Известно, что при достаточно больших зазорах между поверхностями действуют силы притяжения, вызванные флуктуационным электромагнитным полем, выходящим за пределы фаз. Теория такого притяжения



Фиг. 2

при достаточно большом зазоре между телами была развита Е. М. Лифшицем [4], который показал, что силы притяжения убывают по закону  $\delta^{-3}$ . Эксперименты, тщательно выполненные Б. В. Дерягиным и И. И. Абрикосовой, подтвердили выполнение этого закона вплоть до расстояний  $\sim 0.04$  мк между телами [5].

5. При растяжении поверхностного слоя тела 1 в направлении оси  $x$  отдельные цепи имеют тенденцию к сближению. Вследствие этого расстояние между цепями, определяемое функцией  $b(Q)$ , имеет свойства

$$db/dQ < 0, \quad b(0) = b_0 \quad (1.2)$$

Таким образом, тело 1 можно представить как наложение двух решеток силовых центров с переменными периодами  $2l(Q)$  — вдоль оси  $x$  и  $2b(Q)$  — вдоль оси  $z$ . При этом расстояние одной из решеток от поверхности тела 2 постоянно и равно  $\delta$ , а расстояние второй решетки от этой поверхности  $h(Q)$  определено следующим образом:

$$h = \delta + (a^2 - l^2)^{1/2}, \quad dh/dQ < 0, \quad h(0) = h_0 \quad (1.3)$$

При этом будем предполагать, что существуют ограниченные величины  $b_\infty$  и  $h_\infty$  при  $Q \rightarrow \infty$ .

Для дальнейшего удобно, как и в [2], ввести периодические функции  $\sigma_1(r)$  и  $\sigma_2(r)$  с периодами, соответствующими периодам структур тел 1 и 2 в направлении движения, такие, что сила взаимодействия, отнесенная к единичной площади поверхности тела 2, представится

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, vt) = \sigma_2(\mathbf{r}) \int \sigma_1(\mathbf{r}' - \mathbf{e}vt) f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dV_1 \quad (1.4)$$

где интегрирование распространено по объему  $V_1$  тела 1. В этом выражении учтено относительное движение с постоянной скоростью  $v$ ,  $\mathbf{e}$  — единичный вектор в направлении оси  $x$ .

Силу  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, vt)$  удобно разложить в ряд Фурье

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, vt) = \sum_{\mathbf{m}, n} \mathbf{F}_{\mathbf{m}, n} \exp \left[ i\pi \left( \frac{\mathbf{m}\mathbf{r}}{L} - \frac{nv\mathbf{t}}{l} \right) \right] \quad (1.5)$$

Очевидно, что  $y$  — проекция  $F_y^i(\mathbf{r}, vt) = 0$ ; как показано в [2], закон сохранения энергии при отсутствии движения дает  $F_{0,0}^{(x)} \equiv 0$ . Не ограничивая общности, можно считать также  $F_{0,0}^{(z)} \equiv 0$ .

**§ 2. Диссипация энергии и формальное выражение для силы трения.** Для того чтобы определить поток энергии, отводимой от поверхности контакта при относительном скольжении двух тел, необходимо решить задачу о распространении упругих волн в полупространствах  $z > 0$  и  $z < 0$ , возбуждаемых действующей на поверхности контакта  $z = 0$  периодической нагрузкой (1.4). В данном случае для полупространства  $z < 0$  эта задача сводится к решению волнового уравнения для функции  $\psi = \text{div } \mathbf{U}$  (где  $\mathbf{U}$  — вектор смещения), которое легко решается методом разделения переменных. Подробные вычисления были проведены в [2]. При этом было показано, что возможны как затухающие релеевские волны при

$$\mathbf{m}\mathbf{m} > (nvL/c_1l)^2, \quad \mathbf{m}\mathbf{m} > (nvL/c_2l)^2$$

так и незатухающие синусоидальные волны при

$$\mathbf{m}\mathbf{m} < (nvL/c_1l)^2, \quad \mathbf{m}\mathbf{m} < (nvL/c_2l)^2$$

Здесь  $c_1$  и  $c_2$  — скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно.

В предположении  $m \approx 0$  в [2] было получено выражение для потока энергии  $W_-$ , отводимого от поверхности контакта в нижнее полупространство

$$W_- = \sum_{n=1}^{\infty} \{ (\rho\mu)^{-1} F_{0,n}^{(x)} F_{0,-n}^{(x)} + [\rho(\lambda + 2\mu)]^{-1} F_{0,n}^{(z)} F_{0,-n}^{(z)} \} \quad (2.1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $\lambda$  и  $\mu$  — коэффициенты Ламе,  $F_{0,n}^{(x)}$  и  $F_{0,n}^{(z)}$  — коэффициенты Фурье проекций силы взаимодействия  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, 0)$ .

Совершенно аналогично можно определить поток энергии  $W_+$ , уносимый волнами в полупространство  $z > 0$ . В этом случае при достаточно больших нагрузках может происходить ориентация цепей тела 1 в направлении движения не только в поверхностном слое, но и в объеме. В силу этого, вообще говоря, тело 1 уже нельзя считать изотропным. Тогда будем иметь несколько продольных и поперечных волн, распространяющихся с различными скоростями. Легко, однако, видеть, что эта особенность не является существенной.

Если опять-таки предположить, что  $m \approx 0$ , то для данного случая будем иметь выражение для  $W_+$ , совершенно аналогичное (2.1). Приравнявая сумму  $W_+ + W_-$  работе силы трения в единицу времени, получим окончательно

$$Q = v^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_1 F_{0,n}^{(x)} F_{0,-n}^{(x)} + \omega_2 F_{0,n}^{(z)} F_{0,-n}^{(z)}) \quad (2.2)$$

Здесь  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — величины, зависящие от упругих постоянных обоих тел. В частном случае, когда оба тела представляют собой кристаллические упругие тела, выражение под знаком суммы в (2.2) не зависит от  $Q$  или  $v$ , т. е. приходим к полученной в [2] падающей скоростной характеристике силы трения.

Выше, следуя работе [2], было сделано предположение, что  $m \approx 0$ . Нетрудно дать физическое обоснование этому предположению. Возникновение упругих волн связано с наличием периодических пространственных структур в телах 1 и 2, движущихся относительно друг друга со скоростью  $v$ . Последнее хорошо видно из формулы (1.4). Однако здесь рассматривается распространение уже возникших упругих волн по обоим телам. Поэтому, если существенными являются только волны с длиной, много большей периодов структуры, то можно считать оба тела непрерывными средами. Это соответствует случаю, когда  $m = 0$  и соответственно  $v \ll \min(c_1, c_2)$ .

**§ 3. Зависимость силы трения от скорости относительного движения.** Исследуем скоростную характеристику  $Q$  в общем случае, когда правая часть в (2.2) зависит от  $Q$ . Для простоты рассматриваем (2.2) в линейном приближении, т. е. полагаем

$$d\omega_1 / dQ = 0, \quad d\omega_2 / dQ = 0$$

Поскольку можно считать, что поток энергии, отводимой от поверхности контакта, пропорционален числу силовых центров, приходящихся на единицу поверхности тела 1, то можно записать

$$W_+ + W_- \sim l^{-1} \quad (3.1)$$

Очевидно, из соображений симметрии можно заменить величину  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, 0)$ , определенную равенством (1.5), силой взаимодействия между плоскими решетками тела 1 и поверхностной решеткой тела 2. При этом можно считать, что в среднем  $F^{(x)}(\mathbf{r}, 0) \approx 0$ . Величина  $F^{(z)}(\mathbf{r}, 0)$  периодична по  $x$

и может быть представлена в виде суммы слагаемых, описывающих взаимодействие плоских решеток тела 1, расположенных на расстояниях  $\delta$ ,  $h$ ,  $\delta + 2b$  и т. д. от тела 2 с поверхностью этого тела. Тогда вследствие короткодействующего характера рассматриваемых сил имеем из (1.5) для  $z$  — проекции силы  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, 0)$

$$F^{(z)}(\mathbf{r}, 0) \approx \sigma_2(x) \sum_k B_k f(h_k), \quad B_k = C_k l^{-1/2} \quad (3.2)$$

где  $h_k = \delta, h, \delta + 2b$  и т. д.,  $C_k$  — некие постоянные одного знака, порядка единицы, а функция взаимодействия  $f(\mathbf{r})$  имеет вид, изображенный на фиг. 2. Подставляя (3.2) в (2.2) и учитывая предыдущие рассуждения, будем иметь

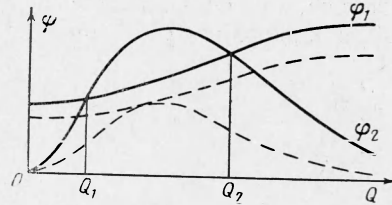
$$W_+ + W_- = Qv = l^{-1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \sigma_{-n} \right) \left( \sum_k C_k f(h_k) \right)^2 \quad (3.3)$$

Здесь  $\sigma_n$  — фурье-коэффициенты функции  $\sigma_2(x)$ . Подставляя (3.3) в (3.2) и оставляя только первые три члена в сумме

$$\sum_k C_k f(h_k)$$

(далее станет ясно, что это не изменяет получаемых ниже результатов), будем иметь

$$Q \approx (vl)^{-1} [A_1 f(\delta) + A_2 f(h) + A_3 f(\delta + 2b)]^2 \quad (3.4)$$



Фиг 3

где  $A_1 \sim A_2 \sim A_3$  — новые постоянные. Дифференцируя (3.4) по  $Q$ , без труда получаем

$$\frac{dQ}{dv} = lQ \left\{ -v \frac{d(lQ)}{dQ} + 2 [A_1 f(\delta) + A_2 f(h) + A_3 f(\delta + 2b)] \times \right. \\ \left. \times \left[ A_2 \frac{df}{dr} \Big|_{r=h} \frac{dh}{dQ} + A_3 \frac{df}{dr} \Big|_{r=\delta+2b} \frac{d(2b)}{dQ} \right] \right\}^{-1} \quad (3.5)$$

Очевидно, что выражение (3.5) нигде не обращается в нуль (если, конечно, ни одна из производных в правой части (3.5) не обращается в бесконечность, что везде предполагается), т. е. функция  $Q(v)$  не имеет экстремумов.

Реальные расстояния  $\delta$  соответствуют силам притяжения между контактирующими телами; естественно принять  $h > \delta^\circ$ ,  $\delta + 2b > \delta^\circ$ . В этой области, как явствует из фиг. 2, производная  $df/dr < 0$ . Учитывая (1.2) и (1.3), приходим к выводу, что члены в фигурных скобках в (3.5) имеют разные знаки.

Рассмотрим случай, когда знаменатель (3.5) обращается в нуль. Подставляя (3.1) в (3.5), будем иметь

$$\varphi_1(Q) = [A_1 f(\delta) + A_2 f(h) + A_3 f(\delta + 2b)] \frac{d(lQ)}{dQ} = \\ = \varphi_2(Q) = 2Ql \left[ A_2 \frac{df}{dr} \Big|_{r=h} \frac{dh}{dQ} + A_3 \frac{df}{dr} \Big|_{r=\delta+2b} \frac{d(2b)}{dQ} \right] \quad (3.6)$$

Легко усмотреть, что левая часть этого уравнения принимает конечные, не равные нулю значения во всем интервале изменения  $Q$ , монотонно возрастающая от своего значения при  $Q = 0$  до значения при  $Q \rightarrow \infty$ . Правая часть (3.6) при  $Q \rightarrow 0$  и  $Q \rightarrow \infty$  стремится к нулю (предполагаем, что



производные от  $l - l_\infty$  и  $b - b_\infty$  по  $Q$  стремятся при  $Q \rightarrow \infty$  к нулю быстрее, чем  $Q^{-1}$ . Отсюда следует, что, по крайней мере, в одной внутренней точке  $Q$  правая часть (3.6) достигает максимума. Очевидно, что при достаточно больших значениях производных в правой части (3.6) эта функция может превзойти по величине левую часть уравнения (3.6). В этом случае кривые, изображающие зависимость левой и правой частей (3.6) от  $Q$ , пересекаются, по крайней мере, в двух точках —  $Q_1$  и  $Q_2$ , причем производная (3.5) в этих точках обращается в бесконечность (фиг. 3).

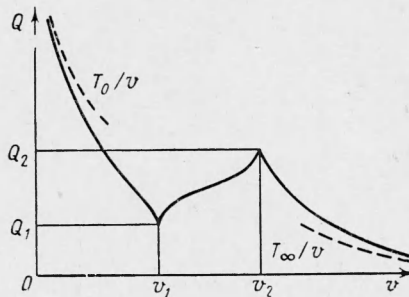
Рассмотрим подробнее эти «особые» точки. Из (3.4) при  $v \rightarrow 0$  получаем

$$Q \approx (vl_\infty)^{-1} [A_1 f(\delta) + A_2 f(h_\infty) + A_3 f(\delta + 2b_\infty)]^2 = T_0 / v$$

Аналогично при  $v \rightarrow \infty$  имеем

$$Q \approx (vl_0)^{-1} [A_1 f(\delta) + A_2 f(h_0) + A_3 f(\delta + 2b_0)]^2 = T_\infty / v$$

Очевидно, в этих «асимптотических» областях производная (3.5) отрицательна, сила трения  $Q(v)$  убывает с ростом скорости  $v$ . В точках  $Q_1$  и  $Q_2$  производная (3.5) меняет знак, что соответствует возрастанию  $Q(v)$



Фиг. 4

от  $Q_1$  до  $Q_2$  в некотором интервале  $[v_1, v_2]$ . Таким образом, точки  $(Q_1, v_1)$  и  $(Q_2, v_2)$  на плоскости  $(Q, v)$  представляют собой точки возврата кривой  $Q = Q(v)$ , а сама эта кривая имеет вид, изображенный на фиг. 4. Первая точка возврата соответствует минимуму на скоростной характеристике силы трения, вторая — максимуму. Как уже указывалось, наличие максимума на зависимости  $Q(v)$  хорошо совпадает с экспериментальными данными [3].

Рассмотрим теперь качественно зависимость скоростной характеристики трения, представленной на фиг. 4, от нормального давления на поверхности контакта. С увеличением давления величины  $\delta$ ,  $h$ ,  $\delta + 2b$  и т. д. уменьшаются, сдвигаясь влево на фиг. 2. Грубо говоря, переход  $\delta$  в область  $r < \delta^\circ$  соответствует насыщению зависимости силы трения от нормального давления. При этом производная  $df/dr$  убывает по абсолютной величине. В конце концов достигается ситуация, когда правая часть (3.6) становится меньше левой во всем интервале  $Q$  или совпадает с ней в одной точке (пунктир на фиг. 3), т. е. увеличение нормального давления ведет к исчезновению участка возрастания скоростной характеристики  $Q(v)$ .

Рассмотрим еще влияние эластичности тела. Малоэластичное тело в рамках предлагаемой модели соответствует малым по абсолютной величине производным от функций  $h$ ,  $b$  и т. д. по  $Q$ , так что правая часть (3.6) намного меньше левой. С увеличением степени эластичности правая часть растет и при некоторых критических значениях упругих параметров касается кривой, изображающей на фиг. 3 левую часть (3.6). С дальнейшим увеличением эластичности появляется участок возрастания на скоростной характеристике силы трения.

Отметим теперь пределы применимости полученных качественных результатов. Верхняя оценка интервала скоростей движения прямо следует из изложенного выше

$$v \ll c$$

где  $c$  — наименьшая из скоростей распространения упругого возмущения в телах 1 и 2. Нижняя оценка для интервала  $v$ , в котором полученные результаты применимы, обсуждалась для случая упругих тел в работе [2]

$$Q(v) = \frac{\text{const}}{v} < \sum_{n=1}^{\infty} F_{0,n}^{(2)} F_{0,-n}^{(2)} \quad (3.7)$$

Очевидно, в рассматриваемом случае нижняя граница для скорости по порядку величины совпадает с решением (3.7). Это решение соответствует весьма малым скоростям движения. Например, для случая трения пары сталь — сталь Адирович и Блохинцев получили  $v \approx 0.5-1$  см / сек.

Интересно сравнить скоростную характеристику трения, представленную на фиг. 4, с результатами работы [2]. При достаточно больших скоростях движения (не превосходящих, однако,  $c$ ) сила трения  $Q$  весьма мала; вызываемые ею растягивающие напряжения в каучукоподобном материале незначительны. В силу этого проблема сводится к задаче, рассмотренной в работе [2]. Таким образом, при достаточно больших  $v$  характеристика трения, представленная на фиг. 4, асимптотически приближается к кривой  $T_{\infty}/v$ , показанной пунктиром. С уменьшением скорости сила трения растет; вызываемые ею напряжения растягивают полимерные цепи, что приводит к сближению силовых центров поверхностных слоев тела 1 с решеткой тела 2, расположенной на поверхности контакта. В результате этого происходит быстрый рост силы взаимодействия в некотором интервале  $v > v_2$  вблизи  $v_2$  и соответственно — быстрое увеличение силы трения. С дальнейшим уменьшением  $v$  происходит постепенное насыщение зависимостей, определяющих растяжение цепей в направлении движения. Это приводит к уменьшению силы взаимодействия между силовыми центрами тел 1 и 2, расположенными вблизи поверхности контакта и падению силы трения на участке  $v_1 < v < v_2$ . При дальнейшем уменьшении  $v$  цепи максимально растянуты, в поверхностных слоях тела 1 создается ориентированная структура, и, если отвлечься от возможности разрушения цепей при достаточно большом значении  $Q$ , то создается опять ситуация, напоминающая рассмотренную в работе [2]. Таким образом, при  $v < v_1$  кривая  $Q(v)$ , представленная на фиг. 4, асимптотически приближается к зависимости  $T_0/v$ , показанной пунктиром, где, вообще говоря,  $T_0 \neq T_{\infty}$ .

Авторы признательны Г. И. Баренблатту за обсуждение работы.

Поступила 15 VI 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А х м а т о в А. С. Молекулярная физика граничного трения. Физматгиз, 1963.
2. A d i r o v i c h E., B l o k h i n z e v D. On the Forces of Dry Friction. J. Phys. USSR, 1943, vol. 7, No. 1, p. 23.
3. C o n a n t F. S., L i s k a J. W. Friction Studies on Rubberlike Materials. Rubber Chem. and Technol., 1960, vol. 133, No. 5, p. 1218.
4. Л и в ш и ц Е. М. Теория молекулярных сил притяжения между конденсированными телами. Докл. АН СССР, 1954, т. 97, № 4, стр. 643.
5. Д е р я г и н Б. В., А б р и к о с о в а И. И. Прямые измерения молекулярного притяжения между твердыми телами в вакууме. Докл. АН СССР, 1956, т. 108, № 2, стр. 214.