

5. Taylor G. The dynamics of thin sheets of fluid. Proc. Roy. Soc. A, 1959, vol. 253, No. 1274.
6. Buchwald E., König H. Dynamische Oberflächenspannung aus Flüssigkeitsglocken. Ann. Phys., 1936, B. 26, H. 7.
7. Williams J., Butler S. F. J., Wood M. N. The Aerodynamics of Jet Flaps. Ministry of Aviation, ARC, R. M., 1963, No. 3304.
8. Mascell E. C., Spence D. A. A theory of the jet flap in three dimension. Proc. Roy. Soc. A, 1959, vol. 251, No. 1266.
9. Pantazopol D., Comănescu Tz. Influence of a jet sheet on a deflection of a plane jet. Rev. roumaine sci. tech., Ser. mech. appl. 1964. vol. 9, No 2.
10. Fraser R. P., Dombrowsky N., Routley J. H. The mechanisms of disintegration of liquid sheets in cross-current air streams. Appl. sci. res., A, 1963, vol. 12.
11. Franzini J. B., Hassan N. A. Hydraulics of thin films flow. J. of Hydraulic Division. Proc. of ASCE, 1964. vol. 90, No. 3816, part 2.
12. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.
13. Струминский В. В. Трехмерный пограничный слой на произвольной поверхности. Докл. АН СССР, 1956, т. 108, № 4.
14. Фиников С. П. Теория поверхностей. Гостехиздат, 1934.
15. Овсянников Л. В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 3.

## ВЛИЯНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ НА КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ И ПРОФИЛЬ СКОРОСТИ ОТКРЫТОГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ

О. Ф. Васильев, В. И. Квон

(Новосибирск)

В последнее время вопрос о гидравлических сопротивлениях и кинематике неустановившихся потоков вызывает все больший интерес.

Одной из первых попыток оценить влияние нестационарности на скоростную структуру потока было исследование В. В. Ведерникова и В. А. Архангельского [1].

Скоростная структура неустановившегося потока подробно изучалась Г. Ф. Федоровым. Им, в частности, установлено [2], что на свободной поверхности поступательная скорость может оказаться меньшей, чем внутри потока. Ниже предлагается объяснение этого факта.

В работе [3] проведено исследование влияния нестационарности на касательное напряжение; при этом были приняты допущения: 1) эпюры скорости равномерного и нестационарного течения сходны, 2) касательные напряжения равномерного и нестационарного течения равны на дне потока.

Здесь эти допущения снимаются и в рамках предположений, сделанных в работе [4], проводится приближенное исследование касательного напряжения и эпюры скорости при неустановившемся движении открытого плоскопараллельного турбулентного потока жидкости.

§ 1. Напряжение трения. Рассматриваются течения открытого плоскопараллельного турбулентного потока жидкости при больших числах Рейнольдса и малой поперечной компоненте ускорения. Тогда имеем уравнения [4]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \left( \frac{\partial h}{\partial x} \cos \vartheta - \sin \vartheta \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

и граничные условия

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v, \quad \tau = 0 \quad \text{при } y = h; \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $t$  — время;  $x, y$  — декартова прямоугольная система координат, ось  $x$  направлена по прямолинейному дну потока;  $u, v$  — компоненты скорости соответственно по осям  $x$  и  $y$ ;  $h$  — глубина;  $\tau$  — напряжение трения;  $\rho$  — плотность;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\vartheta$  — угол наклона дна к горизонту (считается положительным). Для замыкания системы (1.1) необходимы дополнительные соображения, например, соотношения полуэмпирической теории турбулентности, приведенные в [4].

Представим отношение напряжения трения  $\tau$  в какой-нибудь точке потока к напряжению трения на дне потока  $\tau_0$  в виде полинома по степеням  $\eta = y/h$ . Коэффициенты полинома

$$\tau / \tau_0 = b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + \dots + b_n \eta^n \quad (0 \leq \eta \leq 1)$$

можно определить из (1.1) и (1.2). Здесь, как и в [4], ограничимся простейшим однопараметрическим случаем, которому соответствует полином с тремя членами; дальнейшее увеличение числа членов полинома вносит новые параметры нестационарности.

Для определения коэффициентов  $b_0, b_1, b_2$  исходим из условий:

а) на дне при  $\eta = 0$

$$\tau / \tau_0 = 1$$

б) на дне при  $\eta = 0$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho g \left( \frac{\partial h}{\partial x} \cos \vartheta - \sin \vartheta \right), \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\rho g h}{\tau_0} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \cos \vartheta - \sin \vartheta \right) = A$$

в) на свободной поверхности при  $\eta = 1$

$$\tau / \tau_0 = 0$$

Тогда будем иметь

$$\tau / \tau_0 = 1 + A\eta - (1 + A)\eta^2 \quad (0 \leq \eta \leq 1) \quad (1.3)$$

В случае равномерного установившегося движения  $\partial u / \partial t = 0, \partial u / \partial x = 0$ , а из второго уравнения (1.1) имеем  $v = 0$ . Интегрирование первого уравнения (1.1) по  $y$  от 0 до  $h$  дает в этом случае  $A = -1$ .

Таким образом, в случае равномерного установившегося движения  $\tau / \tau_0 = 1 - \eta$ .

Теперь при помощи второго уравнения (1.1) и условий (1.2) проинтегрируем первое уравнение (1.1) по  $y$  от 0 до  $h$ . Тогда имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h u dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u^2 dy = -gh \left( \frac{\partial h}{\partial x} \cos \vartheta - \sin \vartheta \right) - \frac{\tau_0}{\rho}$$

Отсюда, введя среднюю скорость  $w$  и имея в виду  $u = w + \Delta u$ , получим

$$A = -1 + \delta$$

$$\delta = -\frac{1}{u_*^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} wh + \frac{\partial}{\partial x} \alpha_1 w^2 h \right) \quad \left( \alpha_1 = 1 + \frac{1}{w^2 h} \int_0^h \Delta u^2 dy > 1, \quad u_*^2 = \frac{\tau_0}{\rho} \right)$$

Теперь видно, что отклонения параметра  $A$  от значения  $-1$  связаны с нестационарностью течения. Очевидно, при ускоренном движении  $\delta < 0$  или  $A < -1$ .

Рассмотрим (1.3) при некоторых значениях  $x, t$  (параметры). Тогда из (1.3) имеем

$$\tau' = d\tau^\circ / d\eta = A - 2(1 + A)\eta, \quad \tau'' = d^2\tau^\circ / d\eta^2 = -2(1 + A) \quad (\tau^\circ = \tau / \tau_0) \quad (1.4)$$

1.1°. Пусть  $\delta < 0$  (ускоренное течение). При этом, согласно (1.4), получим

$$\tau' = -1 + \delta(1 - 2\eta), \quad \tau'' = -2\delta > 0$$

1) Случай  $-1 < \delta < 0$ . Тогда  $\tau' < 0, \tau'' > 0$ . Следовательно, значение  $\tau^\circ(\eta)$  при возрастании  $\eta$  монотонно убывает, и кривая  $\tau^\circ(\eta)$  своей выпуклостью обращена вниз. Отсюда следует, что  $\tau^\circ(\eta) < \tau_c^\circ(\eta)$  при всех значениях  $\eta$  на интервале  $0 < \eta < 1$ , где  $\tau_c^\circ(\eta)$  есть  $\tau^\circ(\eta)$  при равномерном движении ( $\delta = 0$ ).

2) Случай  $\delta < -1$ . Тогда  $\tau' < 0$  при  $0 \leq \eta < \eta^*$  ( $\eta^* = 1/2(1 - 1/\delta)$ ),  $\tau' > 0$  при  $\eta^* < \eta \leq 1, \tau' = 0$  в точке  $\eta = \eta^*, \tau'' > 0$ , т. е. функция  $\tau^\circ(\eta)$  от значения, равного 1 при  $\eta = 0$ , монотонно убывает и достигает минимума при  $\eta = \eta^*$ , затем возрастает монотонно до 0 при  $\eta = 1$ , и кривая  $\tau^\circ(\eta)$  своей выпуклостью обращена вниз.

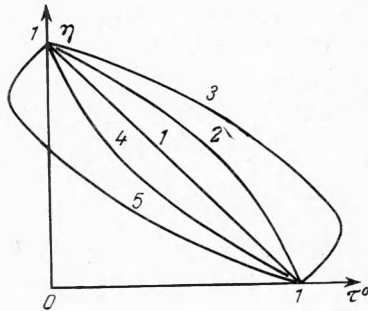
1.2°. Пусть  $\delta > 0$  (замедленное течение). Тогда аналогично можно установить следующее.

1) При  $0 < \delta < 1$  значение  $\tau^\circ(\eta)$  при возрастании  $\eta$  монотонно убывает, и кривая  $\tau^\circ(\eta)$  своей выпуклостью обращена вверх ( $\tau^\circ(\eta) > \tau_c^\circ(\eta)$  при всех значениях  $\eta$  на интервале  $0 < \eta < 1$ ).

2) При  $\delta > 1$  функция  $\tau^\circ(\eta)$  от значения, равного 1 при  $\eta = 0$ , монотонно возрастает и достигает максимума при  $\eta = \eta^*$ , затем монотонно убывает до 0 при  $\eta = 1$ .

Распределение касательного напряжения  $\tau^\circ(\eta)$  дано на фиг. 1, где кривые соответствуют следующим значениям  $\delta$

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \delta < -1 & -1 < \delta < 0, & \delta = 0, & 0 < \delta < 1, & 1 < \delta \end{array}$$



Фиг. 1

§ 2. Профиль скорости. Согласно [4], профиль скорости, соответствующий аппроксимации напряжения трения по (1.3), удовлетворяет уравнению

$$\delta u^\circ / \delta \eta = (1 + A) + 1/\eta \quad (u^\circ = \alpha u / u_*, \quad u_0^\circ = \alpha u_0 / u_*) \quad (2.1)$$

причем в качестве граничного условия примем  $u^\circ = u_0^\circ$  при  $\eta = 1$ . Здесь  $\alpha$  — первая константа турбулентности,  $u_0 = u$  при  $\eta = 1$ .

Отметим, что вблизи дна существенным становится вязкое трение, не учитываемое в формуле (2.1). Поэтому непосредственно на дне она дает не  $u^\circ = 0$ , как должно быть, а  $u^\circ = -\infty$ . Ниже уравнение (2.1) анализируется на интервале  $0 \leq \eta \leq 1$ . Однако результаты анализа, конечно, справедливы только в области значений  $\eta$ , исключая область, непосредственно примыкающую ко дну.

Как и в § 1, рассмотрим (2.1) при фиксированных  $x, t$ . Тогда из (2.1) имеем

$$u^{\circ\prime\prime} = d^2 u^\circ / d\eta^2 = -1/\eta^2 < 0 \quad (2.2)$$

2.1°. Пусть  $\delta < 0$  (ускоренное течение). Тогда, согласно (2.1) и (2.2), получим  $u^{\circ\prime} = du^\circ / d\eta = \delta + 1/\eta$ ,  $u^{\circ\prime\prime} < 0$ . Отсюда легко установить следующее.

1) При  $-1 < \delta < 0$  значение  $u^\circ(\eta)$  при возрастании  $\eta$  монотонно увеличивается, и кривая  $u^\circ(\eta)$  своей выпуклостью направлена вверх.

2) При  $-\infty < \delta < -1$  функция  $u^\circ(\eta)$  при возрастании  $\eta$  монотонно возрастает, достигает максимума в точке  $\eta = -1/\delta$ , затем монотонно убывает.

2.2°. Пусть  $\delta > 0$  (замедленное течение). Тогда  $u^{\circ\prime} > 0$ ,  $u^{\circ\prime\prime} < 0$ . Следовательно, при всех значениях  $\eta$  функция  $u^\circ(\eta)$  при возрастании  $\eta$  монотонно возрастает, и кривая  $u^\circ(\eta)$  своей выпуклостью обращена вверх.

Итак, имеем  $u_{+}^{\circ\prime} < u_c^{\circ\prime} < u_{-}^{\circ\prime}$ ,  $u_{+}^{\circ\prime\prime} = u_c^{\circ\prime\prime} = u_{-}^{\circ\prime\prime} < 0$  для любого  $\eta$ . Здесь индексами  $+$ ,  $c$ ,  $-$  обозначены соответственно ускоренное, равномерное и замедленное течения.

Как и в [4], схематизируя явление, примем  $u(\eta_k) = \beta u_*$ , где  $\eta_k = k/h$ ,  $\beta$  — вторая константа турбулентности,  $k$  — средняя высота влияния выступов шероховатости. Профиль скорости  $u^\circ(\eta)$  при одинаковой глубине представлен на фиг. 2 (обозначения те же, что и на фиг. 1), откуда видно, что, во-первых, только в случае  $|\delta| < 1$  можно говорить о сходстве профилей скорости нестационарного течения и равномерного, во-вторых,  $u_{+}^{\circ} < u_c^{\circ} < u_{-}^{\circ}$  для всех значений  $\eta$  на интервале  $\eta_k < \eta \leq 1$ , в частности:

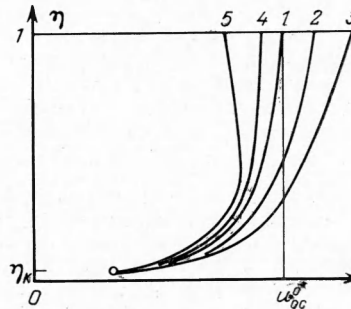
$$u_{0+}^{\circ} < u_{0c}^{\circ} < u_{0-}^{\circ} \quad (2.3)$$

Неравенства (2.3) можно получить непосредственно из выражения для профиля скорости, вытекающего из (2.1). Из (2.3) следует, что

$$u_{0+} / u_{*+} < u_{0c} / u_{*c} < u_{0-} / u_{*-} \quad (2.4)$$

Неравенства (2.4) означают, что при одной и той же продольной скорости на свободной поверхности и одинаковой глубине напряжение трения на дне при ускоренном движении больше, чем при равномерном, а при замедленном меньше, чем при равномерном.

Таким образом, при неустановившемся течении, особенно при  $|\delta| > 1$ , основные характеристики течения могут иметь существенные отличия от характеристик равномерного потока. В частности, при  $|\delta| > 1$  максимальное значение продольной скорости ускоренного движения достигается где-то внутри потока. Возможность смещения максимума скорости внутрь потока при неустановившемся течении показана экспериментом [2].



Фиг. 2

Институт гидродинамики  
СО АН СССР

Поступила 30 VI 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В е д е р н и к о в В. В. Волны попусков реальной жидкости. Сб. «Неустановившееся движение водного потока в открытом русле», Изд-во АН СССР, 1947.
2. Ф е д о р о в Г. Ф. Изучение кинематики волны попуска. Тр. Центр. науч.-исслед. ин-т экономики и эксплуатации водного транспорта, 1960, вып. 19.
3. Е р е м е н к о Е. В. Влияние локального ускорения на касательные напряжения при неустановившемся движении открытого турбулентного потока. Сб. Исследования по прикладной гидродинамике. Киев, «Наукова думка», 1965.
4. В а с и л ь е в О. Ф., К в о н В. И. Влияние нестационарности при движении открытого потока жидкости. ПМТФ, 1966, № 1.