

УДК 532.516+533

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФУЗИОННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПУЗЫРЬКОВ В КЛАСТЕРЕ

Э. Ш. Насибуллаева, И. Ш. Ахатов

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа

E-mail: elvira@anrb.ru

Рассмотрена задача о диффузионной устойчивости газовых пузырьков в одно- и двухфракционном кластере при воздействии на них акустического поля. Для однофракционного кластера численно получены диапазоны значений начальных концентраций газа в жидкости, при которых пузырек вследствие диффузионных процессов, протекающих между ним и окружающей жидкостью, стремится к одному из двух равновесных состояний. Установлено, что двухфракционный кластер стремится стать однофракционным.

Ключевые слова: диффузия, пузырьковый кластер, устойчивость, равновесный радиус.

**Введение.** В экспериментах по акустической кавитации обнаружено, что при наличии акустического поля малые газовые пузырьки со временем растут. Данное явление объясняется следующим образом [1–4]. В отсутствие акустического поля давление внутри пузырька больше давления окружающей жидкости, вследствие чего газ диффундирует из пузырька в жидкость, и пузырек медленно растворяется. Таким образом, в состоянии покоя пузырек является диффузионно неустойчивым. При “включении” акустического поля, достигнув некоторого порога амплитуды этого поля, пузырек начинает расти. При колебании пузырька во время его расширения происходит процесс диффузии газа из жидкости в пузырек, а во время сжатия — из пузырька в жидкость. При этом во время расширения из жидкости в пузырек газа войдет больше, чем выйдет из него во время сжатия, так как площадь поверхности пузырька при расширении увеличивается. Следовательно, за полный период колебания диффузия должна приводить к росту пузырька. Данный процесс получил название направленной диффузии. Математические теории, описывающие направленную диффузию для случая малых амплитуд колебаний пузырька, представлены в [1, 2, 4]. В этих работах установлено, что пороговое значение амплитуды акустического поля, при котором начинается рост пузырька, зависит от концентрации газа, радиуса пузырька и частоты акустического поля. В [2–4] проведены расчеты пороговой величины для различных значений этих параметров.

После открытия однопузырьковой сонолюминесценции в 1991 г. [5, 6] было обнаружено, что в сильном акустическом поле в течение нескольких дней одиночный пузырек может колебаться, не меняя размера. Поскольку в рамках изложенной выше теории это явление не могло быть объяснено, потребовалось дальнейшее исследование рассматриваемой задачи. Аналитическое решение полной системы уравнений задачи диффузии отсутствует, поэтому решение данной задачи будем искать численно [7]. Однако изменение массы пузырька со временем очень мало и сравнимо с погрешностью расчета, поэтому нельзя однозначно определить, имеет место рост (растворение) пузырька или оказывает влияние погрешность вычислений и за период колебания размер пузырька не изменится. Кроме того, при численном решении полной системы уравнений необходимы значительные затраты машинного времени. В связи с этим была предложена адиабатическая аппроксимация диф-

фузионной задачи [8, 9], позволяющая рассчитывать колебания большой амплитуды для больших чисел Пекле. В работе [7] проведено сравнение решения с использованием адиабатической аппроксимации и решения по полной модели и получено хорошее соответствие. Также в пространстве параметров концентрации и давления рассчитана фазовая диаграмма, с использованием которой можно определить, какой из трех случаев имеет место: диффузионно устойчивая сонолюминесценция, диффузионно неустойчивая сонолюминесценция или отсутствие сонолюминесценции. В работе [10] представлена теория устойчивых колебаний пузырьков, подвергающихся воздействию сильным акустическим полем. В этой теории учитывается влияние поверхностного натяжения и направленной диффузии на динамику малых пузырьков и объясняется существование малых устойчиво колеблющихся одиночных пузырьков, наблюдавшихся в экспериментах по сонолюминесценции.

В работах [1–10] рассматривался процесс диффузии только для одиночных газовых пузырьков, однако не менее важной задачей является исследование диффузии в пузырьках, находящихся в больших скоплениях (пузырьковых облаках, или пузырьковых кластерах). Данная задача связана, например, с изучением процессов, протекающих при многопузырьковой сонолюминесценции. Известные математические модели, описывающие динамику пузырьков в пузырьковых кластерах (без учета диффузионных процессов), можно разделить на две основные группы [11]. В первой группе исследований [12–14] смесь жидкости и газовых пузырьков рассматривается как сплошная среда и динамика кластера исследуется с использованием осредненных уравнений модели пузырьковой жидкости, а динамика одиночных пузырьков — с использованием линеаризованных уравнений Рэлея — Плессета. Во второй группе в основном исследуется динамика одиночного пузырька в кластере, а также взаимодействие между пузырьками [15, 16], динамика кластера как целого объекта не рассматривается. Таким образом, данный подход ограничен исследованиями малого числа пузырьков, расположенных в особых конфигурациях. В [11] предложена математическая модель пузырькового кластера, позволяющая исследовать не только динамику кластера в целом, но и динамику одиночных пузырьков внутри кластера, а также учитывать наличие в кластере пузырьков, имеющих различные радиусы, и их взаимодействие.

Настоящая работа является продолжением работы [11]. На основе предложенной математической модели рассматривается диффузионная устойчивость газовых пузырьков в пузырьковых кластерах при воздействии на них акустического поля. Процессы диффузии между пузырьком и жидкостью исследуются с использованием аппроксимации диффузионной задачи [8], а изменение радиуса пузырька — по модели пузырькового кластера [11].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается множество газовых пузырьков различных радиусов, совершающих колебания в конечном объеме безграничной слабосжимаемой вязкой жидкости под воздействием акустического поля. В жидкости выделяется сферическая область, заполненная пузырьками, — пузырьковый кластер. В этом случае кластер можно рассматривать как большую каплю, содержащую жидкость и множество микропузырьков. В предположении, что по сравнению с длиной акустической волны размер кластера мал, давление внутри кластера рассматривается как однородное [17]. Полагается также, что пузырьки совершают сферически-симметричные радиальные движения, внутри пузырька давление газа меняется по адиабатическому закону и в системе газопузырьки — жидкость отсутствуют процессы теплопереноса.

Пузырьки в кластере разбиваются на конечное число фракций, каждая из которых характеризуется размером начального радиуса пузырька. Тогда система уравнений, описывающая колебания кластера и колебания пузырьков в полидисперсном кластере, имеет вид [11]

$$a_i \ddot{a}_i + 3\dot{a}_i^2/2 = (p_{ai} - p_c)/\rho_l, \quad i = \overline{1, n}; \quad (1)$$

$$R\ddot{R} + 3\dot{R}^2/2 = (p_c - p_I)/\rho_l + R(\dot{p}_c - \dot{p}_I)/(\rho_l C_I); \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n N_i a_i^2 \dot{a}_i = R^2 \dot{R}; \quad (3)$$

$$p_{ai} = \left( p_0 + \frac{2\sigma}{a_{0i}} \right) \left( \frac{a_i}{a_{0i}} \right)^{-3\gamma} - \frac{4\mu \dot{a}_i}{a_i} - \frac{2\sigma}{a_i}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (4)$$

$$p_I = p_0 - \Delta P \sin(\omega t). \quad (5)$$

Здесь  $a_i = a_i(t)$  — радиус пузырька в  $i$ -й фракции;  $p_{ai}$  — давление газа вблизи стенки пузырька  $i$ -й фракции;  $p_c = p_c(t)$  — давление жидкости в кластере;  $\rho_l$  — плотность жидкости;  $n$  — число фракций;  $R = R(t)$  — радиус кластера;  $p_I$  — внешнее давление;  $C_l$  — скорость звука в жидкости;  $N_i$  — число пузырьков в  $i$ -й фракции;  $p_0$  — начальное давление в жидкости;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $a_{0i}$  — начальный радиус пузырька в  $i$ -й фракции;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости;  $\Delta P$  — амплитуда внешнего давления;  $\omega$  — угловая частота;  $t$  — время; точка над переменной обозначает производную по времени. При  $n = 1$  система уравнений (1)–(5) соответствует случаю монодисперсного (или однофракционного) кластера, и индекс  $i = 1$  опускается.

Рассмотрим диффузионную задачу для пузырька в монодисперсном кластере. В данной работе диффузионные процессы между пузырьком и жидкостью исследуются с использованием аппроксимации диффузионной задачи [8]. Проводя аппроксимацию для больших чисел Пекле  $Pe = a_0^2 \omega / D \gg 1$  ( $D$  — коэффициент диффузии газа в жидкости) с помощью перехода к нормированной лагранжевой координате  $\eta = (r^3 - a^3(t)) / (3a_0^3)$  ( $r$  — расстояние до центра пузырька) и осредняя по времени, скорость переноса массы газа через поверхность пузырька, осредненную по периоду его колебания, можно представить в виде

$$\frac{d\bar{m}}{d\tau} = \frac{\bar{c}_\infty - \langle \bar{c} \rangle_\tau}{T_{rd}}, \quad T_{rd} = \int_0^\infty \left( \frac{1}{T} \int_0^T [3\eta + \bar{a}^3(t)]^{4/3} dt \right)^{-1} d\eta, \quad (6)$$

$$\bar{c} = \frac{c(a(t), t)}{c_0}, \quad \bar{c}_\infty = \frac{c_\infty}{c_0}, \quad \bar{m} = \frac{m}{m_0}, \quad \bar{a} = \frac{a}{a_0}.$$

Здесь  $\tau = tD/a_0^2$  — медленная диффузионная шкала времени;  $T_{rd}$  — безразмерное характеристическое время скорости диффузионного роста массы пузырька;  $a = a(t)$  — радиус пузырька;  $T$  — период колебания акустического поля;  $c(a(t), t)$  — массовая концентрация газа, растворенного в жидкости вблизи стенки пузырька;  $c_0$  — концентрация насыщения газа в жидкости при давлении  $p_0$ ;  $c_\infty$  — начальная однородная концентрация газа в жидкости;  $m_0$  — масса растворенного в жидкости газа, занимающего объем невозмущенного пузырька. Средняя концентрация газа вблизи стенки пузырька за период колебаний акустического поля определяется выражением

$$\langle \bar{c} \rangle_\tau = \int_0^T a^4(t) \bar{c} dt / \int_0^T a^4(t) dt, \quad (7)$$

концентрация газа на границе пузырька рассчитывается по формуле

$$c(a(t), t) = H(p_0 + 2\sigma/a_0)(a(t)/a_0)^{-3\gamma}, \quad (8)$$

где  $H = c_0/p_0$  — константа Генри.

**2. Численные расчеты для монодисперсного кластера.** Для численных расчетов переноса массы через поверхность пузырька в кластере используются аппроксимационные формулы (6), (7), в которых концентрация газа вблизи стенки пузырька находится

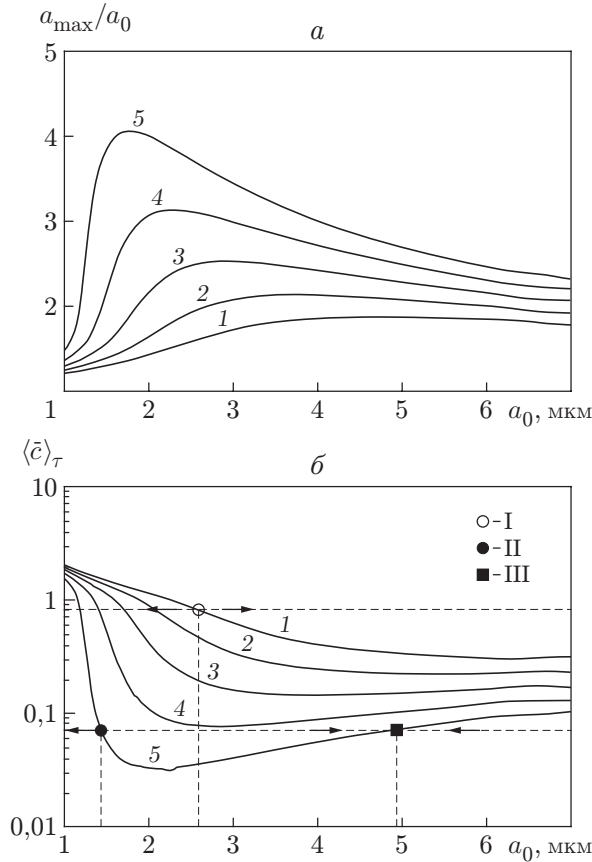


Рис. 1

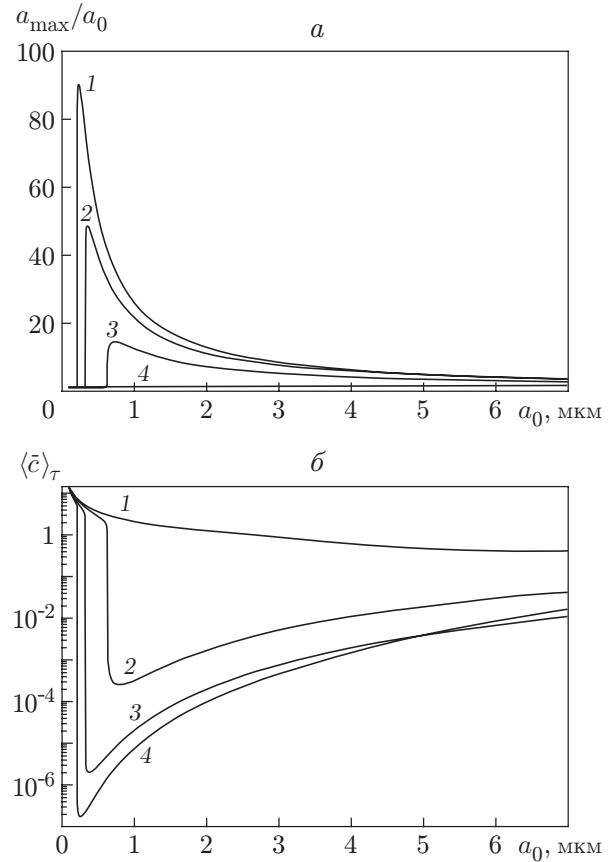


Рис. 2

Рис. 1. Зависимости нормированного максимального радиуса (*a*) и средней концентрации газа вблизи стенки пузырька (*b*) в монодисперсном кластере от начального радиуса при различных амплитудах давления:

1 —  $\Delta P = 1,1 \cdot 10^5$  Па; 2 —  $\Delta P = 1,2 \cdot 10^5$  Па; 3 —  $\Delta P = 1,3 \cdot 10^5$  Па; 4 —  $\Delta P = 1,4 \cdot 10^5$  Па; 5 —  $\Delta P = 1,5 \cdot 10^5$  Па; горизонтальные линии — уровни концентрации газа  $\bar{c}_\infty$  в жидкости; I — начальный неустойчивый равновесный радиус  $a_{un}^{(1)}$ ; II — неустойчивый равновесный радиус  $a_{un}^{(2)}$ ; III — устойчивый равновесный радиус  $a_{st}^{(2)}$ ; стрелки — направление изменения начального радиуса пузырька

Рис. 2. Зависимости нормированного максимального радиуса (*a*) и средней концентрации газа вблизи стенки пузырька (*b*) в монодисперсном кластере от начального радиуса при различных амплитудах давления:

1 —  $\Delta P = 10^5$  Па; 2 —  $\Delta P = 2 \cdot 10^5$  Па; 3 —  $\Delta P = 3 \cdot 10^5$  Па; 4 —  $\Delta P = 4 \cdot 10^5$  Па

из граничного условия (8), а радиус пузырька  $a(t)$  — из системы уравнений (1)–(5) при  $n = 1$ . Значения физических параметров, использовавшихся в расчетах, соответствуют значениям параметров воды и воздуха:  $\rho_l = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $C_l = 1500$  м/с,  $p_0 = 10^5$  Па,  $\sigma = 0,073$  Н/м,  $\mu = 10^3$  Па·с,  $\gamma = 1,4$ ; начальный радиус кластера  $R_0 = 10^{-3}$  м, число пузырьков в кластере  $N = 10^4$ .

На рис. 1, 2 приведены зависимости нормированного максимального радиуса пузырька  $a_{\max}/a_0$  и средней концентрации газа вблизи стенки пузырька  $\langle \bar{c} \rangle_\tau$  от начального радиуса  $a_0$  при различных амплитудах акустического поля  $\Delta P$ . Рис. 1 позволяет сравнить результаты для пузырька в монодисперсном кластере с аналогичными результатами для одиночного пузырька, представленными в работе [10]. На рис. 1, *a* видно, что мак-

симальные отклики для пузырька в монодисперсном кластере для амплитуд давления  $\Delta P = 1,1 \cdot 10^5 \div 1,5 \cdot 10^5$  Па находятся при том же размере начального радиуса, что и для одиночного пузырька, однако значение отклика значительно меньше. Например, при  $\Delta P = 1,5 \cdot 10^5$  Па как для одиночного пузырька, так и для пузырька в кластере резонансный радиус  $a_0 \approx 1,5$  мкм, но в первом случае значение отклика в 6,5 раз больше. На рис. 2,а показан нормированный максимальный радиус для пузырька в более сильном акустическом поле ( $\Delta P = 10^5 \div 4 \cdot 10^5$  Па). Видно, что с увеличением амплитуды давления максимальный отклик также растет.

Рис. 1,б показывает, что в заданном диапазоне значений начального радиуса поведение кривых осредненной концентрации в случае одиночного пузырька то же, что и в случае пузырька в кластере: при увеличении начального радиуса концентрация монотонно уменьшается до некоторого порогового значения амплитуды внешнего давления  $\Delta P$ . Из соотношения (6) следует, что средняя скорость изменения массы газа в пузырьке зависит только от разности между концентрацией газа в жидкости  $\bar{c}_\infty$  и осредненной концентрацией вблизи стенки пузырька  $\langle \bar{c} \rangle_\tau$ . Тогда для данных амплитуд давления существует диапазон значений  $\bar{c}_\infty$  с одной равновесной точкой  $\langle \bar{c} \rangle_\tau = \bar{c}_\infty$ , которая является неустойчивой (точка I на рис. 1,б) и соответствует значению начального радиуса  $a_{un}^{(1)}$ . При  $a_0 < a_{un}^{(1)}$  пузырьки растворяются, а при  $a_0 > a_{un}^{(1)}$  — растут, до тех пор пока не разрушатся из-за неустойчивости поверхности. Преодолев пороговое значение амплитуды внешнего давления  $\Delta P$ , кривая осредненной концентрации газа становится немонотонной, и в области малых значений начальных радиусов пузырьков появляется глобальный минимум, который соответствует глобальному максимуму на рис. 1,а. При такой немонотонной зависимости  $\langle \bar{c} \rangle_\tau(a_0)$  существует диапазон значений  $\bar{c}_\infty$ , в котором наблюдаются две равновесные точки  $\langle \bar{c} \rangle_\tau = \bar{c}_\infty$ . Неустойчивой точке II на рис. 1,б соответствует значение радиуса  $a_0 = a_{un}^{(2)}$ , а устойчивой точке III — значение радиуса  $a_0 = a_{st}^{(2)}$ . При  $a_0 < a_{un}^{(2)}$  пузырьки растворяются до полного исчезновения, при  $a_{un}^{(2)} < a_0 < a_{st}^{(2)}$  пузырьки растут, до тех пор пока не достигнут размера радиуса  $a_{st}^{(2)}$ , соответствующего равновесному состоянию. При  $a_0 > a_{st}^{(2)}$  пузырьки растворяются, до тех пор пока не достигнут размера радиуса  $a_{st}^{(2)}$ . Однако в пузырьковом кластере равновесие становится возможным при более высоких (в сотни раз), чем в случае одиночного пузырька, начальных концентрациях газа. Следовательно, для получения диффузионно устойчивого одиночного пузырька необходима хорошо очищенная от газа жидкость, тогда как в неочищенной жидкости наиболее вероятно появление пузырькового кластера, также диффузионно устойчивого.

На рис. 2,б представлена осредненная концентрация газа вблизи стенки пузырька при больших давлениях. Видно, что с увеличением амплитуды колебаний акустического поля диапазон значений концентраций  $\bar{c}_\infty$ , в котором возможна диффузионная устойчивость, расширяется. Кроме того, с уменьшением концентрации расстояние между устойчивой и неустойчивой точками равновесия значительно уменьшается.

На рис. 3 показана зависимость равновесного радиуса одиночного пузырька и пузырька в кластере (устойчивая точка равновесия) от амплитуды давления при различных значениях начальной концентрации газа в жидкости. Для одиночного пузырька эта зависимость монотонная, кроме того, при амплитудах давления  $\Delta P > 3 \cdot 10^5$  Па радиус пузырька в равновесном состоянии становится очень большим и из-за неустойчивости поверхности пузырек может разрушиться, не достигнув равновесного состояния. Следует отметить, что эта зависимость имеет место только при малых значениях  $\bar{c}_\infty$ . Следовательно, одиночный пузырек в принципе диффузионно неустойчив. В кластере наблюдается немонотонная зависимость значения радиуса пузырька в равновесном состоянии от амплитуды

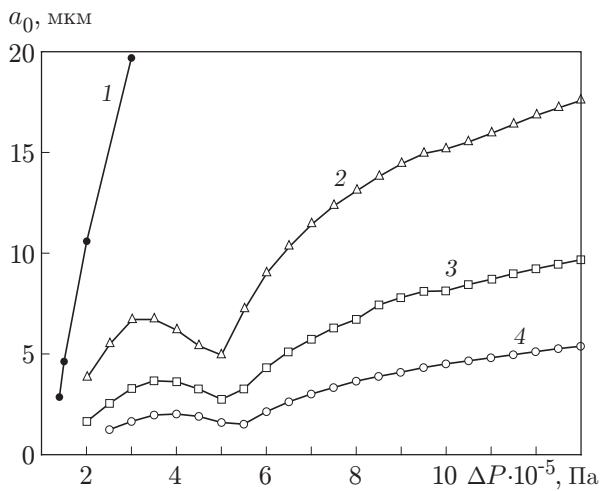


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость равновесного радиуса пузырька от амплитуды давления при различных значениях начальной концентрации газа в жидкости:

1 — одиночный пузырек ( $\bar{c}_\infty = 10^{-4}$ ); 2–4 — пузырек в кластере (2 —  $\bar{c}_\infty = 10^{-2}$ , 3 —  $\bar{c}_\infty = 10^{-3}$ , 4 —  $\bar{c}_\infty = 10^{-4}$ )

Рис. 4. Зависимости нормированного максимального радиуса (*a*) и средней концентрации газа вблизи стенки пузырька (*b*) в монодисперсном кластере от начального радиуса при  $\Delta P = 1,5 \cdot 10^5$  Па:

сплошные линии — осреднение по периоду акустического поля; пунктирные — осреднение по периоду колебания пузырька; штриховые линии — максимальные радиусы (1 —  $a_{un}^{(3)}$ ; 2 —  $a_{st}^{(3)}$ ; 3 —  $a_{un}^{(4)}$ ; 4 —  $a_{st}^{(4)}$ ); I — устойчивые точки равновесия; II — неустойчивые точки равновесия

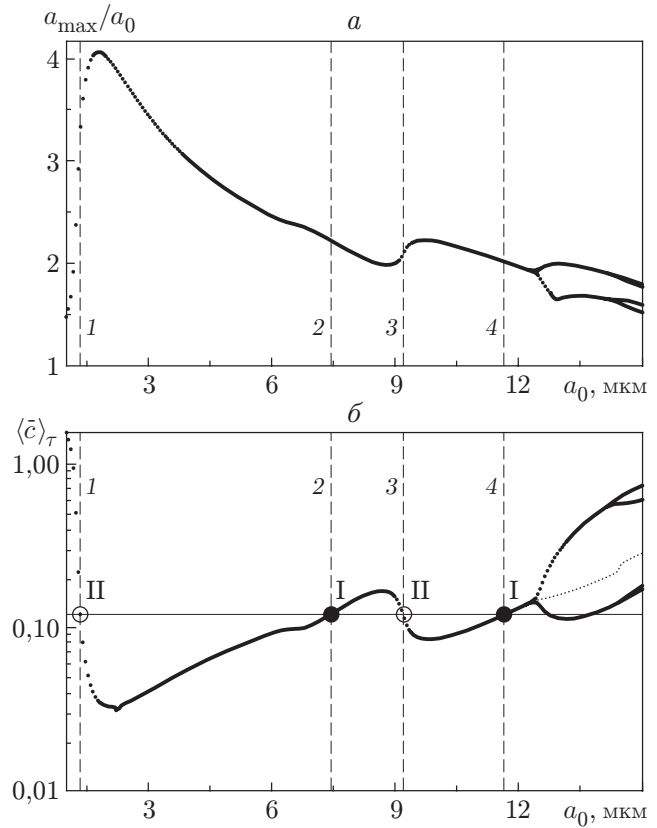


Рис. 4

давления. При этом даже при больших амплитудах колебаний внешнего поля значение радиуса пузырька в равновесном состоянии недостаточно большое для того, чтобы из-за неустойчивости поверхности пузырек мог разрушиться. Таким образом, даже в сильном акустическом поле пузырек в кластере диффузионно устойчив.

На рис. 4 представлены результаты расчетов для параметра  $a_0 = 1 \div 15$  мкм и амплитуды колебаний внешнего давления  $\Delta P = 1,5 \cdot 10^5$  Па. Видно, что при увеличении начального радиуса кривая максимального отклика пузырьков становится немонотонной (рис. 4, *a*), появляются новые точки экстремума. При дальнейшем увеличении радиуса наблюдается также удвоение периода (бифуркация). Поведение кривых осредненной концентрации газа вблизи стенки пузырька также меняется (рис. 4, *b*). При удвоении периода колебания пузырька кривая концентрации также раздваивается, поэтому осреднение

берется не по периоду колебаний акустического поля, а по периоду колебания пузырька. Следовательно, кривая концентрации, рассчитанная за период колебания пузырька, лежит между кривыми концентрации, рассчитанными за период колебания акустического поля. На рис. 4, б показан также диапазон значений  $\bar{c}_\infty$ , в котором существуют точки равновесия (две устойчивые и две неустойчивые). Штриховыми линиями показаны соответствующие этим точкам максимальные радиусы. При  $a_0 < a_{un}^{(3)}$  пузырьки растворяются до полного исчезновения; при  $a_{un}^{(3)} < a_0 < a_{st}^{(3)}$  и  $a_{st}^{(3)} < a_0 < a_{un}^{(4)}$  пузырьки растут или растворяются соответственно, до тех пор пока не достигнут равновесного размера  $a_{st}^{(3)}$ ; при  $a_{un}^{(4)} < a_0 < a_{st}^{(4)}$  и  $a_0 > a_{st}^{(4)}$  пузырьки растут или растворяются соответственно, до тех пор пока не достигнут равновесного размера  $a_{st}^{(4)}$ .

**3. Численные расчеты для двухфракционного кластера.** Положив  $n = 2$  в системе уравнений (1)–(5), рассмотрим двухфракционный кластер. В каждой фракции концентрация пузырьков формирует давление  $p_c$  внутри кластера. В то же время давление внутри кластера влияет на характер колебания пузырьков. Таким образом, в данной модели происходит взаимодействие между пузырьками различных радиусов в кластере, поэтому для каждой фракции осредненная концентрация газа вблизи стенки пузырька зависит не только от радиуса пузырька в этой фракции, но и от радиуса пузырька другой фракции.

На рис. 5 осредненная концентрация газа для каждой фракции показана как функция начальных радиусов  $a_{01}$ ,  $a_{02}$  для амплитуды внешнего давления  $\Delta P = 1,5 \cdot 10^5$  Па. Число пузырьков в первой и второй фракциях бралось равным соответственно  $N_1 = 3000$  и  $N_2 = 7000$ . Для двухфракционного кластера при фиксированном значении  $\bar{c}_\infty$  получим не равновесные точки, а равновесные кривые  $\langle \bar{c} \rangle_\tau = \bar{c}_\infty$ , которые показаны на рис. 6. Видно,

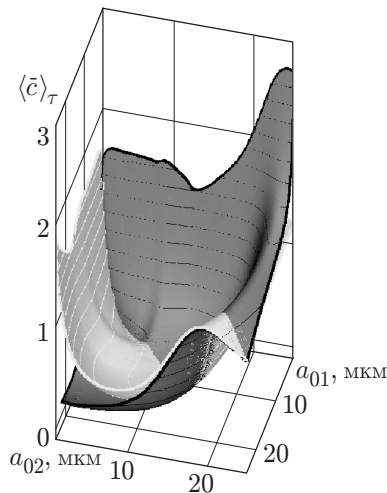


Рис. 5

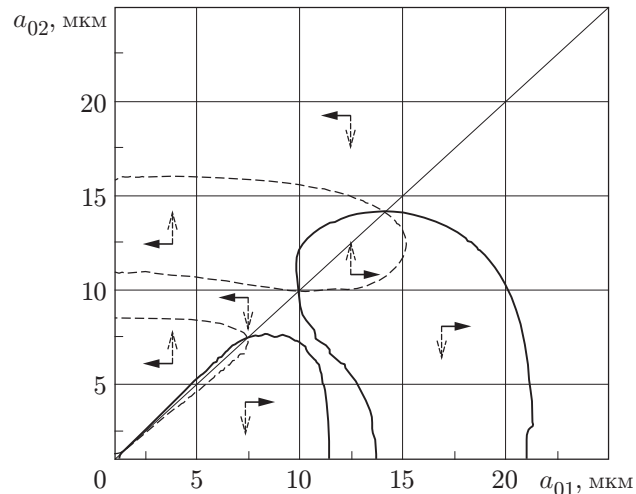


Рис. 6

Рис. 5. Зависимость осредненной концентрации газа вблизи стенки пузырька в двухфракционном кластере от начальных радиусов при  $\Delta P = 1,5 \cdot 10^5$  Па: темные области — первая фракция, светлые — вторая фракция

Рис. 6. Кривые равновесия для пузырьков в двухфракционном кластере ( $\bar{c}_\infty = 0,12$ ):

сплошные линии — первая фракция, штриховые — вторая фракция; сплошные стрелки — направление изменения начального радиуса пузырька для первой фракции, штриховые — то же для второй фракции

что равновесные кривые для различных фракций пересекаются только при  $a_{01} = a_{02}$  (случай монодисперсного кластера). Таким образом, для данной начальной концентрации газа в жидкости возможны три сценария: 1) в обеих фракциях пузырьки растворяются (реализуется в очень малой области, при  $a_0 < 1$  мкм в обеих фракциях); 2) пузырьки одной фракции растворяются или растут, а пузырьки другой фракции стремятся к размеру радиуса пузырька в равновесном состоянии; 3) пузырьки обеих фракций стремятся к одному и тому же радиусу. Это означает, что со временем кластер либо станет монодисперсным, либо исчезнет. Данный результат согласуется с результатом работы [18], полученным на основе двухфазной модели кавитирующей жидкости, в которой обнаружен переход полидисперсной пузырьковой структуры в монодисперсную в интенсивных ультразвуковых полях.

**Заключение.** Установлено, что пузырек в монодисперсном кластере более диффузионно устойчив, чем одиночный пузырек. В плохо очищенной от газа жидкости одиночный пузырек постоянно растет (пока не разрушится из-за неустойчивости поверхности), тогда как пузырек в кластере стремится к определенному радиусу, соответствующему его равновесному состоянию. Кроме того, в некотором диапазоне значений начальных концентраций газа в жидкости для пузырька в кластере, в отличие от одиночного пузырька, существует два устойчивых радиуса, соответствующих равновесному состоянию. Найденны значения начальных концентраций газа в жидкости, при которых двухфракционный кластер со временем становится монодисперсным.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Hsieg D. Y., Plesset M. S.** Theory of rectified diffusion of mass into gas bubbles // J. Acoust. Soc. Amer. 1961. V. 33, N 2. P. 206–215.
2. **Eller A., Flynn H. G.** Rectified diffusion during nonlinear pulsations of cavitation bubbles // J. Acoust. Soc. Amer. 1965. V. 37, N 3. P. 493–503.
3. **Eller A.** Growth of bubbles by rectified diffusion // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 46, N 5. P. 1246–1250.
4. **Crum L. A., Hansen G. M.** Generalized equations for rectified diffusion // J. Acoust. Soc. Amer. 1982. V. 72, N 5. P. 1586–1592.
5. **Barber B. P., Putterman S. J.** Observation of synchronous picosecond sonoluminescence // Nature (London). 1991. V. 352. P. 318–320.
6. **Gaitan D. F., Crum C. C., Church C. C., Roy R. A.** Sonoluminescence and bubble dynamics for a single, stable, cavitation bubble // J. Acoust. Soc. Amer. 1992. V. 91, N 6. P. 3166–3183.
7. **Hilgenfeldt S., Lohse D., Brenner M. P.** Phase diagrams for sonoluminescing bubbles // Phys. Fluids. 1996. V. 8. P. 2808–2826.
8. **Fyrillas M. M., Szeri A. J.** Dissolution or growth of soluble spherical oscillating bubbles // J. Fluid Mech. 1994. V. 277. P. 381–407.
9. **Lofstedt R., Weninger K., Putterman S., Barber B. P.** Sonoluminescing bubbles and mass diffusion // Phys. Rev. Ser. E. 1995. V. 51. P. 4400–4410.
10. **Akhatov I., Gumerov N., Ohl C.-D., et al.** The role of surface tension in stable single-bubble sonoluminescence // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78, N 2. P. 227–230.
11. **Насибуллаева Э. Ш., Ахатов И. Ш.** Динамика пузырькового кластера в акустическом поле // Акуст. журн. 2005. Т. 51, № 6. С. 813–821.
12. **Morch K. A.** Energy considerations on the collapse of cavity cluster // Appl. Sci. Res. 1982. V. 38. P. 313–321.



13. **Morch K. A.** The development of cavity clusters in tensile stresses fields // Proc. of the IUTAM symp. on adiabatic waves in liquid-vapor systems, Goettingen (Germany), 28 Aug. — 1 Sept. 1989. Goettingen: Springer-Verlag GmbH, 1990. P. 427–436.
14. **D'Agostino L., Brennen C. E.** Linearized dynamics of spherical bubble clouds // J. Fluid Mech. 1989. V. 199. P. 155–176.
15. **Chahine G. L., Duraiswami R.** Dynamical interaction in a multi-bubble cloud // J. Fluids Engng. 1992. V. 114. P. 680–686.
16. **Takahira H., Akamatsu T., Fujikawa S.** Dynamics of a cluster of bubbles in a liquid (Theoretical analysis) // JSME Intern. J. Ser. B. 1994. V. 37, N 2. P. 297–305.
17. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1.
18. **Kedrinskii V. K.** Peculiarities of bubble spectrum behavior in cavitation zone and its effect on wave structure (field parameters) // Proc. of the Intern. conf. Ultrasonics-85, London, 2–5 July 1985. London; Gilford: Butterworth and Co. Publ. Ltd, 1985. P. 225–230.

*Поступила в редакцию 13/IV 2005 г.,  
в окончательном варианте — 18/VIII 2006 г.*

---