УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Ф. А. Сейфуллаев, Ш. А. Керимова, Н. А. Агаева*

Институт математики и механики НАН Азербайджана, AZ1141 Баку, Азербайджан
* Научно-исследовательский проектный институт “Нефтегаз”, AZ1012 Баку, Азербайджан
E-mails: a.seyfullayev@yahoo.com, shusha_az@rambler.ru, n.agayeva1975@gmail.com

С использованием вариационного принципа исследуются колебания подкрепленной тонкой цилиндрической оболочки с заполнителем при осевом сжатии с учетом трения на поверхности их контакта. Построены зависимости частоты собственных колебаний от числа волн в окружном направлении.

Ключевые слова: оболочка, колебание, модуль упругости, деформация, полная энергия, коэффициент трения.

DOI: 10.15372/PMTF20190414

Введение. В различных отраслях машиностроения широко применяются цилиндрические оболочки с заполнителями, что обусловливает необходимость более полного учета характеристик материалов и конструкций для проведения надежных расчетов на прочность. Для более достоверного описания несущей способности конструкции целесообразно учитывать силы воздействия со стороны заполнителя. Одним из видов такого воздействия является его контакт с упругой средой. Силы воздействия со стороны заполнителя являются поверхностными силами и возникают вследствие контакта оболочки и упругого заполнителя. При расчете параметров таких оболочек необходимо учитывать силы трения, обусловленные взаимодействием оболочки с заполнителем.

В данной работе с использованием вариационного принципа исследуются колебания подкрепленной тонкой цилиндрической оболочки с заполнителем при осевом сжатии с учетом трения на поверхности их контакта. Построены зависимости частоты собственных колебаний системы от числа волн в окружном направлении.

Следует отметить, что большинство известных решений получены для подкрепленной цилиндрической оболочки без заполнителя [1]. Колебания гладких цилиндрических оболочек с заполнителем достаточно полно исследованы в работах [2–8]. В работе [4] изучены колебания цилиндрических оболочек, усиленных продольными ребрами и заполненных упругой средой.

Постановка задачи. В данной работе исследуются свободные колебания цилиндрических оболочек с заполнителем, подкрепленных перекрестной системой ребер, при осевом сжатии с учетом трения между оболочкой и заполнителем. Проводится анализ влияния параметров внешней среды на частоту собственных колебаний системы.

Задача решается с использованием энергетического метода. Выражение для потенциальной энергии оболочки, нагруженной осевыми сжимающими силами, имеет вид [1]

$$P = \frac{Eh}{2(1-v^2)} \int\limits_0^{\zeta_1} \int\limits_0^{2\pi} \Big\{ \Big(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \Big)^2 + 2(1-v) \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \Big) - \frac{1}{4} \Big(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \Big)^2 \Big\} \, d\xi \, d\theta +$$

$$+ \frac{Eh}{24(1-v^2)R^2} \int\limits_0^{\xi_1} \int\limits_0^{2\pi} \Big\{ \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \Big)^2 -$$

$$- 2(1-v) \Big[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \Big) - \frac{1}{4} \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \, \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \Big)^2 \Big] \Big\} d\xi \, d\theta +$$

$$+ \frac{E_{\text{с}}}{2R} \sum_{i=1}^{k} \int\limits_0^{\xi_1} \Big[F_{\text{с}} \Big(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{h_{\text{с}}}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \Big)^2 + \frac{I_{y\text{с}}}{R^2} \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \Big)^2 + \frac{G_{\text{с}}}{E_{\text{с}}} I_{\text{кр.с}} \frac{G_{\text{с}}}{E_{\text{с}}} I_{\text{кр.с}} \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \, \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \Big)^2 \Big]_{\theta = \theta_i} d\xi -$$

$$- \frac{\sigma_x h}{2} \int\limits_0^{\xi_1} \int\limits_0^{2\pi} \Big(\frac{\partial w}{\partial \xi} \Big)^2 d\xi \, d\theta - \frac{\sigma_x F_{\text{с}}}{2R} \sum_{i=1}^{k} \int\limits_0^{\xi_1} \Big(\frac{\partial w}{\partial \xi} \Big)^2 \Big|_{\theta = \theta_i} d\xi, \qquad (1)$$

где $\xi_1 = L/R$; $\xi = x/R$; $\theta = y/R$; x, y, z — координаты; $E_{\text{с}}$, $G_{\text{с}}$ — модули упругости и сдвига материала продольных ребер (стержней); k — количество продольных ребер; σ_x — осевые сжимающие напряжения; u, v, w — компоненты вектора перемещений оболочки; h, R — толщина и радиус оболочки соответственно; E, v — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки; $F_{\text{с}}$, $I_{y\text{с}}$, $I_{\text{кр.с}}$ — площадь и момент инерции поперечного сечения продольного стержня относительно оси y, а также момент инерции при кручении соответственно; $\theta_i = 2\pi i/k$.

Кинетическая энергия оболочки определяется по формуле

$$K = \frac{Eh}{2(1-v^2)} \int\limits_0^{\xi_1} \int\limits_0^{2\pi} \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t_1} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial t_1} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial t_1} \Big) \Big] \, d\xi \, d\theta +$$

$$+ \frac{\bar{\rho}_{\text{с}} E_{\text{с}} F_{\text{с}}}{2R(1-v^2)} \sum_{i=1}^{k} \int\limits_0^{\xi_1} \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t_1} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial t_1} \Big) \Big]_{\theta = \theta_i} d\xi, \qquad (2)$$

где $\bar{\rho}_{\text{с}} = \rho_{\text{с}}/\rho_0$; ρ_0, $\rho_{\text{с}}$ — плотности материалов оболочки и продольного стержня соответственно.

Со стороны заполнителя к оболочке приложена поверхностная нагрузка. Выражение для работы, совершаемой этой нагрузкой при переходе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное, имеет вид

$$A_0 = - \int\limits_0^{\xi_1} \int\limits_0^{2\pi} (q_x u + q_\theta v + q_z w) \, d\xi \, d\theta + \int\limits_0^{\xi_1} \int\limits_0^{2\pi} f q_z (u + v) \, d\xi \, d\theta \qquad (3)$$

(q_x, q_θ, q_z — компоненты нагрузки, действующей со стороны заполнителя на оболочку; f — коэффициент трения).

Полная энергия системы равна

$$\Pi = P + K + A_0. \tag{4}$$

Запишем уравнение движения среды в векторной форме [2, 3]

$$a_e^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{S} - a_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{S} + \omega^2 \boldsymbol{S} = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant L, \quad 0 \leqslant r \leqslant R, \tag{5}$$

где $a_t^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$; $a_e^2 = \mu/\rho$; a_t, a_e — скорости распространения продольных и поперечных волн в заполнителе соответственно; $\boldsymbol{S} = (S_x, S_\theta, S_z)$ — вектор перемещения; λ, μ — коэффициенты Ламе для среды. К системам уравнений движения среды (5) добавляются условия на контактной поверхности. Предполагается, что контакт между оболочкой и заполнителем жесткий, т. е. при $r = R$

$$u = S_x, \qquad v = S_\theta, \qquad w = S_z; \tag{6}$$

$$q_x = -\sigma_{rx}, \qquad q_y = -\sigma_{r\theta}, \qquad q_z = -\sigma_{rr}. \tag{7}$$

Здесь σ_{rx}, $\sigma_{r\theta}$, σ_{rr} — компоненты тензора напряжений [2, 3]:

$$\begin{gathered} \sigma_{rx} = \mu_s\Big(\frac{\partial S_x}{\partial r} + \frac{\partial S_r}{\partial x}\Big), \qquad \sigma_{r\theta} = \mu_s\Big(r\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{S_r}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial S_r}{\partial \theta}\Big), \\ \sigma_{rr} = \lambda_s\Big(\frac{\partial S_r}{\partial x} + r\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{S_r}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\Big) + 2\mu_s\,\frac{\partial S_r}{r}, \end{gathered} \tag{8}$$

λ_s, μ_s — коэффициенты Ламе для заполнителя.

Дополняя уравнения движения заполнителя (5) условиями на контактной поверхности (6), (7), получаем контактную задачу о колебаниях цилиндрической оболочки с заполнителем, подкрепленной перекрестной системой ребер. Решение этой задачи сводится к совместному интегрированию уравнений теории оболочек и уравнений движения заполнителя при выполнении условий (6), (7).

Метод решения. Ниже рассматриваются оболочки, края которых шарнирно оперты. Компоненты вектора перемещений таких оболочек будем искать в виде

$$u = A\cos kx\,\cos n\varphi\,\mathrm{e}^{i\omega_1 t_1}, \quad v = B\sin kx\,\sin n\varphi\,\mathrm{e}^{i\omega_1 t_1}, \quad w = C\sin kx\,\cos n\varphi\,\mathrm{e}^{i\omega_1 t_1}, \tag{9}$$

где A, B, C — неизвестные постоянные; $k = m\pi/L$ ($m = 1, 2, \ldots$); m, n — волновые числа в продольном и окружном направлениях соответственно; L — длина оболочки,

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{(1 - v^2)\rho_0 R^2 \omega^2}{E}}\,, \qquad t_1 = \omega_0 t, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{E}{(1 - v^2)\rho_0 R^2}}\,,$$

ω, ω_0 — собственные частоты колебаний подкрепленной оболочки и оболочки без подкрепления, имеющих один и тот же вес.

Решения системы (5) имеют следующий вид [3]:

1) при малых инерционных силах, действующих со стороны заполнителя на оболочку,

$$\begin{gathered} S_x = \Big[\Big(-kr\,\frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} - 4(1 - v_s)kI_n(kr)\Big)A_s + kI_n(kr)B_s\Big]\cos n\varphi\,\cos kx\,\mathrm{e}^{i\omega_1 t_1}, \\ S_\varphi = \Big(-\frac{n}{r}\,I_n(kr)B_s - \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r}\,\gamma_1 r C_s\Big)\sin\varphi\,\cos kx\,\mathrm{e}^{i\omega_1 t_1}, \\ S_r = \Big(-k^3 r I_n(kr)A_s + \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r}\,B_s + \frac{n}{r}\,I_n(kr)C_s\Big)\cos n\varphi\,\sin kx\,\mathrm{e}^{i\omega_1 t_1}; \end{gathered} \tag{10}$$

2) при больших инерционных силах, действующих со стороны заполнителя на оболочку,

$$S_x = \Big(A_s k I_n(\gamma_e r) - \frac{C_s \gamma_t^2}{\partial r}\, I_n(\gamma_1 r)\Big) \cos n\varphi\, \cos kx\ \mathrm{e}^{i\omega_1 t_1},$$

$$S_\varphi = \Big(-\frac{A_s n}{r}\, I_n(\gamma_e r) - \frac{C_s n k}{r\mu}\, I_n(\gamma_1 r) - \frac{B_s}{n}\, \frac{\partial I_n(\gamma_1 r)}{\partial r}\Big) \sin n\varphi\, \sin kx\ \mathrm{e}^{i\omega_1 t_1}, \qquad (11)$$

$$S_r = \Big(A_s \frac{\partial I_n(\gamma_e r)}{\partial r} - \frac{C_s k}{\mu_1}\, \frac{\partial I_n(\gamma_1 r)}{\partial r} + \frac{B_s}{r}\, I_n(\gamma_1 r)\Big) \cos n\varphi\, \sin kx\ \mathrm{e}^{i\omega_1 t_1}\, .$$

В (10), (11) I_n — модифицированная функция Бесселя n-го порядка первого рода; A_s, B_s, C_s — постоянные.

Используя условия на контактной поверхности (6), выражения для перемещений оболочек (9), решение уравнения движения среды (10), (11), выразим постоянные A_s, B_s, C_s через A, B, C. В результате для q_x, q_θ, q_r находим

$$\begin{aligned} q_x &= (\tilde C_{x1} A + \tilde C_{x2} B + \tilde C_{x3} C) \cos n\varphi\, \cos kx\ \mathrm{e}^{i\omega_1 t_1},\\ q_\theta &= (\tilde C_{\theta 1} A + \tilde C_{\theta 2} B + \tilde C_{\theta 3} C) \sin n\varphi\, \sin kx\ \mathrm{e}^{i\omega_1 t_1},\\ q_r &= (\tilde C_{x1} A + \tilde C_{x2} B + \tilde C_{x3} C) \cos n\varphi\, \sin kx\ \mathrm{e}^{i\omega_1 t_1}\, . \end{aligned} \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (3) и интегрируя по ξ и θ, для работы распределенных нагрузок, действующих со стороны заполнителя на оболочку, получаем выражение

$$\begin{aligned} A_0 = -R^2\pi\big[&S_2 \tilde C_{x1} A^2 + (S_2 \tilde C_{x2} + S_1 \tilde C_{\theta 1}) AB + (S_2 \tilde C_{x3} + S_1 \tilde C_{r1}) AC +\\ &+ S_1(\tilde C_{\theta 3} + \tilde C_{r2}) BC + S_1 \tilde C_{\theta 2} B^2 + S_1 \tilde C_{r3} C^2\big], \end{aligned} \qquad (13)$$

где $\tilde C_{ra}$ — постоянная; $S_1 = 1/2 - \sin(2k\xi_1)/(4k)$.

С использованием (1), (2), (13) для полной энергии системы находим полином второго порядка относительно постоянных A, B, C:

$$\begin{aligned} \Pi = {}&(\hat\varphi_{11} - S_2 \hat C_{x1} - \psi_{11}\omega_1^2) A^2 + (\hat\varphi_{22} - S_1 \hat C_{\theta 2} - \psi_{22}\omega_1^2) B^2 +\\ &+ (\hat\varphi_{23} - S_1 \hat C_{r3} - \psi_{33}\omega_1^2 + I_1\sigma_x) C^2 + (\hat\varphi_{44} - S_2 \hat C_{x2} + S_1 \hat C_{\theta 1}) AB +\\ &+ (\hat\varphi_{55} - S_2 \hat C_{x3} + S_1 \hat C_{r1}) AC + S_1(\hat\varphi_{66} + \hat C_{\theta 3} + \hat C_{r2}) BC. \end{aligned}$$

Заметим, что выражения для величин $\hat\varphi_{ii}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, ψ_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, I_i $(i = 1, 2)$ имеют громоздкий вид, поэтому в данной работе не приводятся.

Из условий экстремума полной энергии рассматриваемой системы Π относительно параметров A, B, C получаем систему линейных алгебраических уравнений третьего порядка, нетривиальные решения которых существуют лишь в том случае, если определитель этой системы равен нулю. Приравнивая определители указанных систем к нулю, получаем следующие частотные уравнения:

$$\begin{aligned} &2(\hat\varphi_{11} - S_2 \hat C_{x1} - \psi_{11}\omega_1^2) A + (\hat\varphi_{44} + S_2 \hat C_{x2} + S_1 \hat C_{\theta 1}) B + (\hat\varphi_{55} - S_2 \hat C_{x3} + S_1 \hat C_{r1}) C = 0,\\ &(\hat\varphi_{44} + S_2 \hat C_{x2} + S_1 \hat C_{\theta 1}) A + 2(\hat\varphi_{22} - S_1 \hat C_{\theta 2} - \psi_{22}\omega_1^2) B + (\hat\varphi_{66} + \hat C_{\theta 3} + \hat C_{r2}) C = 0,\\ &(\hat\varphi_{55} + S_2 \hat C_{x3} + S_1 \hat C_{r1}) A + (\hat\varphi_{66} + \hat C_{\theta 3} + \hat C_{r2}) B + 2(\hat\varphi_{33} - S_1 \hat C_{r3} - \psi_{33}\omega_1^2 + I_1\sigma_x) C = 0. \end{aligned} \qquad (14)$$

Нетрудно показать, что в случае 1 система уравнений (14) сводится к кубическому уравнению относительно ω_1^2, в случае 2 — к трансцендентному уравнению. Поскольку далее исследуются только низкие частоты изгибных колебаний, это уравнение в случае 1 можно упростить, отбросив слагаемые с ω_1^4 и ω_1^6. В результате получаем ($\omega_1^2 = \lambda_a$)

$$\lambda_a = \frac{f_3^2 f_4 + f_1 f_5^2 + f_2^2 f_6}{2f_5^2\psi_{11} + f_2^2\psi_{33} - 4f_1 f_4\psi_{33} - 0{,}5f_6(f_1\psi_{22} + f_4\psi_{11})},$$

где

$$f_1 = \hat\varphi_{11} - S_2\hat C_{x1}, \qquad f_2 = \hat\varphi_{44} + S_2\hat C_{x2} + S_1\hat C_{\theta 1}, \qquad f_3 = \hat\varphi_{55} + S_2\hat C_{x1} + S_1\hat C_{r1},$$
$$f_5 = \hat\varphi_{66} + \hat C_{\theta 3} + \hat C_{r2}, \qquad f_6 = \hat\varphi_{33} - S_1\hat C_{r3} + I_1\sigma_x.$$

Аналогично определяется величина λ_b в случае 2.

Анализ результатов расчетов. Ниже приводятся результаты исследования влияния числа ребер и жесткости заполнителя на критическое напряжение осевого сжатия. Расчеты выполнены для оболочки, заполнителя и ребер со следующими параметрами: $E = E_{\text{c}} = E_h = 6{,}67 \cdot 10^9$ Н/м^2, $v = 0{,}3$, $x = 1$, $n = 8$, $h_h = 1{,}39$ мм, $R = 160$ мм, $L_1 = 800$ мм, $F_{\text{c}}/(2\pi Rh) = 0{,}015\,91$, $I_{y\text{c}}/(2\pi R^3 h) = 0{,}8289$, $h = 0{,}45$ мм, $F_x = 5{,}75$ мм^2, $I_{sh} = 19{,}9$ мм^4, $|h_{\text{c}}| = 0{,}013\,75R$, $I_{\text{кр.c}}/(2\pi R^3 h) = 0{,}5305 \cdot 10^{-6}$, $I_{\text{кр}.h} = 0{,}48$ мм^4, $f = 0{,}25$.

На рис. 1 приведена зависимость частоты $\omega = \omega_1\omega_0$ от напряжения осевого сжатия. Видно, что с увеличением напряжения частота колебаний системы уменьшается. Кроме того, при учете трения собственная частота исследуемой системы также уменьшается.

В данной работе варьируемыми параметрами являются относительная толщина оболочки $h^* = h/R$, расстояние между продольными и поперечными ребрами, отнесенное к толщине оболочки, отношение веса всех ребер к весу оболочки φ_1' и отношение веса продольных ребер к весу поперечных ребер φ_2'. При этом предполагается, что радиус и длина оболочки, а также характеристики сечений продольных и поперечных ребер заданы. Заметим, что для прямоугольных сечений необходимо задавать отношения высот продольных

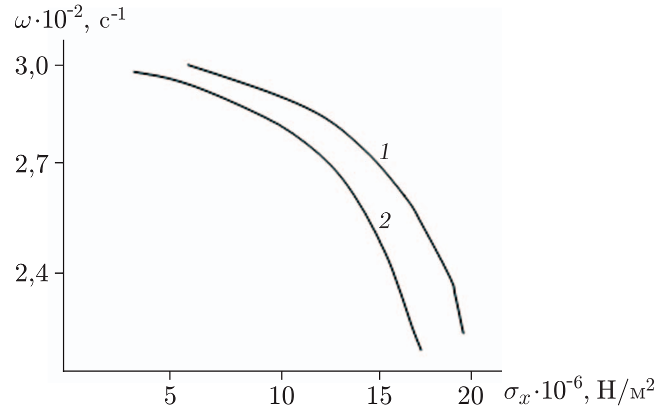

Рис. 1

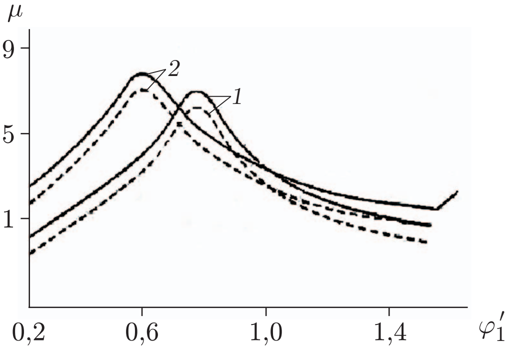

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость частоты колебаний системы ω от сжимающих напряжений ($n = 4$, $k = 12$):
1 — $f = 0$, *2* — $f = 0{,}25$

Рис. 2. Зависимость величины μ от относительных весов ребер:
сплошные линии — колебания подкрепленной оболочки с заполнителем, штриховые — колебания гладкой оболочки с заполнителем; *1* — $\varphi_2' = 0$, *2* — $\varphi_2' = 0{,}4$

и поперечных ребер к их ширине ψ_1 и ψ_2 соответственно. Безразмерные характеристики ребер, входящие в (1), (2), выражаются через следующие параметры:

$$\bar{\gamma}_{\text{c}}^{(1)} = \frac{\varphi_1'\varphi_2'}{1+\varphi_2'}, \qquad \bar{\gamma}_s^{(2)} = \frac{\varphi_1'}{1+\varphi_2'}, \qquad \frac{h_{\text{c}}}{R} = -\frac{h^*}{2}\left(1+\sqrt{a_1\varphi_1\bar{\gamma}_{\text{c}}^{(1)}}\,\right),$$

$$\mu_{s2} = \frac{1-v}{6}\,\frac{a_2}{\psi_2}\,(h^*)^2(\bar{\gamma}_s^{(2)})^2, \qquad \frac{h_{\text{c}}}{R} = -\frac{h^*}{2}\left(1+\left(1+\frac{1}{k}\right)\sqrt{a_1\varphi_1\bar{\gamma}_{\text{c}}^{(1)}}\,\right),$$

$$\eta_{s1}^{(2)} = \bar{\gamma}_{s1}^{(2)}\bar{\gamma}_s^{(2)}\,\frac{a_2\psi_2(h^*)^2}{12},$$

$$\eta_{\text{c}}^{(1)} = \bar{\gamma}_{\text{c}}^{(1)}\left[\frac{a_1}{12}\,\psi_1\bar{\gamma}_{\text{c}}^{(1)}(h^*)^2 + \left(\frac{h_{\text{c}}}{R}\right)^2\right], \qquad \mu_{s1} = \frac{1-v}{6}\,(h^*)^2(\bar{\gamma}_{\text{c}}^{(1)})^2\,\frac{a_1}{\psi_1}.$$

При такой постановке результат исследования практически не зависит от характеристик материала оболочки, поскольку минимальные частоты $\omega_{\min}^2$, как известно, слабо зависят от коэффициента Пуассона v, а их отношение $\mu = \omega_{\min}^2/v$ не зависит от модуля упругости E. Следует отметить, что для улучшения несущей способности оболочки необходимо найти такое сочетание параметров h^*, a_1, a_2, φ_1' и φ_2', при котором μ принимает наибольшее значение.

На рис. 2 представлены зависимости $\mu(\varphi_1')$ при различных значениях φ_2'. Анализ результатов вычислений показывает, что наилучшая несущая способность оболочки достигается при ее усилении только поперечными ребрами ($\varphi_2' = 0$), для которых $\mu_{\max} = 16{,}3$. Абсцисса точки максимума равна 0,5.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амиро И. Я.** Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. Киев: Наук. думка, 1980.
2. **Ильгамов М. А.** Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим заполнителем / М. А. Ильгамов, В. А. Иванов, Б. А. Гулин. М.: Наука, 1977.
3. **Латифов Ф. С.** Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку: Элм, 1999.
4. **Semenov A. A.** Model of deformation stiffened orthotropic shells under dynamic loading // J. Sib. Federal Univ. Math. Phys. 2016. V. 9, N 4. P. 485–497.
5. **Босяков С. М., Чживэй В.** Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 3. С. 24–27.
6. **Латифов Ф. С., Сейфуллаев Ф. А., Алыев Ш. Ш.** Свободные колебания усиленной поперечными ребрами анизотропной цилиндрической оболочки из стеклопластика с текущей в ней жидкостью // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 4. С. 158–162.
7. **Seyfullayev A. I., Novruzova K. A.** Oscillations of longitudinally reinforced orthotropic cylindrical shell filled with a viscous fluid // East.-Europ. J. Enterprise Technol. 2015. N 3/7. P. 29–33.
8. **Мамедов Дж. Н**. Свободные колебания цилиндрических оболочек с заполнителем, усиленных продольными ребрами, при осевом сжатии // Механика и машиностроение. 2007. № 4. С. 7–11.

Поступила в редакцию 6/III 2018 г.,
после доработки — 22/I 2019 г.
Принята к публикации 28/I 2019 г.