ПМТФ, №3, 1962

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

А. П. Кузнецов, Л. М. Куршин

(Новосибирск)

В работах [1,2] для стержней и пластинок была предложена постановка задачи устойчивости в условиях ползучести, основанная на анализе ускорений возмущенных движений. В этой постановке состояние стержня или пластинки считается неустойчивым, если приложенное в данный момент времени возмущение в виде начального прогиба вызывает увеличение скорости роста прогибов. Ниже эта постановка распространяется на круговые цилиндрические оболочки.

§ 1. Уравнения возмущенных движений круговой цилиндрической оболочки в условиях ползучести. Для решения вопроса об устойчивости оболочки в условиях ползучести исследуем возмущенные движения от воздействия на оболочку в разные моменты времени возмущений в виде начального прогиба. В отличие от пластинки при этом придется принять во внимание и начальные смещения в срединной поверхности.

Пусть уравнение состояния при ползучести имеет вид

$$\dot{p}_i = g(p_i, \sigma_i)\,\sigma_i \tag{1.1}$$

Между составляющими тензора скоростей деформаций ползучести $\dot{p}_{ij}$ и составляющими девиатора напряжений σ_{ij}^* имеют место соотношения теории течения

$$\dot{p}_{ij} = \tfrac{3}{2}\, g(p_i, \sigma_i)\,\sigma_{ij}^* \qquad \left(p_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2G}\sigma_{ij}^*\right)$$
$$\sigma_i^2 = \tfrac{3}{2}\,\sigma_{ij}^*\sigma_{ij}^*, \qquad \dot{p}_i^2 = \tfrac{2}{3}\,\dot{p}_{ij}\dot{p}_{ij}, \qquad p_i = \int_0^t \dot{p}_i\,dt \tag{1.2}$$

где p_i — интенсивность деформаций ползучести, σ_i — интенсивность напряжений, ε_{ij} — составляющие тензора деформаций.

Полагая, что при малых прогибах напряжения и деформации мало меняются по толщине оболочки, линеаризуем уравнения (1.1) и (1.2)

$$\delta\dot{p}_i = a\,\delta p_i + g(b+1)\,\delta\sigma_i \tag{1.3}$$

$$\delta\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2G}\,\delta\dot{\sigma}_{ij}^* = \tfrac{3}{2}\,g\,\delta\sigma_{ij}^* + \tfrac{3}{2}\,\alpha_{ij}^*(a\,\delta p_i + g b\,\delta\sigma_i)$$
$$a = a(\sigma_i, p_i) = \sigma_i\frac{\partial g}{\partial p_i}, \qquad b = b(\sigma_i, p_i) = \frac{\sigma_i}{g}\frac{\partial g}{\partial \sigma_i}, \qquad \alpha_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}^*}{\sigma_i} \tag{1.4}$$

Будем считать, что напряжения в оболочке до потери устойчивости равномерно распределены по толщине и не меняются во времени.

Пусть в момент времени t^*, при котором $p_i = p_i^*$, на оболочку подействовало возмущение в виде начального прогиба. Переходя, как и в работе [2], в уравнениях (1.3) и (1.4) при помощи (1.1) к переменной p_i, а затем интегрируя их с учетом начального условия

$$\delta p_{ij} = 0 \qquad \text{при } p_i = p_i^* \tag{1.5}$$

получим для $\delta\sigma_{ij}^*$ при $t \geqslant t^*$ выражение

$$\delta\sigma_{ij}^* = \tfrac{2}{3} E e^{\xi^* - \xi} \delta\varepsilon_{ij}^* + \tfrac{2}{3} E e^{-\xi} \int_{p^*}^{p} e^{\xi} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial p} dp - \tag{1.6}$$

$$- \alpha_{ij}^* E e^{-\xi} \int_{p^*}^{p} e^{\xi} \left[\frac{a}{\sigma_i} \int_{p^*}^{p} \frac{1+b}{g} \delta\sigma_i \, dp + b \delta\sigma_i \right] \frac{dp}{\sigma_i}$$

где

$$\xi = \frac{E p_i}{\sigma_i}, \qquad \xi^* = \frac{E p_i^*}{\sigma_i}, \qquad p = p_i, \qquad p^* = p_i^*$$

$$\delta\varepsilon_{ij}^* = \delta\varepsilon_{ij} \quad \text{при } p_i = p_i^*, \qquad w^* = w \quad \text{при } p_i = p_i^*$$

Для деформаций оболочки при возмущенном движении с учетом начальных возмущений будем использовать выражения

$$\delta\varepsilon_{11} = u_x - u_x^\circ - z\,(w_{xx} - w_{xx}^\circ)$$

$$\delta\varepsilon_{22} = v_y - v_y^\circ + \frac{w - w^\circ}{R} - z\left(w_{yy} - w_{yy}^\circ + \frac{w - w^\circ}{R^2}\right) \tag{1.7}$$

$$\delta\varepsilon_{12} = \tfrac{1}{2}(u_y - u_y^\circ + v_x - v_x^\circ) - z\,(w_{xy} - w_{xy}^\circ)$$

Здесь x, y — гауссовы координаты срединной поверхности оболочки, ось z направлена от центра кривизны; u°, v°, w° — возмущения; R — радиус оболочки. Запишем выражения моментов в оболочке и выражения дополнительных усилий в срединной поверхности оболочки, связанных с ее искривлениями при вынужденных движениях

$$G_1 = \int_{-h}^{h} (2\delta\sigma_{11}^* + \delta\sigma_{22}^*)\, z dz, \quad G_2 = \ldots \quad H = \ldots \tag{1.8}$$

$$N_1 = \int_{-h}^{h} (2\delta\sigma_{11}^* + \delta\sigma_{22}^*)\, dz, \quad N_2 = \ldots \quad N_{12} = \ldots \tag{1.9}$$

Вводя выражения для напряжений (1.6) и деформаций (1.7) в выражения (1.8) и (1.9), получим

$$G_1 = -\frac{D}{2} e^{\xi^* - \xi} \left[2(w_{xx}^\circ - w_{xx}^*) + (w_{yy}^* - w_{yy}^\circ) + \frac{1}{R^2}(w^* - w^\circ) \right] -$$

$$- e^{-\xi} \int_{p^*}^{p} e^{\xi} \left[\frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left(2w_{xx} + w_{yy} + \frac{w}{R^2} \right) + \alpha_{11} E S(M_i) \right] dp \tag{1.10}$$

. . . .

$$N_1 = \tfrac{2}{3} B e^{\xi^* - \xi} \left[2(u_x^* - u_x^\circ) + v_y - v_y^\circ + \frac{w^* - w^\circ}{R} \right] +$$

$$+ \tfrac{2}{3} B e^{-\xi} \int_{p^*}^{p} e^{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(2u_x + v_y + \frac{w}{R} \right) - \frac{3}{4h} \alpha_{11} S(N_i) \right] dp \tag{1.11}$$

. . . .

Здесь

$$D = \tfrac{8}{9} E h^3, \quad B = 2Eh, \quad \alpha_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i}, \quad S(M_i) = \frac{a}{\sigma_i^2} \int_{p^*}^{p} \frac{1+b}{g} M_i dp + \frac{b}{\sigma_i} M_i \tag{1.12}$$

$$M_i = \int_{-h}^{h} \delta\sigma_i z\, dz = \left(\alpha_{11} - \tfrac{1}{2}\alpha_{22}\right) G_1 + \left(\alpha_{22} - \tfrac{1}{2}\alpha_{11}\right) G_2 + 3\alpha_{12} H \tag{1.13}$$

$$N_i = \int_{-h}^{h} \delta\sigma_i\, dz = \left(\alpha_{11} - \tfrac{1}{2}\alpha_{22}\right) N_1 + \left(\alpha_{22} - \tfrac{1}{2}\alpha_{11}\right) N_2 + 3\alpha_{12} N_{12} \tag{1.14}$$

Составим уравнения движения элемента оболочки без учета инерционных членов

$$N_{1x} + N_{12y} = 0, \qquad N_{2y} + N_{12x} = 0$$

$$G_{1xx} + G_{2yy} + 2H_{xy} - \frac{N_2}{R} + N_1{}^\circ w_{xx} + N_2{}^\circ\left(w_{yy} + \frac{w}{R^2}\right) + 2\overset{\circ}{N}_{12} w_{xy} = 0 \qquad (1.15)$$

Здесь $N_1{}^\circ$, $N_2{}^\circ$, $\overset{\circ}{N}_{12}$ — усилия в оболочке до воздействия возмущения. Введем функцию напряжений Φ, полагая

$$N_1 = \Phi_{yy}, \qquad N_2 = \Phi_{xx}, \qquad N_{12} = -\Phi_{xy} \qquad (1.16)$$

Применяя операторы

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad -3\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$$

соответственно к первому, второму и третьему уравнениям (1.11) и складывая их, выразив N_i через Φ, получим уравнение (1.17)

$$\Delta\Delta\,\Phi = \frac{B}{R}e^{\xi^*-\xi}(w_{xx}^* - \overset{\circ}{w}_{xx}) + \frac{B}{R}e^{-\xi}\int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi}\frac{\partial w_{xx}}{\partial p}dp - Ee^{-\xi}\int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi}S(\Lambda_1\Lambda_1\Phi)\,dp$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Lambda_1 = \alpha_{11}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \alpha_{22}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - 3\alpha_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \qquad (1.18)$$

Третье уравнение (1.15) с учетом выражений (1.10) и (1.16) дает

$$-De^{\xi^*-\xi}\left[\Delta\Delta(w^* - w^\circ) + \frac{1}{R^2}(w_{yy}^* - \overset{\circ}{w}_{yy}) + \frac{1}{2R^2}(w_{xx}^* - \overset{\circ}{w}_{xx})\right] -$$

$$-\frac{1}{R}\Phi_{xx} + N_1{}^\circ w_{xx} + N_2{}^\circ\left(w_{yy} + \frac{w}{R^2}\right) + 2\overset{\circ}{N}_{12} w_{xy} -$$

$$-e^{-\xi}\int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi}\left\{D\left[\Delta\Delta\frac{\partial w}{\partial p} + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial w_{yy}}{\partial p} + \frac{1}{2}\frac{\partial w_{xx}}{\partial p}\right)\right] + ES(\Lambda M_1)\right\}dp = 0 \qquad (1.19)$$

где

$$\Lambda = \alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \alpha_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (1.20)$$

Умножая уравнения (1.10) на $(\alpha_{11} - \alpha_{22}/2)$, $(\alpha_{22} - \alpha_{11}/2)$, $3\alpha_{12}$ соответственно, складывая их и учитывая (1.13), будем иметь уравнение

$$M_i + \frac{D}{4}e^{\xi^*-\xi}\left(\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\right)(w^* - w^\circ) + \qquad (1.21)$$

$$+ e^{-\xi}\int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi}\left[\frac{D}{4}\left(\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\right)\frac{\partial w}{\partial p} + ES(M_i)\right]dp = 0$$

Применяя оператор Λ к уравнению (1.21) и складывая с (1.19) найдем уравнение для ΛM_i. Исключая при помощи этого уравнения M_i из (1.19), получим уравнение

$$-e^{\xi^*-\xi}\left[\Delta\Delta(w^* - w^\circ) + \frac{1}{R^2}\Delta(w^* - w^\circ) - \frac{1}{2R^2}(w_{xx}^* - \overset{\circ}{w}_{xx})\right] +$$

$$+\frac{2h\sigma_i}{D}\left(\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\right)w - \frac{1}{DR}\Phi_{xx} - e^{-\xi}\int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi}\left[\Delta\Delta\frac{\partial w}{\partial p} + \frac{1}{R^2}\Delta\frac{\partial w}{\partial p} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2R^2}\frac{\partial w_{xx}}{\partial p} + \frac{bE}{\sigma^i}T + \frac{Ea}{\sigma_i^2}\int\limits_{p^*}^{p}\frac{1+b}{g}T\,dp\right]dp = 0 \qquad (1.22)$$

Здесь

$$T = T(p) = e^{\xi^*-\xi}\left[\triangle\triangle(w^* - w^\circ) + \frac{1}{R^2}\triangle(w^* - w^\circ) - \frac{1}{2R^2}(w^*_{xx} - w^\circ_{xx})\right] -$$

$$-\frac{3}{4}e^{\xi^*-\xi}\left(\Lambda\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\Lambda\right)(w^* - w^\circ) - \frac{2h\sigma_i}{D}\left(\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\right)w + \frac{1}{DR}\Phi_{xx} +$$

$$+ e^{-\xi}\int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi}\left[\triangle\triangle\frac{\partial w}{\partial p} + \frac{1}{R^2}\triangle\frac{\partial w}{\partial p} - \frac{1}{2R^2}\frac{\partial w_{xx}}{\partial p} - \frac{3}{4}\left(\Lambda\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\Lambda\right)\frac{\partial w}{\partial p}\right]dp$$

Окончательно имеем, таким образом, два уравнения (1.17) и (1.22), которым удовлетворяют при возмущенном движении функции w и Φ, если на невозмущенную оболочку в момент времени, при котором $p_i = p_i^*$, подействует некоторое возмущение в виде малого начального прогиба w°.

§ 2. Уравнения устойчивости круговых цилиндрических оболочек в условиях ползучести. Для исследования оболочек будем рассматривать возмущенные движения, удовлетворяющие уравнениям (1.17) и (1.22). Невозмущенное состояние при $p_i = p_i^*$ будем считать устойчивым, если скорость возмущенного движения, начинающегося от воздействия возмущения при $p_i = p_i^*$, в начальный момент убывает, а неустойчивым, если скорость возрастает. Граница устойчивости определяется условием

$$\ddot{w} = 0 \qquad \text{при } p_i = p_i^* \tag{2.1}$$

Рассмотрим случай, когда уравнение состояния имеет вид

$$\dot{p}_i = A\sigma_i^n p_i^{-\alpha}$$

Переходя в уравнениях (1.21), (1.26) к переменной $\xi = Ep_i/\sigma_i$, запишем уравнения возмущенных движений в виде

$$\triangle\triangle\Phi = \frac{B}{R}e^{\xi^*-\xi}(w^*_{xx} - w^\circ_{xx}) + \frac{B}{R}e^{-\xi}\int\limits_{\xi^*}^{\xi} e^{\xi}\frac{\partial w_{xx}}{\partial \xi}d\xi - \sigma_i e^{-\xi}\int\limits_{\xi^*}^{\xi} e^{\xi}S(\Lambda_1\Lambda_1\Phi)\,d\xi \tag{2.2}$$

$$-e^{\xi^*-\xi}\left[\triangle\triangle(w^* - w^\circ) + \frac{1}{R^2}\triangle(w^* - w^\circ) - \frac{1}{2R^2}(w^*_{xx} - w^\circ_{xx})\right] +$$

$$+\frac{2h\sigma_i}{D}\left(\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\right)w - \frac{1}{DR}\Phi_{xx} + e^{-\xi}\int\limits_{\xi^*}^{\xi} e^{\xi}\left[-\triangle\triangle\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{1}{R^2}\triangle\frac{\partial w}{\partial \xi} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2R^2}\frac{\partial w_{xx}}{\partial \xi} - (n-1)T + \alpha n \xi^{-\alpha-1}\int\limits_{\xi^*}^{\xi}\xi^{\alpha}T\,d\xi\right]d\xi = 0 \tag{2.3}$$

Здесь

$$T = e^{\xi^*-\xi}\left[\triangle\triangle(w^* - w^\circ) + \frac{1}{R^2}\triangle(w^* - w^\circ) - \frac{1}{2R^2}(w^*_{xx} - w^\circ_{xx})\right] -$$

$$-\frac{3}{4}e^{\xi^*-\xi}\left(\Lambda\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\Lambda\right)(w^* - w^\circ) - \frac{2h\sigma_i}{D}\left(\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}w\right) + \frac{1}{DR}\Phi_{xx} +$$

$$+ e^{-\xi}\int\limits_{\xi^*}^{\xi} e^{\xi}\left[\triangle\triangle\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{R^2}\triangle\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{1}{2R^2}\frac{\partial w_{xx}}{\partial \xi} - \frac{3}{4}\left(\Lambda\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\right)\frac{\partial w}{\partial \xi}\right]d\xi$$

$$S(\Lambda_1\Lambda_1\Phi) = -\frac{\alpha n}{\sigma_i}\xi^{-\alpha-1}\int\limits_{\xi^*}^{\xi}\xi^{\alpha}\Lambda\Lambda\Phi\,d\xi + \frac{n-1}{\sigma_i}\Lambda_1\Lambda_1\Phi$$

Для определения критической деформации из уравнений (2.2) и (2.3) необходимо определить вынужденные движения и найти далее значение p_i, при котором выполняется условие (2.1). Возникающие при этом математические трудности можно обойти, если,как предлагалось в работе [2], ограничиться рассмотрением уравнений, определяющих скорости и ускорения в начальный момент возмущенного движения. Чтобы получить эти уравнения, нужно дважды последовательно продифференцировать уравнения (2.2) и (2.3). В полученных таким образом уравнениях и в уравнениях (2.2) и (2.3) следует принять $\xi = \xi^*$. В итоге получим систему из шести уравнений для шести неизвестных функций, определяющих все необходимые элементы (смещения, усилия, их скорости и ускорения) в момент начала возмущенного движения.

Обозначим через $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$, $w_3(x, y)$ значение w и его первой и второй производных по ξ в момент, когда $p_i = p_i^*$, а через $\Phi_1(x,y)$, $\Phi_2(x, y)$, $\Phi_3(x, y)$ значение Φ и его производных по ξ в тот же момент.

Система уравнений запишется в виде

$$\triangle\triangle\Phi_1 - \frac{B}{R}(w_{1xx} - w^{\circ}_{xx}) = 0 \tag{2.4}$$

$$\triangle\triangle(\Phi_2 + \Phi_1) - \frac{B}{R} w_{2xx} + (n-1)\Lambda_1\Lambda_1\Phi_1 = 0$$

$$\triangle\triangle(\Phi_3 + \Phi_2) - \frac{B}{R} w_{3xx} - \frac{\alpha n}{\xi^*}\Lambda_1\Lambda_1\Phi_1 + (n-1)\Lambda_1\Lambda_1\Phi_2 = 0$$

$$-\left[\triangle\triangle(w_1 - w^{\circ}) + \frac{1}{R^2}\triangle(w_1 - w^{\circ}) - \frac{1}{2R^2}(w_{1xx} - w^{\circ}_{xx})\right] + \\ + \frac{2h\sigma_i}{D}\left(\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\right)w_1 - \frac{1}{DR}\Phi_{1xx} = 0$$

$$-\triangle\triangle(w_1 - w^{\circ}) - \frac{1}{R^2}\triangle(w_1 - w^{\circ}) + \frac{1}{2R^2}(w_{1xx} - w^{\circ}_{xx}) - \\ - \frac{2h\sigma_i}{D}\left(\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\right)w_2 + \frac{1}{DR}\Phi_{2xx} + \triangle\triangle w_2 + \frac{1}{R^2}\triangle w_2 - \\ - \frac{1}{2R^2}w_{2xx} - \frac{3}{4}(n-1)\left(\Lambda\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\Lambda\right)(w_1 - w^{\circ}) = 0$$

$$(n-1)\left[\triangle\triangle(w_1 - w^{\circ}) + \frac{1}{R^2}\triangle(w_1 - w^{\circ}) - \frac{1}{2R^2}(w_{1xx} - w^{\circ}_{xx})\right] + \\ + \frac{2h\sigma_i}{D}\left(\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\right)(w_3 + nw_2) - \frac{1}{DR}(\Phi_{3xx} + n\Phi_{2xx}) - \\ - \triangle\triangle[(n-1)w_2 + w_3] + \frac{1}{R^2}\triangle[(n-1)w_2 + w_3] + \frac{1}{2R^2}[(n-1)w_{2xx} + w_{3xx}] - \\ - \frac{3}{4}\left(n - 1 + \frac{\alpha n}{\xi^*}\right)\left(\Lambda\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\Lambda\right)(w_1 - w^{\circ}) - \frac{3}{4}(n-1)\left(\Lambda\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\Lambda\right)w_2 = 0$$

Для определения критической деформации к этим уравнениям следует присоединить условие (2.1), которое с учетом вышеприведенных обозначений запишется в виде

$$w_3 - \frac{\alpha}{\xi^*} w_2 = 0 \tag{2.5}$$

При этом, вообще говоря, для разных точек оболочки получится своя граница устойчивости. В частном случае, когда переменные в уравнениях (2.2), (2.3) разделяются, т. е. $w(\xi, x, y) = f(\xi)\cdot F(x, y)$, имеем $w_3(x, y) = Cw_2(x, y)$, и граница устойчивости будет общей для всей оболочки. Уравнения (2.4) совместно с (2.5) можно назвать уравнениями устойчивости оболочки в условиях ползучести.

§ 3. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при продольном сжатии. Имеем в этом случае

$$\sigma_{11} = -\sigma, \qquad \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \qquad \sigma_i = \sigma, \qquad \alpha_{11} = -1, \qquad \alpha_{22} = \alpha_{12} = 0$$

Рассмотрим сначала симметричный случай потери устойчивости. Решение системы (2.4) разыскиваем в виде

$$w_i = \tau_i \sin\frac{\pi x}{l}, \qquad \Phi_i = \rho_i \frac{B}{R}\frac{l^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}, \qquad w^{\circ} = \tau^{\circ}\sin\frac{\pi x}{l} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3.1}$$

Операторы Λ (1.20) и Λ_1 (1.18) примут вид

$$\Lambda = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \Lambda_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{3.2}$$

Вводя (3.1) и (3.2) в уравнения (2.5), получим систему

$$\rho_1 + (\tau_1 - \tau^\circ) = 0, \qquad \rho_1 + \rho_2 + \tau_2 + \frac{n-1}{4}\rho_1 = 0$$

$$\rho_2 + \rho_3 + \tau_3 + \frac{n-1}{4}\rho_2 - \frac{\alpha n}{4\xi^*}\rho_1 = 0$$

$$-(\tau_1 - \tau^\circ)(1 - a^2) + 2\tau_1 \frac{\sigma l^2}{\sigma_* l_*^2} + \rho_1 \frac{l^4}{l_*^4} = 0 \tag{3.3}$$

$$-(\tau_1 - \tau^\circ)(1 - a^2) - 2\tau_2 \frac{\sigma l^2}{\sigma_* l_*^2} - \rho_2 \frac{l^4}{l_*^4} + \tau_2 (1 - a^2) - \frac{3(n-1)}{4}(\tau_1 - \tau^\circ) = 0$$

$$(\tau_1 - \tau^\circ)(n-1)(1-a^2) + 2(\tau_3 + n\tau_2)\frac{\sigma l^2}{\sigma_* l_*^2} + (\rho_3 + n\rho_2)\frac{l^4}{l_*^4} -$$

$$- \tau_2 (n-1)(1-a^2) - \tau_3 (1 - a^2) - \frac{3}{4}\left(n - 1 + \frac{\alpha n}{\xi_*}\right)(\tau_1 - \tau^\circ) + \frac{3(n-1)}{4}\tau_2 = 0$$

$$a^2 = \frac{l^2}{2\pi^2 R^2}, \qquad l_*^2 = \frac{2\pi^2 h R}{3}, \qquad \sigma_* = \frac{4Eh}{3R}$$

Присоединяя к (3.3) условие (2.5), которое примет вид

$$\tau_3 - \tau_2 \alpha / \xi^* = 0 \tag{3.4}$$

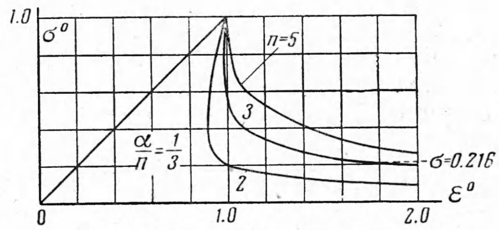
получим систему из семи однородных уравнений для семи постоянных τ°, τ_i, ρ_i $(i = 1, 2, 3)$. Равенство нулю определителя системы дает уравнение для определения критической безразмерной деформации ползучести.

Рассмотрим предварительно упругую задачу устойчивости сжатой оболочки при симметричной деформации. Уравнения устойчивости имеют вид

$$\Delta\Delta\,\Phi = \frac{B}{R} w_{xx} \tag{3.5}$$

$$-\Delta\Delta\, w - \frac{1}{R^2}\Delta w + \frac{1}{2R^2} w_{xx} + \frac{2h}{D}\sigma_{ie}\left(\Lambda + \frac{\alpha_{22}}{R^2}\right) w - \frac{1}{DR}\Phi_{xx} = 0$$

Разыскивая w для симметричного случая потери устойчивости при продольном сжатии в виде $w = \sin(\pi x / l_e)$, найдем из (3.5)



Фиг. 1

$$\frac{2\sigma_e}{\sigma_* l_*^2} = \frac{l_e^2}{l_*^4} + \frac{1}{l_e^2} - \frac{1}{2\pi^2 R^2}$$

Из условия минимума определяем

$$l_e^2 = l_*^2, \quad \sigma_e = \sigma_*(2 - h / 6R) \tag{3.6}$$

Обычно в выражении (3.6) для σ_e второй член в скобке не учитывается. При этом, как правило, соответствующие упрощения вводятся сразу в выражение для кривизны, и тогда в последнем уравнении (3.5) отсутствуют второй и третий члены. Эти упрощения справедливы при достаточно малой длине полуволны, что действительно имеет место при упругой потере устойчивости, как это следует из первого равенства (3.6). При этом $a^2 = h / 3R \ll 1$.

Иначе обстоит дело с потерей устойчивости в условиях ползучести. Здесь, вообще говоря, возможно, что величина a^2 не мала по сравнению с единицей. Тем не менее можно предположить, что в некоторой области достаточно больших σ, мало отличающихся от σ_e, где волнообразование, по-видимому, мало отличается от упругого, неравенство $a^2 \ll 1$ имеет место. Тогда можно упростить уравнения (3.3), однако для полученного решения нужно проверить выполнение этого неравенства.

Воспользовавшись неравенством $a^2 \leqslant 1$ и вводя обозначения

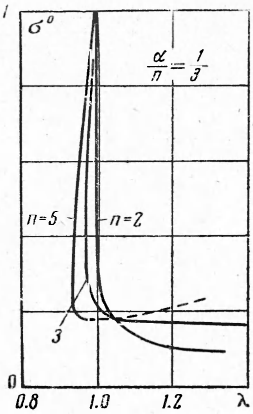
$$\sigma^\circ = \sigma / \sigma_e = \sigma / \sigma_*, \qquad \varepsilon^\circ = \varepsilon / \varepsilon_e = 3R\varepsilon / 4h, \qquad \lambda^2 = l^2 / l_e^2 = l^2 / l_*^2 \tag{3.7}$$

после раскрытия определителя системы (3.3) получим с учетом выражения $\xi = (\varepsilon^\circ - \sigma^\circ) / \sigma^\circ$ уравнение

$$\varepsilon^\circ = \sigma^\circ + 4\frac{\alpha}{n}\sigma^\circ \frac{(1 - 2\lambda^2\sigma^\circ + \lambda^4)\,[\lambda^4(2n^2 + 3n) + (n + 6n^2)]}{[(n+3)\lambda^4 + (1 + 3n)]^2 - (1 - 2\lambda^2\sigma^\circ + \lambda^4)\,[\lambda^4(n+3)^2 + 4(1 + 3n^2)]} \tag{3.8}$$

При заданных σ° значения λ в (3.8) определяются из условия минимума ε°.

На фиг. 1 построены минимальные значения ε° в зависимости от σ° для $\alpha / n = 1/3$ при $n = 2, 3, 5$. При тех же значениях α / n и n на фиг. 2 построены значения λ, при которых ε° достигает минимума. Из фиг. 2 видно, что для $0.2 < \sigma^\circ \leqslant 1$ величина λ близка к единице, т. е. сделанное ранее предположение о том, что длина волны при потере устойчивости в условиях ползучести близка к длине волны в упругом случае, оказывается справедливым.



Фиг. 2

Рассмотрим общий случай потери устойчивости круговой цилиндрической оболочки при продольном сжатии.

Решение системы (2.4) разыскиваем в виде

$$w^\circ = \tau^\circ \sin\frac{\pi}{l}x \sin\frac{my}{R}, \quad w_i = \tau_i \sin\frac{\pi}{l}x \sin\frac{my}{R} \tag{3.9}$$

$$\Phi_i\left(\frac{\pi^4}{l^4} + \frac{\pi^2}{l^2}\frac{m^2}{R^2} + \frac{m^4}{R^4}\right) = \rho_i \frac{B}{R} \sin\frac{\pi}{l}x \sin\frac{my}{R}$$

$$(i = 1, 2, 3; \ m = 0, 2, 3, 4, \ldots)$$

Операторы Λ и Λ_1 примут вид

$$\Lambda = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \Lambda_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{3.10}$$

Предполагая, что в интересующей нас области напряжений волнообразование близко к упругому, опустим члены $\Delta w / R^2 + w_{xx} / 2R^2$. Подставляя в уравнения (2.4) выражения (3.9) и (3.10), получим шесть уравнений, которые совместно с условием (3.4) образуют систему семи однородных уравнений. Равенство нулю определителя системы даст значение безразмерного параметра ε° в момент потери устойчивости

$$\varepsilon^\circ = \sigma^\circ + \frac{\alpha}{n}\sigma^\circ \frac{[\chi + (2n - 1)z]\,(\chi - 2\sigma^\circ)}{[\chi + (n-1)z]^2 - [\chi + (n^2 - 1)z - (n-1)^2\varphi^2(1 - \varphi^2)/\varphi^2]\,[\chi - 2\sigma^\circ]} \tag{3.11}$$

Здесь

$$z = \frac{1}{3}\psi^2(1 + \varphi^2) + \frac{\varphi^2}{\psi^2}, \qquad \chi = \psi^2 + \frac{1}{\psi^2}$$

$$\varphi^2 = \frac{(1 - 2pq)}{4(1 + pq)^2}, \qquad \psi^2 = \frac{(1 + pq)^2}{p}, \qquad p = \lambda^2, \qquad q = \frac{2}{3}\frac{m^2h}{R}$$

Формулой (3.11) определяется значение критической деформации ε° в зависимости от $\sigma^\circ (0 < \sigma^\circ < 1)$. Численный расчет для $\alpha / n = 1/3$, $n = 3$ при $0.3 < \sigma^\circ \leqslant 1$ показывает, что наименьшее значение критической деформации ε° достигается при $\varphi = 1/2$, что соответствует симметричному случаю потери устойчивости.

Поступила 28 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Куршин Л. М. Устойчивость стержней в условиях ползучести. ПМТФ, 1961, № 6.
2. Куршин Л. М. Устойчивость пластинок в условиях ползучести. ПМТФ, 1962, № 1.