менее обозримыми для двукомпонентной системы. Для многих конструкций летательных аппаратов с ЖРД (особенно с жидкостным газогенератором, работающим на основных компонентах) динамическая схема более сложная и может включать автоматические устройства для управления подачей топлива в камеру [4].

По линеаризованным уравнениям можно получить заключение только об устойчивости или неустойчивости системы. Если система неустойчива и случайно возникшие колебания будут нарастать, то предположение о линейности становится несправедливым. Нелинейности в уравнениях для камеры сгорания, возможность возникновения кавитационных явлений в магистралях и др. приводят к изменению динамических свойств системы. В системе может устанавливаться автоколебательный режим.

Поступила 7 XII 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Gunder D. F., Friant D. R., Stability of flow in a rocket motor. J. Appl. Mech., 1950, vol. 17.
2. Summerfield M., A theory of unstable combustion in liquid propellant rocket systems. J. Amer. Rocket Soc., 1951, vol. 21, No. 5.
3. Crocco L. Aspects of combustion stability in liquid propellant rocket motors. Part 1: Fundamentals low-frequency instability with monopropellants. J. Amer. Rocket Soc., 1951, vol. 21, No. 6.
4. Крокко Л., Чжень Синь-и. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях Изд. иностр. лит., 1958.
5. Sabersky R. H. Effect of wave propagation in feed lines on low-frequency rocket instability. Jet. Propulsion, 1954, vol. 24.
6. Wick R. S. The effekt of vehicle structure on propulsion system dynamics and stability. Jet. Propulsion, 1956, vol. 26, No. 10.
7. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1954.
8. Феодосьев В. И., Синярев Г. Б. Введение в ракетную технику. Оборонгиз, 1960.
9. Колесников К. С. Вынужденные колебания впрыска идеальной сжимаемой жидкости в камеру. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 5.
10. Карелин В. Я. Кавитационные явления в центробежных и осевых насосах. Машгиз, 1963.
11. Li Y. T. Stabilization of low-frequency oscillations of liquid propellant rockets with fuel line stabilizer. Jet. Propulsion, 1956, vol. 26, No. 1.
12. Dee Y. C., Picles A. M., Miesse C. C. Experimental aspects of rockets system stability. Jet. Propulsion, 1956, vol. 26, No. 1.
13. Колесников К. С. Вынужденные колебания потока идеальной сжимаемой жидкости в однородной прямой трубе. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 4.

ТОЧНЫЙ ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Г. И. Назаров (Томск)

Для некоторого класса сжимаемых жидкостей при плоско-параллельном или осесимметричном движении найдены точные общие решения в физических переменных, зависящие от произвольной функции двух аргументов. Эти решения могут быть полезными для апробации численных методов, используемых при решении краевых задач нелинейных уравнений газовой динамики с учетом внешних консервативных сил.

Известно [1], что движение газа при наличии напряженности магнитного поля, перпендикулярной к плоскости течения (или направленной по трансверсале при осесимметричном течении), определяется системой уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{\rho y^k}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{1}{\rho y^k}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{v^2}{2}+U+\int\frac{dp}{\rho}+\frac{\mu\rho}{4\pi}=\text{const} \tag{1}$$

$$p=f(\rho) \tag{2}$$

Здесь φ — потенциал скорости, ψ — функция тока, v — модуль скорости, p — давление, ρ — плотность, U — потенциальная энергия, μ — параметр, характеризующий магнитное поле невозмущенного потока на бесконечности [2].

При $k=0$ уравнения (1), (2) описывают плоско-параллельное движение, при $k=0$ ($y>0$) — осесимметричное течение. При $\mu=0$ уравнения переходят в обычные уравнения движения сжимаемой жидкости. Зависимость (2) предполагается известной.

Рассмотрим вторую задачу динамики: по заданному закону $\rho = \rho(x,y)$ поля плотностей (давлений) найти поле скоростей и поле внешних сил.

Из первых двух уравнений имеем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0 \qquad (3)$$

Положим

$$\varphi(x, y) = \frac{\Phi(x, y)}{\rho^{1/2} y^{k/2}} \qquad (4)$$

Уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \left[\frac{k(2-k)}{4y^2} + N(x, y)\right]\Phi = 0 \qquad (5)$$

Здесь

$$N(x, y) = \frac{1}{2\rho}\left\{\frac{1}{2\rho}\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2\right] - \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right) - \frac{k}{y}\frac{\partial\rho}{\partial y}\right\}$$

Выделим класс жидкостей, для которых $\rho(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2\rho}\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2\right] - \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right) - \frac{k}{y}\frac{d\rho}{dy} = 0 \qquad (6$$

Для такой жидкости функция $\Phi(x, y)$ находится из уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{k(2-k)}{4y^2}\Phi = 0 \qquad (7)$$

Уравнение (7) при $k = 0$ есть уравнение Лапласа, и, следовательно, функция Φ, входящая в (4), определяется комплексным потенциалом $w = w(z)$ $(z = x + iy)$.) При $k = 1$ уравнение (7) есть также уравнение Лапласа в цилиндрических координатах для осесимметричной задачи. Известно [3], что в этом случае функция Φ может быть выражена тоже через комплексный потенциал.

При помощи соотношений (4) и (7) можно определить модуль скорости v. Тогда, с учетом (2), интеграл Бернулли (1) служит для определения потенциальной энергии U, а следовательно, и поля внешних консервативных сил.

Предполагая интеграл уравнения (6) в виде $\rho = \rho_1(x)\,\rho_2(y)$, получаем два нелинейных обыкновенных уравнения

$$2\rho_1\rho_1'' - \rho_1'^2 \pm \lambda^2\rho_1^2 = 0, \qquad 2\rho_2\rho_2'' - \rho_2'^2 + 2ky^{-1}\rho_2\rho_2' + \lambda^2\rho_2^2 = 0 \qquad (8)$$

в которых знаки при произвольной постоянной λ находятся в соответствии.

Полагаем в (8) сначала $\lambda = 0$; интегрирование дает

$$\rho_1 = (a_1x + b_1)^2, \qquad \rho_2 = (a_2y + b_2)^2 \quad \text{при } k = 0 \qquad (a, b = \text{const}) \qquad (9)$$

$$\rho_1 = (a_1x + b_1)^2, \qquad \rho_2 = (a_2\ln y + b_2)^2 \quad \text{при } k = 1 \qquad (10)$$

Эти решения имеют реальный смысл для тех краевых задач, в которых координаты x, y ограничены.

Соотношения (9) и (10) могут быть использованы для аппроксимации [4] реально заданного поля плотностей в определенных областях изменения переменных x, y; для этого постоянные, входящие в (9) или (10), можно рассматривать как параметры, определяемые в каждой точке потока из соображений совпадения функции $\rho(x, y)$ и ее первых частных производных по x, y с гипотетическими выражениями этих величин.

Аналогичными выкладками можно получить решение для функции тока ψ в виде

$$\psi = \sqrt{y^k\rho}\,\Psi, \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \frac{k(2+k)}{4y^2}\Psi = 0$$

При этом плотность $\rho = \rho_1\rho_2$ определяется теми же формулами (9) — (10).

Поступила 29 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. 1962.
2. Назаров Г. И. К точным решениям некоторых задач магнитной газодинамики. ПМТФ, 1963, № 2.
3. Назаров Г. И. О точном общем решении осесимметричной задачи несжимаемой жидкости. Тр. Томского ун-та, 1963, т. 163.
4. Назаров Г. И. Метод подвижной аппроксимации в газодинамике. Тр. Томского ун-та, 1959, т. 144.