

ЭФФЕКТ ХОЛЛА В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ  
ПРИ ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ  
И БОЛЬШИХ МАГНИТНЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

К. И. Кул

(Киев)

Явления Холла в электропроводной жидкости при переменном магнитном поле были рассмотрены в [1]. В этой работе при некоторых несущественных ограничениях определены основные черты указанных явлений в случае движения жидкости по каналу прямоугольного сечения в бегущем магнитном поле. Магнитное число Рейнольдса предполагалось малым, и решение для индуцированного поля было дано в виде ряда по степеням указанного параметра.

В случае относительно высокой электропроводности жидкости возможность количественной оценки по данным [1] исключается, хотя некоторые выводы качественного характера сохраняют силу. Поэтому есть смысл рассмотреть случай больших магнитных чисел Рейнольдса. Это позволит одновременно составить более полное представление о характерных проявлениях эффекта Холла при переменном магнитном поле.

Сделаем следующие предположения: жидкость протекает по каналу прямоугольного сечения, стенки канала непроводящие, скорость движения жидкости постоянна, скольжение ионов отсутствует, внешнее магнитное поле создается обмотками, расположенными на внутренних поверхностях индуктора, т. е. на плоскостях  $z = 0$  и  $z = \delta$  ( $\delta$  — высота канала), линейная нагрузка каждой из обмоток имеет одну компоненту в виде бегущей волны.

Определим индуцированное поле.

Выделим по оси канала ( $z = 1/2 \delta$ ) бесконечно тонкий слой жидкости. Для этого слоя, полагая

$$h_i = \varphi_i(z) f_i(t, x, y), \quad \varphi_i(z) = \alpha_{i1}(z - 1/2 \delta) + \alpha_{i3}(z - 1/2 \delta)^3 + \dots$$

$(i = x, y)$

уравнение для  $z$ -компоненты индуцированного поля можно записать

$$L(h) = \Delta h - \beta_m \cos(t - x) \frac{\partial h}{\partial y} - \varepsilon \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + (1 - s) \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \varepsilon s \cos(t - x) = 0 \quad (1)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $h$  — напряженность индуцированного поля,  $\beta_m$  — параметр Холла при индукции, равной амплитуде бегущей волны поля,  $s$  — скольжение,  $\varepsilon$  — аналог магнитного числа Рейнольдса.

Далее уравнение (1) рассматривается в области

$$(0 < t < l) \times \Omega \quad (-p\pi < x < p\pi, 0 < y < d)$$

при условиях

$$h_{(y=0)} = h_{(y=d)} = 0, \quad h_{(x=p\pi)} = h_{(x=-p\pi)}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_{(x=p\pi)}} = \frac{\partial h}{\partial x_{(x=-p\pi)}}, \quad h_{(t=0)} = 0$$

Таким образом, переходные процессы в цепях индуктора не учитываются, и допускается, что формирование бегущей волны внешнего поля происходит мгновенно с момента коммутации индуктора.

Для решения уравнения (1) используем аналог метода Галеркина, разработанный М. И. Вишиком применительно к смешанным краевым задачам со временем [2]. Положим

$$h^{\circ} = \frac{i}{2} \sum_1^m a_{m0}(t) \sin \frac{m\pi y}{d} + \sum_1^{m,n} [a_{mn}(t) \cos nx + b_{mn}(t) \sin nx] \sin \frac{m\pi y}{d} \quad (2)$$

Функции

$$\sin(m\pi y/d) \cos nx, \quad \sin(m\pi y/d), \quad \sin nx \quad (m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots)$$

образуют полную линейно независимую систему элементов в соответствующем гильбертовом пространстве. Следовательно,  $h^{\circ}$  при  $m \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  должен сходиться к решению уравнения (1).

В (2) неизвестными являются величины  $a_{mn}(t)$ ,  $b_{mn}(t)$ . Для получения соответственных уравнений осуществим скалярное умножение  $L(h^{\circ})$  на координатные функции в области  $\Omega$ . Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} a_{mn}(t) + \frac{z_{mn}}{\varepsilon} a_{mn}(t) + (1-s)nb_{mn}(t) + \\ & + \frac{\beta}{\varepsilon} \sum_1^k \frac{ikm}{k^2 - m^2} [(-1)^{k+m} - 1] \{ [a_{k(n-1)}(t) + a_{k(n+1)}(t)] \cos t - \\ & - [b_{k(n-1)}(t) - b_{k(n+1)}(t)] \sin t \} = \frac{2\delta_{mn}s}{m\pi} [(-1)^m - 1] \cos t \\ & (m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} b_{mn}(t) + \frac{z_{mn}}{\varepsilon} b_{mn}(t) - (1-s)na_{mn}(t) + \\ & + \frac{\beta}{\varepsilon} \sum_1^k \frac{ikm}{k^2 - m^2} [(-1)^{k+m} - 1] \{ [b_{k(n-1)}(t) + b_{k(n+1)}(t)] \cos t + \\ & + [a_{k(n-1)}(t) - a_{k(n+1)}(t)] \sin t \} = \frac{2\delta_{mn}s}{m\pi} [(-1)^m - 1] \sin t \\ & (m = 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4)$$

при начальных условиях

$$a_{mn}(0) = 0, \quad b_{mn}(0) = 0$$

Здесь

$$z_{mn} = (m\pi/d)^2 + n^2, \quad \beta = \beta_m/d, \quad \delta_{m1} = 1, \quad \delta_{m(n \neq 1)} = 0$$

Далее процессы установления не рассматриваются. В таком случае в (3) и (4) можно отбросить все уравнения, в которых сумма индексов при  $a(t)$  и  $b(t)$  — нечетные числа.

Уравнения (3) и (4) решались численно на ЭЦВМ. В таблице выписаны значения (округленные) переменных в ряде точек для случая ( $\varepsilon = 4.9$ ,  $\beta = 5.57$ ,  $s = -1$ ). В крайнем правом столбце дано приближенное выражение для переменных.

То обстоятельство, что  $a_{mn}(t)$  и  $b_{mn}(t)$  имеют явно выраженный синусоидальный характер, позволяет упростить процедуру определения индуктированного поля. Если не ставятся жесткие требования в отношении точности, то в (2) сразу можно положить

$$\begin{aligned} a_{m0}(t) &= \text{const}, \quad a_{mn}(t) = a_{mn} \sin(nt - \psi_{mn}), \\ b_{mn}(t) &= -b_{mn} \cos(nt - \psi_{mn}) \end{aligned} \quad (5)$$

В таком случае скалярным умножением оператора  $L(h^\circ)$  на координатные функции в области  $\Omega \times (0 < t < 2\pi)$  можно получить, вместо системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, алгебраические уравнения. Имеем

$$z_{mn} f_{mn} + \beta \sum_{k^2 - m^2}^k \frac{k m}{k^2 - m^2} [(-1)^{k+m} - 1] [f_{k(n-1)} + f_{k(n+1)}] - \varepsilon s n g_{mn} = - \frac{2 \mathcal{S}_{mn} \varepsilon s}{m \pi} [(-1)^m - 1] \quad (6)$$

$$z_{mn} g_{mn} + \beta \sum_{k^2 - m^2}^k \frac{k m}{k^2 - m^2} [(-1)^{k+m} - 1] [g_{k(n-1)} + g_{k(n+1)}] + \varepsilon s n f_{mn} = 0 \quad (7)$$

$$(f_{m0} = a_{m0} \sin \psi_{m0}, \quad g_{m0} = a_{m0} \cos \psi_{m0}, \quad f_{m0} = -a_{m0})$$

Здесь, как и в (3) и (4), суммы индексов при  $f$  и  $g$  — четные числа.

Отсюда для указанного выше случая получим

$$a_{11} = -0.374, \quad a_{31} = -0.034, \quad a_{20} = -0.0894, \quad a_{22} = 0.0435$$

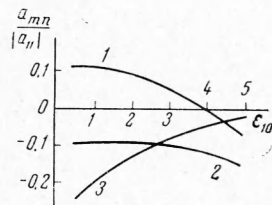
$$\psi_{11} = 71.5^\circ, \quad \psi_{31} = 83^\circ, \quad \psi_{22} = 59^\circ$$

Таким образом, оба приема дают хорошее совпадение для  $a_{mn}$  и худшее для  $\psi_{mn}$ . Это подтверждается данными и при других значениях  $\varepsilon$ ,  $\beta$  и  $s$ , которые здесь не приводятся. Заметное расхождение в величине поля двойной частоты не должно иметь определяющего значения, поскольку указанное поле мало по сравнению с основным полем ( $a_{11}$ ).

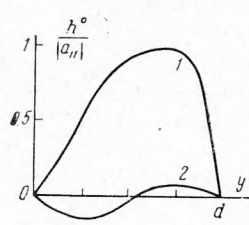
$t$ рад	186,6	188,2	189,7	191,3	192,9	
$a_{11}$	-0.0052	0.372	0.0206	-0.3719	0.001	$-0.372 \sin(t - 75^\circ)$
$b_{11}$	-0.371	0.0118	0.371	0.0037	-0.371	$0.371 \cos(t - 75^\circ)$
$a_{31}$	-0.006	0.0336	0.0074	-0.0339	-0.0054	$-0.0335 \sin(t - 85.5^\circ)$
$b_{31}$	-0.0348	-0.0065	0.0344	0.0079	-0.0348	$0.0345 \cos(t - 85.5^\circ)$
$a_{20}$	-0.0884	-0.0879	-0.0884	-0.0878	-0.0883	-0.0883
$a_{22}$	0.0579	-0.0438	0.0571	-0.0432	0.0582	$0.007 + 0.05 \sin(2t - 68^\circ)$
$b_{22}$	-0.004	0.0079	-0.0082	0.0121	-0.0023	$0.003 - 0.05 \cos(2t - 68^\circ)$

По уравнениям (6) и (7) легко оценить влияние магнитного числа Рейнольдса на распределение индуктированного поля.

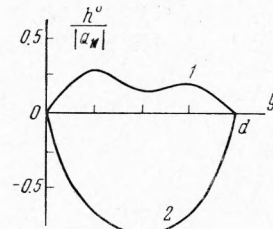
С ростом магнитного числа Рейнольдса поле нулевой и двойной частоты уменьшается, напротив, поле основной частоты ( $a_{31}$ ) увеличивается. На фиг. 1 даны амплитудные значения указанных полей при  $\beta = 5.57$  и  $s = -1$  (кривым 1, 2 и 3 соответствуют величины  $a_{20}$ ,  $a_{31}$  и  $a_{22}$ ).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Магнитное число Рейнольдса оказывает заметное влияние на распределение поля в жидкости.

При низких значениях числа Рейнольдса распределение поля менее симметрично, и в этом смысле проявление эффекта Холла более сильно (фиг. 2:  $\varepsilon = 0.49$ ,  $\beta = 5.57$ ,  $s = -1$ ,  $|a_{11}| = 0.033$ , кривая 1 соответствует  $t - x = 0$ , кривая 2 соответствует значению  $t - x = 1/2\pi$ ).

При больших значениях указанного параметра происходит симметризация в распределении поля вследствие уменьшения составляющих нулевой и двойной частоты, но соответственные кривые становятся более уплотненными благодаря увеличению составляющей основной частоты ( $a_{31}$ ) (фиг. 3:  $\varepsilon = 49$ ,  $\beta = 5.57$ ,  $s = -1$ ,  $|a_{11}| = 1.23$ , кривая 1 соответствует  $t - x = 0$ , кривая 2 для  $t - x = 1/2\pi$ ). В первом случае (фиг. 2) величина поля при  $t - x = 0$  значительно больше, чем при  $t - x = 1/2\pi$ , во втором случае наблюдается обратная картина. Это в основном связано с существенным различием временных фаз ( $\psi_{mn}$ ) вследствие неодинаковой добротности среды в указанных случаях.

Выше предполагалось, что амплитудное значение внешнего поля постоянно. Следовательно, допускалось, что ширина индуктора значительно превосходит ширину канала. Однако более реальные случаи, когда указанные размеры либо одинаковы, либо если отличаются, то незначительно. При этом внешнее поле не остается постоянным по ширине канала, и кривая распределения этого поля представляет симметричную относительно оси канала функцию.

Легко показать возможность перехода к уравнениям (6) и (7) и в этом случае.

Положив

$$\varphi(y) = \sum_0^i a_{2i} (2y - d)^{2i}$$

где  $\varphi(y)$  — амплитудное значение внешнего поля,  $a_{2i}$  — коэффициенты, зависящие от конструкции индуктора и типа возбуждающей обмотки, получим

$$\int_0^d \varphi(y) \sin \frac{m\pi y}{d} dy = N [(-1)^m - 1]$$

Таким образом, в правую часть уравнений (3) и (4) необходимо ввести множитель  $N$ . Поскольку последний ограничен, следует ожидать, что условия (5) будут выполнены, хотя и приближенно. Это означает возможность применения уравнений (6) и (7) и при соразмерности ширины канала и индуктора, если в них положить  $\delta m_1 = N$ .

Поступила 30 V 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К и м К. И. Электромагнитные процессы в анизотропно-электропроводной жидкости при переменном магнитном поле. ПМТФ, 1964, № 6.
2. В и ш и к М. И. Смешанные краевые задачи и приближенный метод их решения. ДАН СССР, 1954, т. 99, № 2.