ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА В ПЛОСКОМ СЛУЧАЕ

В. В. Пухначев

(Новосибирск)

1. Ниже проводится анализ семейства частных решений уравнений плоского движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

инвариантных относительно некоторых групп преобразований. Здесь u, v — компоненты скорости, p — давление жидкости; не нарушая общности, можно считать, что кинематический коэффициент вязкости $\nu = 1$ и плотность жидкости $\rho = 1$. Работу можно рассматривать как пример применения общего метода к отысканию всех инвариантных решений систем типа (1).

Естественно, что многие из указанных здесь решений системы (1) были получены ранее другими авторами.

2. Для нахождения инфинитезимальных операторов основной группы систем типа (1) существует известная методика, приводящая к решению определяющих уравнений для координат этих операторов [1]. Вычисления по этой методике приводят к результату: алгебра Ли основной группы системы (1) порождается линейно независимыми операторами:

$$X_1=2t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-u\frac{\partial}{\partial u}-v\frac{\partial}{\partial v}-2p\frac{\partial}{\partial p}$$

$$X_2=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}-v\frac{\partial}{\partial u}+u\frac{\partial}{\partial v}, \qquad X_3=\frac{\partial}{\partial t} \qquad (2)$$

$$X_4=t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5=\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_6=t\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}, \quad X_7=\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_8=\frac{\partial}{\partial p}$$

Этим операторам соответствуют конечные преобразования, сохраняющие систему (1):

(X_1) (*растяжение*)

$$t'=a_1^2 t, \qquad x'=a_1 x, \qquad y'=a_1 y$$

$$u'=\frac{1}{a_1}u, \qquad v'=\frac{1}{a_1}v, \qquad p'=\frac{1}{a_1^2}p$$

(X_2) (*поворот на одинаковый угол в плоскости течения и в плоскости годографа*)

$$t' = t, \quad x' = x\cos a_2 - y\sin a_2, \quad y' = x\sin a_2 + y\cos a_2$$
$$u' = u\cos a_2 - v\sin a_2, \quad v' = u\sin a_2 + v\cos a_2, \quad p' = p$$

(X_3) (*изменение начала отсчета времени*)

$$t' = t + a_3, \quad x'_1 = x, \quad y' = y, \quad u' = u, \quad v' = v, \quad p' = p$$

(X_4) (*галилеев перенос по оси x*)

$$t' = t, \quad x' = x + a_4 t, \quad y' = y, \quad u' = u + a_4, \quad v' = v, \quad p' = p$$

(X_5) (*перенос по оси x*)

$$t' = t, \quad x' = x + a_5, \quad y' = y, \quad u' = u, \quad v' = v, \quad p' = p$$

(X_6) (*галилеев перенос по оси y*)

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y + a_6 t, \quad u' = u, \quad v' = v + a_6, \quad p' = p$$

(X_7) (*перенос по оси y*)

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y + a_7, \quad u' = u, \quad v' = v, \quad p' = p$$

(X_8) (*прибавление к давлению постоянного слагаемого*)

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad u' = u, \quad v' = v, \quad p' = p + a_8$$

3. Знание основной группы (2) системы (1) дает возможность находить все инвариантные решения системы (1). Всякому инвариантному решению соответствует некоторая подгруппа. Классификация инвариантных решений по признаку: два решения не считаются существенно различными, если они переводятся одно в другое каким-либо преобразованием основной группы, приводит к задаче построения оптимальной системы подгрупп данного порядка [2].

Вычисления показывают, что для группы (2) оптимальная система однопараметрических подгрупп может быть выбрана, например, так (имеются в виду подгруппы, порожденные указанными операторами):

1.	$X_1 + \alpha X_2$	6.	$X_3 + X_8$	
2.	X_2	7.	$X_3 + X_4 + \beta X_8$	
3.	$X_2 + X_8$	8.	$X_4 + kX_7$	(3)
4.	$X_2 + X_3 + \beta X_8$	9.	$X_7 + \beta X_8$	
5.	X_3	10.	X_8	

(α, β, k — произвольные постоянные)

Оптимальная система вещественных двухпараметрических подгрупп группы (2) состоит из следующих подгрупп:

(4)

1.	X_1, X_2	14.	$X_3 + X_4, X_8$
2.	X_1, X_3	15.	$X_3 + X_4 + \beta X_8, X_5 + \gamma X_7 + \delta X_8$
3.	$\alpha X_1 - X_2, X_3$	16.	$X_3 + X_4 + \beta X_8, X_7 + \delta X_8$
4.	X_2, X_8	17.	$X_4 + \gamma X_7 + \beta X_8, X_6 + kX_5 + lX_7 + \delta X_8$
5.	X_1, X_5	18.	$X_4 + \gamma X_7 + \beta X_8, X_5 + lX_7 + \delta X_8$
6.	$X_1 + \alpha X_2, X_8$	19.	$X_4 + \gamma X_7 + \beta X_8, X_7 + \delta X_8$
7.	X_1, X_4	20.	$X_4 + \gamma X_7, X_8$
8.	$X_2, X_3 + X_8$	21.	$X_7 + \beta X_8, X_3 + X_4 + lX_6 + \delta X_8$
9.	$X_2 + X_8, X_3 + \beta X_8$	22.	$X_7 + \beta X_8, X_3 + X_6 + \delta X_8$
10.	$X_2 + X_3, X_8$	23.	$X_7 + \beta X_8, X_4 + lX_6 + \delta X_8$
11.	$X_3, X_5 + \beta X_8$	24.	$X_7 + \beta X_8, X_6$
12.	X_3, X_8	25.	$X_7 + \beta X_8, X_6 + X_8$
13.	$X_3 + X_8, X_3 + \gamma X_5$	26.	X_7, X_8

(α, β, γ, δ, k, l—произольные постоянные)

4. Переходим к построению решений системы (1), инвариантных относительно двухпараметрических подгрупп, взятых из системы (4).

Рассмотрим подгруппу, порожденную операторами X_1, X_2. Будем обозначать ее символом $H \langle X_1, X_2 \rangle$.

Для построения решения, инвариантного относительно данной подгруппы, надо найти полный набор функционально независимых инвариантов этой подгруппы.

В данном случае это будут

$$J_1 = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}}, \qquad J_2 = ux + vy, \qquad J_3 = uy - vx, \qquad J_4 = pt$$

Перейдем от искомых функций u, v, p к новым J_2, J_3, J_4. Это можно сделать, так как

$$\frac{\partial (J_2, J_3, J_4)}{\partial (u, v, p)} = t(x^2+y^2) \neq 0 \qquad \text{при } t \neq 0,\ x^2+y^2 \neq 0$$

Инвариантное решение будет иметь следующий вид:

$$u = \frac{1}{x^2+y^2}[xJ_2(\xi) + yJ_3(\xi)], \qquad p = \frac{1}{t}J_4(\xi) \qquad (5)$$
$$v = \frac{1}{x^2+y^2}[yJ_2(\xi) - xJ_3(\xi)],$$

где [1]

$$\xi = J_1 = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{t}}$$

Подставив эти выражения для u, v, p в систему (1), получим некоторую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с J_2, J_3, J_4 в качестве искомых функций.

Эта система приводится к виду, в котором x, y, t по отдельности в коэффициенты не входят, а входят лишь в виде функций от инварианта $J_1 = \xi$, что достигается переходом к полярным координатам по формулам

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$
$$u_r = u\cos\varphi + v\sin\varphi, \qquad u_\varphi = -u\sin\varphi + v\cos\varphi \qquad (6)$$

в которых соотношения (5) примут вид

$$u_r = \frac{1}{r}J_2(\xi), \quad u_\varphi = -\frac{1}{r}J_3(\xi), \quad p = \frac{1}{t}J_4(\xi) \qquad (7)$$

Функции J_2, J_3, J_4 удовлетворяют системе уравнений:

$$\xi^3\frac{dJ_4}{d\xi} = J_2^2 + J_3^2, \qquad \frac{d^2J_3}{d\xi^2} + \left(\frac{\xi}{2} - \frac{J_2+1}{\xi}\right)\frac{dJ_3}{d\xi} = 0, \qquad \frac{dJ_2}{d\xi} = 0 \qquad (8)$$

Полученная система вообще обозначается символом S/H, где S — система (1), а $H = H \langle X_1, X_2 \rangle$.

Решая систему S / H, получаем

$$J_2 = C_1, \qquad J_3 = C_2 \int_a^\xi e^{-\frac{1}{4}z^2} z^{C_1+1}\, dz + C_3$$

$$J_4 = \int_a^\xi \frac{J_3^2(z)\, dz}{z^3} - \frac{C_1^2}{2\xi^2} + C_4$$

Подставив эти выражения в (7), будем иметь следующее H-решение системы (1):

$$u_r = \frac{C_1}{r}, \qquad u_\varphi = -\frac{1}{r}\left(C_2 \int\limits_a^{r/\sqrt{t}} e^{-{}^1/_4 z^2} z^{C_1+1} dz + C_3\right) \tag{9}$$

$$p = \frac{1}{t} \int\limits_a^{r/\sqrt{t}} \frac{J_3^2(z)\, dz}{z^3} - \frac{C_1^2}{2r^2} + \frac{C_4}{t}$$

(Здесь и далее C_1, C_2, C_3, C_4— произвольные постоянные.)

В случае $C_3 = C_4 = 0$ решение (9) описывает течение, в котором в начале координат помещен источник с интенсивностью $2\pi C_1$, а в момент $t = 0$ в точке $r = 0$ существовал вихрь с циркуляцией $2\pi C_2$, который со временем будет диффундировать. Линии тока напоминают спирали, деформирующиеся со временем. В случае $C_1 = 0$ квадратуру для u_φ можно выполнить; в результате получим классическую диффузию вихря [3].

$$u_r = 0, \qquad u_\varphi = \frac{C_2}{r}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right)\right] \tag{10}$$

Аналогично строятся другие инвариантные решения. В качестве примера приведем некоторые из них, могущие представить интерес.

Так, например, H-решение системы уравнений (1) относительно подгруппы $H = H\langle X_1, X_3\rangle$, имеет вид

$$u_2 = \frac{f(\varphi)}{r}, \qquad u_\varphi = \frac{C_1}{r}, \qquad p = \frac{2f + C_2}{r^2} \tag{11}$$

причем функция $f(\varphi)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 f}{d\varphi^2} - C_1 \frac{df}{d\varphi} + f^2 + 4f + C_1^2 + 2C_2 = 0 \tag{12}$$

Если $C_1 = 0$, то уравнение (12) интегрируется в квадратурах

$$\varphi = \int\limits_a^f \frac{d\zeta}{\sqrt{-{}^2/_3\zeta^3 - 4\zeta^2 - 4C_2\zeta - 2C_3}} \tag{13}$$

Это решение описывает течение в диффузоре, полученное Гамелем [3].

В случае $C_1 \neq 0$ уравнение (12) проинтегрировать в квадратурах не удалось. Решение в случае $C_1 \neq 0$ соответствует течению в диффузоре с пористыми стенками, через одну из которых жидкость вдувается, а через другую отсасывается с нормальной скоростью $C_1 r^{-1}$. Случай $C_1 \neq 0$ был рассмотрен Г. А. Тирским.

Решение относительно подгруппы $H\langle \alpha X_1 - X_2, X_3\rangle$ имеет вид:

$$u_r = \frac{1}{r}\left[C_1 - \alpha\left(C_2 \xi^{\chi(\alpha)} + C_3\right)\right] \qquad \left(\chi(\alpha) = \frac{\alpha^2 + \alpha + 2 + C_1}{\alpha + 1}\right)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{r}\left(C_2 \xi^{\chi(\alpha)} + C_3\right) \tag{14}$$

$$p = \frac{1}{r^2}\left\{\xi^2 \int\limits_C^\xi \langle [C_1 - (\alpha^2 + 1)] f'(\zeta) + \zeta(1 + \alpha) f''(\zeta) - \zeta [f^2(\zeta) + g^2(\zeta)]\rangle \frac{d\zeta}{\zeta^2}\right\}$$

где

$$f(\xi) = u_r r, \qquad g(\xi) = u_\varphi r, \qquad \xi = re^{\alpha\varphi}$$

Если $C_1 = 0$, то на спирали

$$re^{\alpha\varphi} = \left(-\frac{C_3}{C_2}\right)^{1/\chi(\alpha)}$$

удается удовлетворить условиям прилипания $u_r = u_\varphi = 0$.

В этом случае решение (14) описывает обтекание логарифмической спирали.

Если $C_1 = 0$, $\alpha = 0$, то решение (14) имеет вид:

$$u_r = 0, \qquad u_\varphi = C_2 r + \frac{C_3}{r} \tag{15}$$

Формулы (15) описывают известное решение о движении вязкой жидкости между двумя коаксиальными вращающимися с постоянными угловыми скоростями цилиндрами [3].

Решение относительно подгруппы H $\langle X_1, X_4 \rangle$ имеет вид:

$$u = \frac{x}{t} + C_2 f_1(\xi) + C_3 f_2(\xi) \qquad \left(\xi = \frac{y}{\sqrt{t}}\right)$$
$$v = -\frac{y}{t} + \frac{C_1}{\sqrt{t}}, \qquad p = \frac{1}{t}\left(-\frac{y^2}{2t} + \frac{3C_1 y}{2\sqrt{t}} + C_4\right) \tag{16}$$

где $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ — линейнонезависимые решения уравнения

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{3}{2}\xi - C_1\right)\frac{df}{d\xi} + \frac{1}{2} f = 0$$

Подгруппа H $\langle X_1, X_5 \rangle$ дает следующее решение:

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{\sqrt{t}} - 2C_1\right)^2\right]\left(C_2 \int_0^Y \exp\left(\frac{1}{4}\zeta^2\right) d\zeta + C_3\right) \tag{17}$$
$$v = \frac{C_1}{\sqrt{t}}, \qquad p = -\frac{C_1 y}{t\sqrt{t}} + \frac{C_4}{t} \qquad \left(Y = \frac{y}{\sqrt{t}} - 2C_1\right)$$

При $C_1 = C_2 = 0$ получается фундаментальное решение уравнения нестационарного одномерного течения вязкой жидкости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Решение относительно подгруппы H $\langle X_2 + X_8, X_3 \rangle$ имеет следующий вид:

$$u_r = \frac{C_1}{r}, \quad u_\varphi = g(r), \quad p = \varphi - \frac{C_1^2}{2r^2} + \int_a^r \frac{g^2(\zeta)}{\zeta} d\zeta + C_4 \tag{18}$$

причем функция $g(r)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1 - C_1}{r}\frac{dg}{dr} - \frac{1 + C_1}{r^2} g - \frac{1}{r} = 0 \tag{19}$$

Решение этого уравнения при $C_1 \neq 0$ дается формулой

$$g = -\frac{r}{2C_1} + \frac{C_2}{r} + C_3 r^{C_1 + 1}$$

В случае $C_1 = 0$ решение уравнения (19) имеет вид:

$$g = u_\varphi = \frac{r}{2}\ln r + \frac{C_2}{r} + C_3 r \tag{20}$$

За счет выбора C_2, C_3 можно получить при данных r_1 и r_2

$$u_\varphi(r_1) = u_\varphi(r_2) = 0$$

В этом случае решение (20) соответствует течению в канале, образованном двумя дугами концентрических окружностей с радиусами r_1, r_2, если давление линейно зависит от полярного угла [4].

Решение относительно подгруппы $H\langle X_3,\ X_5+\beta X_8\rangle$ имеет следующий вид:

$$u = f(y), \qquad v = C_1, \qquad p = \beta x + C_2 \tag{21}$$

При этом функция $f(y)$ есть решение уравнения

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - C_1 \frac{df}{dy} - \beta = 0 \tag{22}$$

При $C_1 \neq 0$ решение уравнения (22) имеет следующий вид:

$$f(y) = u(y) = -\frac{\beta}{C_1} y + C_4 e^{C_1 y} + C_3 \tag{23}$$

Надлежащим выбором C_1, C_3, C_4 можно получить при данных y_1, y_2

$$u(y_1) = u(y_2) = 0$$

В этом случае решение (21) описывает течение по трубе с параллельными пористыми стенками $y = y_1$ и $y = y_2$ при наличии постоянного градиента давления вдоль трубы и постоянной поперечной скорости [4].

Если же $C_1 = 0$, то решение уравнения (22) дается формулой

$$f(y) = u(y) = \frac{1}{2}\beta y^2 + C_4 y + C_3 \tag{24}$$

При этом $v = 0$, $p = \beta x + C_2$ (течение Пуазейля [3]). Если, кроме того, и $\beta = 0$, то имеем

$$u = C_4 y + C_3, \qquad v = 0, \qquad p = C_2 \tag{25}$$

(течение между параллельными стенками, движущимися с постоянными скоростями).

Подгруппа $H\langle X_3 + X_4,\ X_5 + \gamma X_7 + \delta X_8\rangle$ дает следующее решение:

$$u = t + f(\xi), \quad v = \gamma f(\xi) + C_1, \quad p = \frac{\delta - \gamma^2}{\gamma^2 + 1} x + \frac{\gamma(\delta + 1)}{\gamma^2 + 1} y + C_4 \tag{26}$$

где $\xi = \gamma(x - {}^1/_2 t^2) - y$, а функция $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$(\gamma^2 + 1)\frac{d^2 f}{d\xi^2} + C_1 \frac{df}{d\xi} - \frac{\delta + 1}{\gamma^2 + 1} = 0 \tag{27}$$

Это решение соответствует стационарному движению в поле тяжести, направленному по оси x.

В частном случае $C_1 = \delta = 0$ получается течение по наклонной плоскости слоя жидкости постоянной толщины под действием тяжести, описываемое формулами

$$u = \frac{1}{2(\gamma^2 + 1)^2}(\gamma x - y)^2 + C_2(\gamma x - y) + C_3 \tag{28}$$

$$v = \gamma u, \qquad p = -\frac{\gamma(\gamma x - y)}{\gamma^2 + 1} + C_4$$

Постоянные C_2, C_3, C_4 можно выбрать так [5], чтобы выполнить условие прилипания на стенке $\gamma x - y = k_1$, и условие на свободной границе $\gamma x - y = k_2$.

Решение (26) при $C_1 = 0$, $\delta \neq 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\delta + 1}{2(\gamma^2 + 1)^2}(\gamma x - y)^2 + C_2(\gamma x - y) + C_3, \\ v &= \gamma u, \qquad p = \frac{\delta - \gamma^2}{\gamma^2 + 1} x + \frac{\gamma(\delta + 1)}{\gamma^2 + 1} y + C_4 \end{aligned} \tag{29}$$

Если выбрать постоянные C_2, C_3 так, чтобы удовлетворялись условия $u = v = 0$ при $\gamma x - y = k_1$, $\gamma x - y = k_2$, то формулы (29) будут давать решение задачи о течении жидкости в трубе с параллельными стенками $\gamma x - y = k_1$, $\gamma x - y = k_2$ при наличии постоянного градиента давления вдоль трубы и поля тяжести по оси x.

Инвариантные решения относительно других двухпараметрических подгрупп (4) либо тривиальны (например, покой), либо просто не существуют. Например, подгруппа $H\langle X_7, X_8\rangle$ имеет инварианты

$$J_1 = t, \quad J_2 = x, \quad J_3 = u, \quad J_4 = v$$

Здесь нарушено неравенство

$$\frac{\partial (J_2, J_3, J_4)}{\partial (u, v, p)} \neq 0$$

Подгруппа $H\langle X_4, X_6\rangle$ имеет инварианты

$$J_1 = t, \qquad J_2 = ut - x, \qquad J_3 = vt - y, \qquad J_4 = p$$

Согласно общему методу, получаем, что H-решение должно иметь вид:

$$u = \frac{x}{t} + J_2(t), \qquad v = \frac{y}{t} + J_3(t), \qquad p = J_4(t)$$

Легко убедиться, что выражения для u, v не удовлетворяют уравнению неразрывности.

5. Инвариантные решения, построенные на однопараметрических подгруппах (2), определяются из системы уравнений с частными производными. Здесь ограничимся рассмотрением только двух примеров:

а. Подгруппа $H\langle X_1\rangle$. Для нее H-решение имеет вид

$$u = \frac{1}{\sqrt{t}} f(\xi, \eta) + \frac{x}{2t}, \qquad v = \frac{1}{\sqrt{t}} g(\xi, \eta) + \frac{y}{2t} \tag{30}$$

$$p = \frac{1}{t} h(\xi, \eta) + \frac{x^2 + y^2}{8t^2}$$

где

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{t}} \tag{31}$$

Функции f, g, h удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{gathered}
f\frac{\partial f}{\partial \xi} + g\frac{\partial h}{\partial \eta} = -\frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
f\frac{\partial g}{\partial \xi} + g\frac{\partial g}{\partial \eta} = -\frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} \\
\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \eta} + 1 = 0
\end{gathered} \tag{32}$$

Решение системы (39) можно интерпретировать как описывающее стационарное течение вязкой жидкости в плоскости $\xi\eta$ с равномерно распределенными в области течения источниками. Этот пример интересен еще и тем, что на нем можно проиллюстрировать возможность получения решений системы (1), отыскание которых сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, но которые не являются инвариантными относительно какой-либо двухпараметрической подгруппы основной группы системы (1).

Для этого заметим, что система (32) допускает следующие операторы:

$$\begin{gathered}
Y_1 = -\eta\frac{\partial}{\partial \xi} + \xi\frac{\partial}{\partial \eta} - g\frac{\partial}{\partial f} + f\frac{\partial}{\partial g} \\
Y_2 = \frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad Y_3 = \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad Y_4 = \frac{\partial}{\partial h}
\end{gathered} \tag{33}$$

Решению системы (32), инвариантному относительно подгруппы $H\langle Y_1 + \alpha Y_4\rangle$, соответствует следующее решение системы (1):

$$u_r = \frac{C_1}{r}, \quad u_\varphi = \frac{1}{r} f\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right), \quad p = \frac{\alpha\varphi}{t} - \frac{C_1^2}{2r^2} + \frac{1}{t}\int\limits_{\alpha}^{r/\sqrt{t}} \frac{f^2(\xi)}{\xi}\, d\xi + \frac{C_4}{t} \tag{34}$$

где

$$f\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) = C_2 \int\limits_{a}^{r/\sqrt{t}} z^{C_1+1} \exp\left(-\frac{1}{4} z^2\right) dz + C_3 +$$

$$+\alpha \int\limits_{a}^{r/\sqrt{t}} z^{1+C_1} \exp\left(-\frac{1}{4} z^2\right)\left(\int\limits_{z}^{r/\sqrt{t}} \zeta^{-(1+C_1)} \exp\left(\frac{1}{4}\xi^2\right) d\zeta\right) dz \tag{35}$$

Легко видеть, что это решение не является инвариантным относительно какой-либо двухпараметрической подгруппы группы (2). Аналогичными свойствами обладает решение системы (32), инвариантное относительно подгруппы $H\langle Y_2 + \alpha Y_4\rangle$, которому соответствует следующее решение системы (1):

$$u = \frac{x}{2t} + \frac{1}{\sqrt{t}} f(\eta), \quad v = -\frac{y}{2t} + \frac{C_1}{\sqrt{t}}, \quad p = \frac{1}{t}\left(\frac{x^2 - 3y^2}{8t} + \frac{\alpha x + C_1 y}{\sqrt{t}} + C_4\right) \tag{36}$$

где

$$f(\eta) = C_2 \int\limits_{0}^{\eta - C_1} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + C_3 + \alpha \int\limits_{0}^{\eta - C_1} \exp\left(\frac{z^2}{2}\right)\left(\int\limits_{z}^{\eta - C_1} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) d\zeta\right) dz \tag{37}$$

б. Подгруппа $H\langle X_2\rangle$. Здесь решение системы (1) имеет вид:

$$u_r = \frac{\varphi(t)}{r}, \quad u_\varphi = \frac{V(r, t)}{r}, \quad p = \int\limits_{r_0}^{r}\left[\frac{V^2(r, t) + \varphi^2(t)}{r^3} - \frac{\varphi'(t)}{r}\right] dr \tag{38}$$

Функция $V = V(r, t)$ должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{1 + \varphi(t)}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial t} \tag{39}$$

Это позволяет построить решение следующей задачи:

В начале координат имеется источник заданной переменной интенсивности $2\pi\varphi(t)$; в момент $t = 0$ задано распределение скорости $u_\varphi(r, 0)$ в зависимости от r. Чтобы получить это решение, нужно предварительно решить следующую задачу Коши для уравнения (39):

$$V(r, t)|_{t=0} = W(r) \qquad (0 \leqslant r < \infty)$$

Настоящая работа выполнена под руководством Л. В. Овсянникова, которому автор выражает искреннюю благодарность. Автор признателен Г. А. Тирскому за обсуждение работы и ценные указания.

Московский физико-технический институт

Поступила 8.VII. 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 1958, 118, № 3.
2. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности, ДАН СССР, 1959, 125, № 3.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, часть вторая, изд. 3, Гостехиздат, 1948.
4. Jeffery G. B. Philosphical Magazine, Ser. 6, vol. 29, 1915.
5. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, изд. 2. Гостехиздат, 1954.