Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 4

ДВУХСЛОЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

УДК 532.5

Л. Г. Гузевский

Институт теплофизики СО РАН, 630090 Новосибирск

Большой теоретический и практический интерес представляет класс задач гидродинамики и аэродинамики со свободными поверхностями при наличии внутренних поверхностей разрыва скорости.

В задачах о соударении струй, пневмоники, взаимодействия потоков с различными скоростными напорами приходится иметь дело с течениями с внутренними поверхностями разрыва. В частности, к этому классу задач относится и задача о внутренних волнах в двухслойной жидкости.

Для плоского потока существует ряд методов решения задач с разными константами Бернулли как в линейной [1, 2], так и в нелинейной [3–9] постановке. Значительное число публикаций в этом направлении посвящено задачам о внутренних волнах.

В данной работе обобщается предложенный в [10–12] эффективный метод расчета в точной нелинейной постановке плоских и осесимметричных течений идеальной жидкости со свободными поверхностями на случай наличия в потоке поверхностей разрыва постоянной Бернулли.

Изложение метода решения и его апробация осуществляются на примере расчета задачи о потенциальном течении двухслойной жидкости над неровным дном в классе решений солитонного типа, которая в частном случае ровного дна была предметом исследований ряда авторов.

Предлагаемый метод позволяет получить численное решение задачи для неровностей дна произвольного вида, в то время как наиболее эффективный метод расчета такого рода течений [9] применим лишь для частного случая неровности дна в форме кругового полуцилиндра.

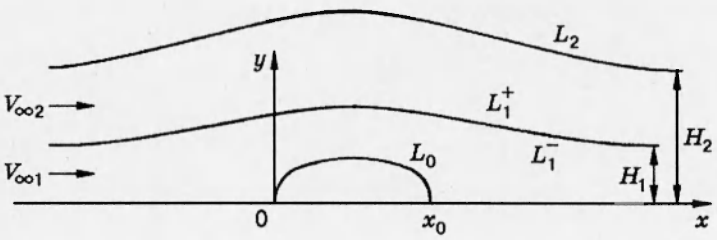
Проверка точности предложенного метода осуществляется путем сопоставления численного и точного решений некоторой модельной задачи.

Рассмотрим плоскую задачу об установившемся потенциальном обтекании препятствия, расположенного на горизонтальном прямолинейном дне, двухслойным потоком идеальной весомой жидкости. Параметры, отвечающие нижнему слою, будем отмечать индексом 1, а верхнему — индексом 2. Схематично течение показано на рисунке.

Для формы свободной границы и линии раздела отыскиваются решения солитонного типа, симметричные относительно вертикальной оси $x = x_0/2$ (x_0 — длина препятствия). Скорость течения вдоль внутренней границы раздела обозначим через V_1^+ и V_1^- при подходе к этой границе сверху и снизу соответственно.

Условие непрерывности давления при переходе через границу раздела, согласно уравнению Бернулли, приводит к следующему соотношению для скоростей по разным ее сторонам:

$$\left(\frac{V_1^-}{V_{\infty 1}}\right)^2 = 1 - \frac{\rho_2 V_{\infty 2}^2}{\rho_1 V_{\infty 1}^2}\left[1 - \left(\frac{V_1^+}{V_{\infty 2}}\right)^2\right] - \frac{2}{\mathrm{Fr}_1^2}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\left(\frac{y}{H_1} - 1\right). \qquad (1)$$



Здесь ρ_1, ρ_2 — плотности жидкости; $\mathrm{Fr}_1 = V_{\infty 1}/\sqrt{gH_1}$ — число Фруда нижнего слоя; g — ускорение свободного падения; H_1 — ордината границы раздела на бесконечности.

Условие постоянства давления вдоль свободной поверхности эквивалентно закону распределения скорости вдоль нее

$$\frac{V_2^2}{V_{\infty 2}^2} = 1 - \frac{2}{\mathrm{Fr}_2^2}\left(\frac{y}{H_2} - 1\right) \tag{2}$$

($\mathrm{Fr}_2 = V_{\infty 2}/\sqrt{gH_2}$, H_2 — ордината свободной поверхности на бесконечности).

Условие (2) является частным случаем условия (1), если положить плотность жидкости над свободной поверхностью равной нулю.

Функцию тока плоского безвихревого потока идеальной жидкости в произвольной точке $z = x + iy$ области течения можно представить в виде

$$2\pi\Psi(z) = \int\limits_{L_0} V_0(s)R(z,\zeta)dl(s) - \int\limits_{L_1^-} V_1^-(s)R(z,\zeta)dl(s) -$$

$$- \int\limits_{L_1^+} V_1^+(s)R(z,\zeta)dl(s) - \int\limits_{L_2} V_2(s)R(z,\zeta)dl(s), \tag{3}$$

где $(L_0,\, V_0)$, $(L_1^-,\, V_1^-)$, $(L_1^+,\, V_1^+)$, $(L_2,\, V_2)$ — граничные поверхности и скорости вдоль них; функция $R(z,\zeta)$ выражается через расстояния $r_1 = |z - \bar{\zeta}|$ и $r_2 = |z - \zeta|$ между точками z, $\zeta = x(s) - iy(s)$ и z, ζ по формуле $R(z,\zeta) = \ln(r_2/r_1)$.

При предельном переходе в выражении (3) точки наблюдения на границу $z \to z_0 = x(t) + iy(t)$ выполнение условия непротекания, которое эквивалентно условию постоянства значений функции тока на каждой из соответствующих границ L_0, L_1^+, L_1^- и L_2, приводит к системе четырех интегральных уравнений для определения искомых функций $V_0(s)$, $V_1^+(s)$, $Y_1^+(s)$, $Y_2(s)$, описывающих в параметрическом виде распределение скоростей течения вдоль препятствия и внешней (по отношению к дну) линии раздела жидкостей, формы границы раздела и свободной поверхности.

При решении задачи используется условие симметрии течения относительно вертикали $x = x_0/2$.

Вдоль заданного участка границы L_0 вводится переменная интегрирования $0 \leqslant s \leqslant 1$, связанная с длиной дуги посредством соотношения

$$l = l(1)s^{1-\alpha},$$

где $l(1)$ — полная длина дуги симметричной части; $\alpha\pi$ — угол между осью x и касательной к препятствию в точке остановки.

Для $\alpha = 1/2$ удобно ввести переменную интегрирования s по формуле

$$x(s) = \frac{x_0}{2}\left(1 - \cos\frac{s\pi}{2}\right), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Вид зависимости $y(s)$ на этом участке границы определяется уравнением поверхности препятствия $y = F(x)$. В частном случае препятствия в форме полуэллипса с удлинением λ получим

$$y(s) = \frac{x_0}{2\lambda}\sin\frac{s\pi}{2}.$$

Введем функцию V_* по формуле

$$V_*(s) = V_0(s)\,\frac{dl}{ds}.$$

С учетом закона распределения скорости течения в окрестности точки остановки $V_0 \approx cl^{\alpha/(1-\alpha)}$ получим, что при малых s как сама функция

$$V_*(s) = V_0(s)\,\frac{dl}{ds} \approx c_1 l^{\alpha/(1-\alpha)} s^{-\alpha},$$

так и ее производные являются ограниченными функциями.

Таким образом, выбранная замена переменной интегрирования позволяет избавиться от особого поведения подынтегральной функции в (3) в точке остановки при интегрировании вдоль L_0.

При численном решении задачи на достаточно больших расстояниях от обтекаемого тела вверх по течению при $x \leqslant X_к$ и вниз при $x \geqslant x_0 + X_к$ поток предполагается равномерным, соответственно чему граница раздела и свободная граница на этих участках, простирающихся в бесконечность, считаются прямолинейными.

Принятые предположения позволяют вычислить в аналитическом виде интегралы вдоль полубесконечных прямолинейных участков границ L_1^-, L_1^+ и L_2 в аналитическом виде. На остальных симметричных частях участков границ положим

$$x(s) = \frac{x_0}{2}s - X_к(1 - s), \quad 0 < s < 1.$$

При совпадении точек z и $\zeta(s = t)$ подынтегральная функция в (3) имеет логарифмическую особенность. Интегралы с логарифмической особенностью вычисляются с использованием замены переменной $u^r = |t - s|$, целое число r выбирается исходя из требуемой гладкости подынтегральной функции для новой переменной (в расчетах положено $r = 5$).

Зависимость $V_*(s)$ отыскивается как функция переменной u, связанной с переменной интегрирования s зависимостью $u = \sin(s\pi/2)$. Данная замена обеспечивает близость функции $V_*(u)$ к линейной для кругового полуцилиндра. Линейной данная зависимость будет для этой формы препятствия при течении однослойной жидкости бесконечной глубины.

Выполнение условий непротекания вдоль граничных линий тока и линии раздела из представления функции тока в форме (3) приводит к системе интегральных уравнений для нахождения функций, определяющих распределение скорости течения вдоль заданной границы (профиля дна) и линии раздела, а также функций, описывающих формы искомых границ — линии разрыва постоянной Бернулли и свободной границы.

В варианте задачи с «крышкой», когда форма внешней границы задана, в число искомых функций включается распределение скорости вдоль внешней границы.

H_2/H_1	a/H_1	ρ_2/ρ_1	Fr_1	Fr_1 [15]
3,216	0,459	0,8	0,418	0,419
3,216	0,2	0,05	1,051	1,052
3,15	0,3	0,8	0,406	0,408
2	0,2	0,3	0,758	0,761
1,5	0,2	0,05	0,972	0,975

Полученная таким способом система четырех интегральных уравнений решается методом сплайновой коллокации. Искомые зависимости находятся в виде сплайн-функции третьего порядка. Вдоль каждой границы вводится система узловых точек. Условия выполнения интегральных уравнений в узлах интерполяции приводят к замкнутой системе трансцендентных уравнений относительно значений искомых функций в этих точках, которая решается численно методом, обобщающим метод Стеффенсена нахождения корня функции одного переменного на многомерный случай [13]. Такого рода алгоритм численного решения был ранее применен к расчету ряда задач со свободными поверхностями [10–12, 14].

Проверка точности численного метода осуществлялась при расчете данным способом следующей модельной (тестовой) задачи. Пусть препятствие имеет форму полуцилиндра единичного радиуса. «Свободную» границу будем определять вместо краевого условия (2) по закону изменения скорости течения

$$\frac{V_2^2}{V_{\infty 2}^2} = \left(1 - \frac{1}{\rho^2} + \frac{2y^2}{\rho^4}\right)^2 + \frac{4y^2(1-x)^2}{\rho^8}, \quad \rho^2 = (1-x)^2 + y^2.$$

Внутреннюю «границу раздела» будем находить по краевому условию (1) при $\rho_2 = \rho_1$ и $V_{\infty 2} = V_{\infty 1}$.

Аналитическое решение данной вспомогательной задачи легко получается из известного точного решения задачи о бесциркулярном потенциальном обтекании кругового цилиндра. В частности, формы «свободной» границы и «линии раздела» задаются соотношениями

$$H_i - y(1 - \rho^{-2}) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Даже при небольшом числе узловых точек точность метода достаточно высокая. В качестве примера приведем результаты сопоставления численного и точного решений для $H_1 = 1$, $H_2 = 2$. В этом случае в точном решении $Y_{1\max} = 1{,}618$ и $Y_{2\max} = 2{,}414$, а в численном решении при четырех узлах на каждой из симметричных частей границы $Y_{1\max} = 1{,}618$ и $Y_{2\max} = 2{,}415$.

В таблице приводятся результаты численного решения задачи о течении двухслойной жидкости под прямолинейной крышкой над ровным дном, которые сопоставляются с соответствующими данными приближенного решения [15], полученного во втором приближении теории мелкой воды.

Расчеты этой задачи были проведены в варианте заданной величины a — амплитуды волны. При этом число Фруда Fr_1 было искомым параметром.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Павловец Г. А.** Некоторые простейшие аналитические решения для плоских струйных течений с различными константами Бернулли // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 7. С. 3–25.
2. **Киселев О. М.** О движении многослойной жидкости // Тр. семинара по краевым задачам. 1970. Вып. 7. С. 135–141.
3. **Кистович А. В., Чашечкин Ю. Д.** Генерация, распространение и нелинейное взаимодействие внутренних волн // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. 1990. № 24. С. 77–114.
4. **Шурыгин В. М.** Аэродинамика тел со струями. М.: Машиностроение, 1977.
5. **Маклаков Д. В.** Об одной задаче взаимодействия потоков с разными константами Бернулли // Тр. семинара по краевым задачам. 1982. Вып. 19. С. 159–170.
6. **Кузьмин С. В.** Обтекание источника неограниченным потоком жидкости при различных числах Бернулли // Уч. зап. ЦАГИ. 1984. Т. 15, № 4. С. 103–110.
7. **Мальцев Л. И.** Пристенная струя идеальной жидкости в спутном потоке // Термогидрогазодинамика турбулентных течений. Новосибирск, 1986. С. 17–27.
8. **Хабахпашев Г. А.** Моделирование распространения внутренних волн в двухслойном океане // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. Т. 26, № 1. С. 72–82.
9. **Forbes L. K.** Two-layer critical flow over a semi-circular obstruction // J. Eng. Math. 1989. V. 23. P. 325–342.
10. **Гузевский Л. Г.** Влияние стенок на плоские и осесимметричные кавитационные течения // Пристенные течения со свободными поверхностями. Новосибирск, 1980. С. 5–17.
11. **Гузевский Л. Г.** Осесимметричное кавитационное обтекание тел вращения струей жидкости // Гидродинамика и акустика пристенных и свободных течений. Новосибирск, 1981. С. 37–46.
12. **Гузевский Л. Г.** Обтекание препятствий потоком тяжелой жидкости конечной глубины // Динамика сплошной среды с границами раздела. Чебоксары, 1982. С. 61–69.
13. **Маергойз М. Д.** Об одном методе решения систем алгебраических и трансцендентных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 4. С. 869–874.
14. **Guzevsky L. G.** Calculation of axially symmetric cavity flows // Russian J. Eng. Thermophysics. 1992. N 2. P. 193–212.
15. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 13/VI 1995 г.