ПМТФ, № 5, 1966

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ ПОТОКОМ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТИ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

А. Т. Онуфриев

(Новосибирск)

В ряде работ [1-4] предложены приближенные модели диффузии, которые могут быть использованы при рассмотрении процесса переноса в разреженном газе, когда длина свободного пробега велика и перенос не определяется локальным градиентом соответствующей величины.

В настоящей работе модель интегральной диффузии [2] применена для решения задачи об определении величин напряжения трения и скорости потока несжимаемого газа около плоской полубесконечной пластинки во всем диапазоне числа Кнудсена. Полученное решение сравнивается с имеющимися в литературе решениями [5-8] и экспериментальными данными [9].

1. Течение разреженного газа при постоянных значениях плотности, скорости звука, длины свободного пробега молекул в пограничном слое у плоской полубесконечной пластины описывается системой уравнений [2]:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{4}{3} \Lambda \frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho c (u - \varphi), \qquad \tau = -\frac{\rho c \Lambda}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

с граничными условиями

$$y = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\varphi}{2} = \frac{2 - \sigma}{\sigma} \frac{\Lambda}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad y - \infty, \quad u = u_0$$

и начальным условием $x = 0;\ u = u_0$

Здесь σ — коэффициент диффузного отражения.

Вводятся безразмерные переменные

$$u' = \frac{u}{u_0}, \quad v' = \frac{v}{u_0 \beta}, \quad x' = \beta \frac{3x}{2\Lambda}, \quad y' = \frac{3y}{2\Lambda}$$

$$\varphi' = \frac{\varphi}{u_0}, \quad \beta = \frac{1}{M} \left(\frac{2}{\pi \gamma}\right)^{1/2} = \frac{3\mu}{2\Lambda \rho u_0}$$

Система уравнений принимает вид

$$u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y'^2} = \varphi' - u', \qquad \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$y' = 0, \quad v' = 0, \quad \varphi' = A \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} \quad \left(A = \frac{2 - \sigma}{\sigma}\right), \quad y' = \infty, \quad u' = 1,$$

и начальным условием

$$x' = 0, \qquad u' = 1$$

Величина напряжения трения на стенке определяется выражением

$$\tau(0, x') = -\frac{\rho c u_0}{2}\frac{\partial\varphi'}{\partial y'} = \frac{\rho c}{2A}\varphi(0, x')$$

или

$$c_f M = \frac{2\sigma}{2-\sigma}\left(\frac{2}{\pi\gamma}\right)^{1/2}\varphi'(0, x'), \quad x' = \beta\frac{3x}{2\Lambda} = \frac{2}{\pi\gamma}\frac{R}{M^2} = z^2$$

Здесь γ — отношение удельных теплоемкостей, R — число Рейнольдса, при этом

$$\frac{2}{\pi\gamma} = 0.383, \quad \frac{R^{1/2}}{Mz} = 1.61 \quad \text{при } \gamma = \frac{5}{3}$$

$$\frac{2}{\pi\gamma} = 0.456, \quad \frac{R^{1/2}}{Mz} = 1.48 \quad \text{при } \gamma = \frac{7}{5}$$

Из системы уравнений, исключив величину φ', можно получить уравнение для величины скорости газа u'

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} - \left(\int_0^{y'}\frac{\partial u'}{\partial x'}dy'\right)\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial u'}{\partial x'}\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} +$$
$$+ u'\frac{\partial^3 u'}{\partial x'\partial y'^2} - \frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial^2 u'}{\partial x'\partial y'} - \left(\int_0^{y'}\frac{\partial u'}{\partial x'}dy'\right)\frac{\partial^3 u'}{\partial y'^3} \tag{1.2}$$

с граничными условиями

$$y' = 0, \quad u' + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} = A\left[\frac{\partial u'}{\partial y'} + u'\frac{\partial^2 u'}{\partial x'\partial y'}\right], \quad y' = \infty, \quad u' = 1$$

и начальным условием

$$x' = 0, \qquad u' = 1$$

2. Уравнение для u' решалось методом конечных разностей в переменных z и $\zeta = ln\,(y' + \Delta)$. После введения переменной ζ оно имеет вид

$$u'\left[\frac{\partial u'}{\partial x}\right] - \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta}\left|\frac{\partial u'}{\partial x'}\right| e^{\zeta}d\zeta\right)e^{-\zeta}\frac{\partial u'}{\partial\zeta} = \left[\frac{\partial u'}{\partial x'}\right]e^{-2\zeta}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial u'}{\partial\zeta}\right) + e^{-2\zeta}\left[\frac{\partial^2 u'}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial u'}{\partial\zeta}\right] +$$
$$+ u'e^{-2\zeta}\left[\frac{\partial^3 u'}{\partial x'\partial\zeta^2} - \frac{\partial^2 u'}{\partial x'\partial\zeta}\right] - e^{-2\zeta}\frac{\partial u'}{\partial\zeta}\left[\frac{\partial^2 u'}{\partial\zeta\,\partial x'}\right] - e^{-3\zeta}\left(\frac{\partial^3 u'}{\partial\zeta^3} - 3\frac{\partial^2 u'}{\partial\zeta^2} + 2\frac{\partial u'}{\partial\zeta}\right)\int_{\zeta_0}^{\zeta}\left[\frac{\partial u'}{\partial x'}\right]e^{\zeta}d\zeta$$

с граничными условиями

$$\zeta_0 = \ln\Delta, \quad u' + u'\frac{\partial u'}{\partial x'} = Ae^{-\zeta}\left[\frac{\partial u'}{\partial\zeta} + u'\frac{\partial^2 u'}{\partial x'\partial\zeta}\right]$$

$$\zeta = \infty; \qquad x' = 0, \qquad u' = 1$$

Справа стоят слагаемые, разности для которых записывались с учетом $(n + 1)$-го слоя (n — номер узла вдоль x'); нужно учесть, что одна из характеристик системы (1.1) в начальном сечении направлена горизонтально. При записи разностного уравнения использована схема, примененная в работе [10].

Величина напряжения трения определяется методом прогонки из уравнения

$$\partial^2\varphi' \,/\, \partial y'^2 = \varphi' - u'$$

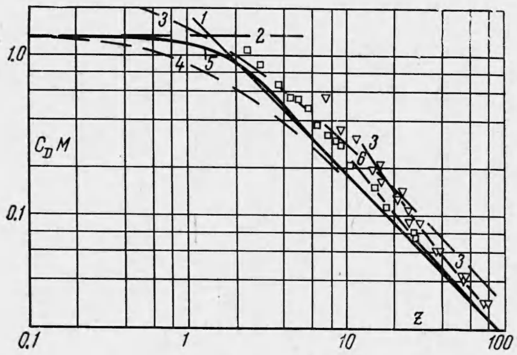
с граничными условиями

$$y' = 0, \quad \varphi' = A\frac{\partial\varphi'}{\partial y'}; \qquad y' = \infty, \quad \varphi' = 1.$$

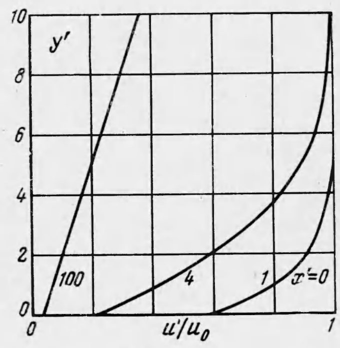
3. Рассмотрим результаты расчетов. Величины интервалов были $\Delta\zeta = 0.05$ и 0.07; $\Delta z = 0.02$ и 0.01. Сравнение просчетов с разными шагами показало, что погрешность при $x' = 1$ была $\sim 0.3\%$.

	$\sigma = 0.1$		$\sigma = 0.8$	
z	$u'(0, z)$	$\varphi'(0, z)$	$u'(0, z)$	$\varphi'(0, z)$
0	1.0	0.5	1.0	0.6
0.1	0.996	0.499		
0.2	0.983	0.496		
0.3	0.959	0.490		
0.4	0.928	0.481		
0.6	0.836	0.457		
0.8	0.719	0.424		
1.0	0.590	0.383	0.675	0.489
2.0	0.216	0.202	0.316	0.295
3	0.128	0.125	0.194	0.190
4	0.0904	0.0898	0.138	0.137
6	0.0576	0.0575	0.0872	0.0870
8	0.0424	0.0424	0.0640	0.0640
10	0.0337	0.0337	0.0507	0.0507
20	0.0166	0.0166	0.0249	0.0249
30	0.0111	0.0111	0.0166	0.0166

В таблице приведены результаты для величин $u'(0, z)$ и $\varphi'(0, z)$ в зависимости от z при $\sigma = 1$ и $\sigma = 0.8$.

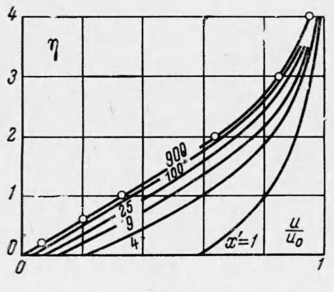


Фиг. 1



Фиг. 2

В работе [6] приводится сравнение результатов различных расчетов с экспериментальными данными работы [9]. Это сравнение воспроизведено на фиг. 1, где приводятся также результаты настоящей работы. Величина



Фиг. 3

$$C_D M = \frac{2}{x'} \int_0^{x'} C_f M \, dx' =$$

$$= 4 \left(\frac{2}{\pi\gamma}\right)^{1/2} \frac{\sigma}{2-\sigma} \frac{1}{x} \int_0^{x'} \varphi'(0, x') \, dx'$$

Для свободно-молекулярного течения ($x' = 0$)

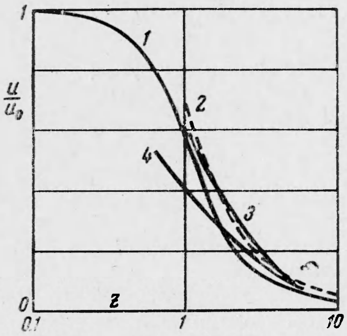
$$C_{D_1} M = 2\sigma \sqrt{2/\pi\gamma}$$

$\varphi(0, 0) = 0.5$, $C_{D_1} M = 1.35$ при $\sigma = 1.0$

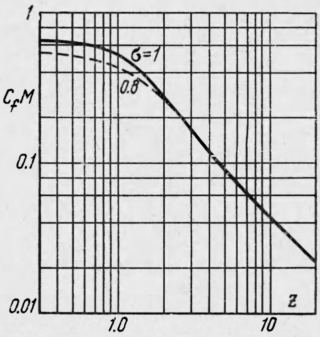
$\varphi(0, 0) = 0.6$, $C_{D_1} M = 1.08$ при $\sigma = 0.8$

На фиг. 1: кривая *1* — решение Блазиуса для несжимаемого пограничного слоя; *2* — теория свободно-молекулярного течения; *3* — теория течения со скольжением в приближении Рэлея [5]; *4* — результаты расчетов по приближенному методу работы [6]; *5* — результаты расчетов по методу интегральной диффузии; *6* — зависимость после введения поправки [7] на конечную длину пластинки при $M = 0.60$ и *7* — то же при $M = 0.18$. Экспериментальные данные [9]: треугольники для $0.16 < M < 0.21$, квадратики для $0.46 < M < 0.72$.

На фиг. 2 и 3 показано получившееся распределение скорости в поперечном сечении пограничного слоя на различных расстояниях от переднего края пластинки, на фиг. 4 — распределение скорости вдоль пластинки. На фиг. 4: кривая *1* — расчет



Фиг. 4



Фиг. 5

по методу интегральной диффузии при $\sigma = 1$; *2* — то же при $\sigma = 0.8$; *3* — метод интегральной диффузии в приближении Рэлея [2]; *4* — теория течения со скольжением в приближении Рэлея.

На фиг. 5 приведено распределение величин $C_f M$ вдоль пластинки для значений $\sigma = 1.0$ и 0.8.

Можно отметить, что полученные результаты находятся в согласии с результатами работы [8], в которой получено, что при $0.001 < M / R^{1/2} < 0.1$ величина напряжения трения с точностью до членов третьего порядка малости совпадает с решением Блазиуса.

Поступила 18 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимирязев А. К. Об упрощенном способе нахождения приближенных решений интегрального уравнения в теории внутреннего трения разреженных газов. Ж. эксперим. и теор. физ., 1934, т. 4, № 5.
2. Онуфриев А. Т. Модель неравновесных процессов в некоторых задачах механики сплошных сред. ПМТФ, 1963, № 1.
3. Eckert E. R. G. Similarities between Energy Transport in Rarefied Gases and by Thermal Radiation; Modern Developments in Heat Transfer (ed. Ibele W.), 1963, Ac. Press; New York, London.
4. Goulard R. A Milne-Eddington Model in Heat and Mass Transfer, International Symposium on Fundamental Phenomena in Hypersonic Flow, New York, 1964.
5. Паттерсон Г. Н. Молекулярное течение газов, Физматгиз, 1960.
6. Сухнев В. А. Расчет сопротивления трения плоской пластины под нулевым углом атаки в области между континуумом и свободно молекулярным потоком. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 3.
7. Kuo Y. H. On the flow of an incompressible viscous fluid past a flat plate at moderate Reynolds numbers. J. Math. and Phys., 1953, vol. 32, No 2—3.
8. Шидловский В. П. Об учете скольжения при обтекании полубесконечной плоской пластины потоком вязкого газа. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 9.
9. Shaaf S. A., Sherman F. S. Skin Friction in Slip Flow. J. Aeronaut. Sci., 1954, vol. 21, No. 2. (русск. перев.: Шааф С., Шерман Ф. Поверхностное трение в области течения со скольжением. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1955, № 1).
10. Глушко Г. С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине с несжимаемой жидкостью. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.